微分積分学 I　レポート No.1 — 解説と解答例

担当:　渕野 昌　　　　(2010 年 5 月 11 日 提出分 (2010 年 07 月 21 日 (01:59) 版[1]))

＊以下の解説と解答例は，TA の倉橋 太志君の作成してくれた解答を参考にしています．

> 1. 関数が式で定義されていて，特に他に指定がない場合には，式が意味を持つような実数の全体の領域を，この関数の定義域とするのでした．このことを頭において，次の定義によって与えられた関数の定義域と値域は何かを答えてください．
> (1) $f(x) = \dfrac{1}{(x-2)(x-3)}$　　(2) $f(x) = |x+2| + \sqrt{x+1}$
> (3) $f(x) = \log|x^2 - 4x + 3|$

(1): $(x-2)(x-3)$ は $x = 2$ または $x = 3$ のときに値 0 をとるから，$f(x)$ の定義域は: $\{x \in \mathbb{R} : x \neq 2$ かつ $x \neq 3\}$ となる．$x^2 + 5x + 6 = (x - \frac{5}{2})^2 - \frac{1}{4}$ と書けることを用いると，$f(x)$ の値域は，$\{x \in \mathbb{R} : x \leq -4$ または $0 < x\} = (-\infty, -4] \cup (0, \infty)$ となることがわかる．

(2) $\sqrt{\bullet}$ は実数の範囲では負の実数には定義されないから，$\{x \in \mathbb{R} : -1 \leq x\}$ が定義域となる．この範囲で $f(x)$ は明らかに増加関数だから，$f(-1) = 1$ が $f(x)$ のとる最小値になる．また，x を大きくすれば $f(x)$ の値はいくらでも大きくなる．したがって，$\{x \in \mathbb{R} : 1 \leq x\} = [1, \infty)$ が $f(x)$ の値域になる．[厳密には，ここで，$f(x)$ が連続関数であることと，中間値の定理を用いて，$f(x)$ の値域には“飛び”がないことを使っていることに注意．]

(3) $\log\bullet$ の定義域は $(0, \infty)$ だから $|x^2 - 4x + 3| > 0$ つまり $x^2 - 4x + 3 \neq 0$ となるような x の全体が $f(x)$ の定義域になることがわかる．$x^2 - 4x + 3 = (x-1)(x-3)$ だから，範囲は，$x \neq 1$ かつ $3 \neq x$ となるような x の全体である．つまり，$\{x \in \mathbb{R} : x \neq 1$ かつ $x \neq 3\}$ がこの関数の定義域である．$f(x)$ 値域は，$\log\bullet$ の値域と一致するから，$\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$ である．

> 2. $f(x) = x^2 + 3x + 9$ と定義される関数と $g(x) = \dfrac{x^3 - 3^3}{x - 3}$ と定義される関数の違いは何かを答えてください．

$x^3 - 3^3 = (x-3)(x^2 + 3x + 9)$ なので，3 と異る x に対しては $f(x) = g(x)$ がなりたつ．$x = 3$ に対しては，$f(x) = 27$ となるのに対し，$g(x)$ は定義されていない（3 は $g(x)$ の定義域に含まれない）．

> 3. $f(x) = ax + b$, $g(x) = cx + d$ とする．ただし a, b, c, d は定数で $a \neq 0$ とする．このとき，f^{-1}, $g \circ f$ は何になるかを答えてください．

h を f の逆関数とすると，$f \circ h(x) = f(h(x)) = x$ である．この式を f の定義を用いて書きなおすと $a(h(x)) + b = x$ となる．これを $h(x)$ について解くと，$h(x) = \frac{1}{a}x - \frac{b}{a}$ となることがわかる．
また，$g \circ f(x) = g(f(x)) = c(ax + b) + d = (ca)x + (cb + d)$ である．

上の結果から，一次関数の逆関数の傾き係数は，もとの一次関数の傾き係数の逆数になり，一次関数の合成関数の傾き係数は，それぞれの傾き係数の積になることがわかる．このことから，逆関数の微分の公式と，合成関数の微分の公式

