微分積分学 3　期末試験予想問題

担当:　渕野 昌　　2018 年 05 月 30 日 (2018 年 06 月 05 日 21:38 版)

以下は，期末試験の予想問題集です．期末試験は，ここにあげた問題 (の類題) がきちんとできるように準備すれば，最低線はクリアできます．

この予想問題集は，　`http://fuchino.ddo.jp/kobe/biseki-3-ss18-prefinal.pdf`
としてダウンロードできます．このファイルは，講義の進展に応じて，試験直前まで，随時，変更／拡張される可能性があります．何度かチェックしてみてください．

1. 次の不定積分の計算をしてください:

(1) $\displaystyle\int(4x^5-3x^3+2x^2+7x-8)dx$　(2) $\displaystyle\int\left(\sqrt[3]{x^2}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)dx$　(3) $\displaystyle\int\sin\left(\frac{4}{3}x\right)dx$

(4) $\displaystyle\int x\sin x dx$　(5) $\displaystyle\int\sin x\cos x dx$　(6) $\displaystyle\int\frac{1}{(3+5x)^2}dx$　(7) $\displaystyle\int x\sqrt{x+1}\,dx$

(8) $\displaystyle\int\frac{6x-9}{x^2-3x+4}dx$　(9) $\displaystyle\int\frac{x^3-5x^2+4x+1}{x^2-5x+6}dx$　(10) $\displaystyle\int\sin^2 x\,dx$

2. 次の等式が正しいことを確かめてください:

(1) $\displaystyle\int\frac{1}{a^2+x^2}dx=\frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{x}{a}+C$　（ただし $a\neq 0$）

(2) $\displaystyle\int\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}dx=\sin^{-1}\frac{x}{a}+C$　（ただし $a>0$）

(3) $\displaystyle\int\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}dx=\log(\sqrt{x^2+1}+x)+C$

(4) $\displaystyle\int\sqrt{x^2+1}\,dx=\frac{1}{2}(x\sqrt{x^2+1}+\log(\sqrt{x^2+1}+x))+C$

3. (1) 次の議論は間違っています．どこが間違っているのかを指摘してください:

$\dfrac{1}{x^2}$ の原始関数は $-\dfrac{1}{x}$ だから，$\displaystyle\int_{-1}^{1}\frac{1}{x^2}dx=\left[-\frac{1}{x}\right]_{-1}^{1}=-2$. $\dfrac{1}{x^2}$ のグラフは $x=0$ を中心として対称だから，$\displaystyle\int_0^1\frac{1}{x^2}dx=-1$ である．

(2) 広義積分 $\displaystyle\int_0^1\frac{1}{x^2}dx$ を計算してください．

4. 次の広義積分を計算してください: $\displaystyle\int_0^1\log x\,dx$

5. (1) すべての $\beta>-1$ に対し，$x^\beta e^{-x}\leq\dfrac{C}{x^2}$ がすべての $x\geq 1$ に対して成り立つような，定数 $C>0$ がとれることを示してください．

(2) (1) と，広義積分 $\displaystyle\int_1^\infty\frac{1}{x^2}dx$ が収束すること (これは 5 月 1 日の講義で確かめています) を用いて，すべての $\alpha>0$ に対し，$\Gamma(\alpha)=\displaystyle\int_0^\infty x^{\alpha-1}e^{-x}dx$ が収束することを示してください．— $\Gamma:(0,\infty)\to\mathbb{R};\ \alpha\mapsto\displaystyle\int_0^\infty x^{\alpha-1}e^{-x}dx$ はガンマ関数と呼ばれ，色々なところに出てくる重要な関数です．

(3) ガンマ関数が増加関数であることを示してください．

(4) 次の不等式が成り立つことを示してください: $3!<\Gamma(\pi)<4!$

(5) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\Gamma(x)=\infty$ となることを示してください．

6. (1) すべての $a > 1$ に対し，$\displaystyle\int_1^a \frac{\sin x}{x}\,dx = \left[\frac{-\cos x}{x}\right]_1^a - \int_1^a \frac{\cos x}{x^2}\,dx$ が成り立つことを示して，このことから $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx$ が収束することを示してください (実は，$\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}$ となることが知られています).

(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n} = \infty$ となることを用いて，$\displaystyle\int_0^\infty \left|\frac{\sin x}{x}\right| dx$ は発散することを示してください.

(ヒント: $\displaystyle\int_0^\infty \left|\frac{\sin x}{x}\right| dx = \sum_{n=0}^\infty \int_{2n\pi}^{2(n+1)\pi} \left|\frac{\sin x}{x}\right| dx$ となることと，

$\displaystyle\int_{2n\pi}^{2(n+1)\pi} \left|\frac{\sin x}{x}\right| dx \geq \frac{2}{(n+1)\pi}$ を示してこれを用いる)

(3) $p > 0$ して，どのような p の値に対し広義積分 $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin x}{x^p} dx$ が収束するかを調べてください.