(1) $\left(f^{-1}\right)'(x) = \dfrac{1}{f'(f^{-1}(x))}$

(2) $(g \circ f)'(x) = g'(f(x))f'(x)$

---

[1] 最後の講義の後で受講者の一人に幾つか細かいミスを指摘してもらったので，それを反映させた訂正を加えました．

が，それぞれ，

(1)' 逆関数の接線を与える一次関数は，もとの関数の（対応する点での）接線をグラフに持つ一次関数の逆関数のグラフになっている．

(2)' 合成関数の接線をグラフに持つ一次関数が，合成されるそれぞれの関数の（対応する点での）接線をグラフに持つ一次関数の合成関数のグラフになる．

ということを意味していることがわかる．

4. $\mathbb{R}$ 上の関数 f, g がそれぞれ逆関数 f^{-1}, g^{-1} を持つとき，(1) $g \circ f$ は逆関数を持つことを示してください．(2) この逆関数の定義域は何になるかを答えてください．(3) $(g \circ f)^{-1}$ を f^{-1} と g^{-1} を用いて表現してください．

$h(x) = f^{-1} \circ g^{-1}(x)$ として $\mathbb{R}$ 上の関数 $h(x)$ を定義すると，$h \circ (g \circ f)(x) = f^{-1}(g^{-1}(g(f(x)))) = f^{-1}(f(x)) = x$ また，$(g \circ f) \circ h(x) = g(f(f^{-1}(g^{-1}(x)))) = g(g^{-1}(x)) = x$ となる．このことから，

(1): $g \circ f$ は逆関数を持ち，

(3): $g \circ f$ の逆関数は，$f^{-1} \circ g^{-1}$ となることがわかる．

(2): $g \circ f$ の定義域は $\mathbb{R}$ で値域は $R = g[f[\mathbb{R}]] = \{g(f(x)) : x \in \mathbb{R}\}$ である．したがって，$g \circ f$ の定義域は，R で，値域は $\mathbb{R}$ である．

5. 極限 $\lim_{x \to 0} \sin(\frac{1}{x})$ が存在しないことを示してください．

どんなに小さな $\varepsilon > 0$ をとっても，区間 $(-\varepsilon, \varepsilon)$ の中に，$\sin(\frac{1}{x}) = 1$ となる x も $\sin(\frac{1}{x}) = -1$ となるような x もとれる．このことから，極限 $\lim_{x \to 0} \sin(\frac{1}{x})$ は存在しないことがわかる（もし $a = \lim_{x \to 0} \sin(\frac{1}{x})$ が存在したとすると，ε を十分小さくとったときには，すべての $x \in (-\varepsilon, \varepsilon)$，$(x \neq 0)$ での $\sin(\frac{1}{x})$ の値は，a に十分に近い値をとらなくてはならない）．

6. 次の値を求めてください．(1) $\lim_{x \to 3}(x^4 + 2x^3 - 2x + 5)$ (2) $\lim_{x \to 3} \frac{x^3 - 3^3}{x - 3}$ (3) $\lim_{x \to \pi} \frac{\sin x}{x}$ (4) $\lim_{x \to 0} e^{-\left|\frac{1}{x}\right|}$ (5) $\lim_{x \to 0} \log_{0.5} \left|\frac{1}{x}\right|$

(1): 多項式で与えられる関数は連続関数になるのだったから，$\lim_{x \to 3}(x^4 + 2x^3 - 2x + 5) = 3^4 + 2 \cdot 3^3 - 2 \cdot 3 + 5 = 134$.

(2): $x^3 - 3^3 = (x-3)(x^2+3x+9)$ だから，$\lim_{x \to 3} \frac{x^3 - 3^3}{x - 3} = \lim_{x \to 3} x^2 + 3x + 9 = 3^2 + 3 \cdot 3 + 9 = 27$.

(3): $\lim_{x \to \pi} \frac{\sin x}{x} = \frac{\lim_{x \to \pi} \sin x}{\lim_{x \to \pi} x} = \frac{0}{1} = 0$

(4): $y = \left|\frac{1}{x}\right|$ とすると，$x \to 0 \Leftrightarrow y \to \infty$ だから，$\lim_{x \to 0} e^{-\left|\frac{1}{x}\right|} = \lim_{y \to \infty} e^{-y} = \lim_{y \to \infty} \frac{1}{e^y} = 0$.

(5): $0.5 < 1$ だから，$log_{0.5} y$ の値は $y \to \infty$ とすると $-\infty$ に発散する．$y = \left|\frac{1}{x}\right|$ とするとき，$x \to 0 \Leftrightarrow y \to \infty$ だから，$\lim_{x \to 0} \log_{0.5} \left|\frac{1}{x}\right| = \lim_{y \to \infty} \log_{0.5} y = -\infty$ である．

7. $f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \text{ のとき} \\ \sin(x), & \text{それ以外のとき} \end{cases}$
とするとき，$f(x)$ が連続になる点の全体は何になるかを答えてください．

$u \in \mathbb{R}$ に対し，$\lim_{x\to u,\, x\in\mathbb{Q}} f(x) = 1$ で $\lim_{x\to u,\, x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}} f(x) = \sin(u)$ だから，$\lim_{x\to u} f(x)$ が存在するには，$\sin(u) = 1$ が成り立っていなければならないことがわかる．逆に $\sin(u) = 1$ なら，$\lim_{x\to u} f(x) = 1 = f(u)$ となるから，$f(x)$ は u で連続である．
したがって，$f(x)$ が連続となるような点の全体は，$\{u \in \mathbb{R} : \sin(u) = 1\} = \{\frac{\pi}{2} + 2n\pi : n \in \mathbb{Z}\}$ である．

8. 次の等式が（式が意味を持つような変数の値のすべてで）成り立つことを（$\log(x)$ が e^x の逆関数であることを用いて）証明してください:
(1) $e^x = 2^{\frac{x}{\log 2}}$　(2) $\log_{10} b = \frac{\log b}{\log 10}$　(3) $\log b^c = c \log b$

(1): (a) $e^x = (2^{\log_2 e})^x = 2^{x \log_2 e}$ である．ここで，(b) $\log_2 e = \frac{\log e}{\log 2} = \frac{1}{\log 2}$ である: [$e^{\bullet}$ は狭義の増加関数だら，2 の $\log_2 e$ 乗と 2 の $\frac{1}{\log 2}$ 乗が等しいことを示せばよい．$2^{\bullet}$ と $\log_2 \bullet$ は互いに逆関数だから，$2^{\log_2 e} = e$ である．一方，$2^{\frac{1}{\log 2}} = (e^{\log 2})^{\frac{1}{\log 2}} = e^{\frac{\log 2}{\log 2}} = e$ だからよい．]
(b) を (a) に代入すると，$e^x = 2^{\frac{x}{\log 2}}$ が得られる．

(2): (1) の (b) と同様に証明できる．
(3): $e^{\log b^c}$ と $e^{c \log b}$ が等しいことを示せばよい．これは，$e^{\bullet}$ と $\log \bullet$ が互いに逆関数であることを使うと，$e^{\log b^c} = b^c$ だが，一方，$e^{c \log b} = (e^{\log b})^c = b^c$ となるからよい．

9. $\log x = 5000000$ のとき，x は十進数で表すと（小数点以上）何桁で表わされる数かを答えてください（桁数だけを答えるのではなく，なぜそう言えるのかを説明してください）．ただし，$\log 10 = 2.302585092994046\cdots$ です．

ある正の実数 a と，自然数 n に対し，$n \le \log_{10} a < n+1$ なら，この不等式の各辺を 10 の肩に乗せると $10^n \le a < 10^{n+1}$ となる．したがって， $\log_{10} a$ の小数点以下を切り捨てた値が，a を十進数で表示したときの，小数点以上の桁数になることがわかる．
ここで，8., (2) の式から，$\log_{10} x = \frac{\log x}{\log 10} \approx \frac{5000000}{2.302585092994046\cdots} \approx 2171472.409\cdots$ となるから，x は 2171473 桁の数であることがわかる．

10. 連続な関数 $f(x)$ が $f(1) = 3$, $f(2) = 4$ を満たすとき，方程式 $f(x) = \pi$ は区間 $(1, 2)$ で必ず少なくとも一つの解を持つことを，中間値の定理（教科書の p.24, 第 1 章定理 14）を用いて説明してください．$f(x)$ が連続でないときには，この主張が必ずしも成り立たないことを示す例を作ってください．

$f(x)$ は仮定により連続なので，中間値の定理が $f(x)$ に適用できて， 3 と 4 の間どの値に対しても $f(x)$ は区間 $(1, 2)$ のどこかでこの値をとることが結論できる．特に $3 < \pi < 4$ だから，$f(x) = \pi$ は $(1, 2)$ の間の点の少なくとも一つで成り立っていることがわかる．
たとえば，$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を，

$$f(x) = \begin{cases} 3 & x \le 1 \text{ のとき} \\ 4 & \text{それ以外のとき} \end{cases}$$

とすると，この $f(x)$ は，$f(1) = 3$, $f(2) = 4$ を満たすが，$f(x)$ のとる値は 3 と 4 だけだから，方程式 $f(x) = \pi$ は区間 $(1, 2)$ の中でも外でも解を持たない．$f(x)$ は $[1, 2]$ で連続でない: $x = 1$ で $f(x)$ は不連続である．