微分積分学 I　期末試験 予想問題集

担当:　渕野 昌　　**2015 年 07 月 16 日**

以下の問題の細部を調節したものを，期末試験の基本問題として出題します.（最低線でも）以下のタイプの問題が解けるよう準備しておいてください.

期末試験では，以下のタイプの問題以外にも，もう少し challenging な問題を 1 題以上出す予定です.

このプリントのファイルは,

`http://kurt.scitec.kobe-u.ac.jp/~fuchino/kobe/biseki1-ss15-pre-final-exam.pdf`

としてダウンロードできます.

I.　$a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ として，$f : [a, b] \to \mathbb{R}$ を C^1-級の関数とする.

(1) (a) $f'(x) = 0$ となる $x \in [a, b]$ が存在しないとき，f は狭義単調 (真に単調) であることを示せ. (b) 更に，$f(a) < 0$, $f(b) > 0$ であるときには，f は単調増加で，$f(x) = 0$ となる $x \in (a, b)$ がちょうど一つ存在することを示せ.

(2) $f'(x) = 0$ となる点 $x \in [a, b]$ が，ちょうど m 個 存在するとき，$f(x) = 0$ となるような $x \in [a, b]$ は全部で $m + 1$ 以下しか存在しないことを示せ.

(3) f が $[a, b]$ で増加なとき，$N = \{c \in [a, b] : f'(c) = 0\}$ が有限なら，N の各点で f' は極小になることを示せ.

II.　ある実数 $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$ に対し， $f(x) = (x + 1)^\alpha$ とするとき，$f(x)$ のマクローリン展開を求めよ.

III.　次の不等式を示せ $e^x > 1 + x + \dfrac{1}{2}x^2$ $(x > 0)$

IV.　(a) $f(x, y)$ を全微分可能として，$u(r, \theta) = r\cos\theta$, $v(r, \theta) = r\sin\theta$ とする. $z(r, \theta) = f(u(r, \theta), v(r, \theta))$ とするとき，教科書の定理 9 (p.166) を用いて，$\dfrac{\partial z}{\partial r}$, $\dfrac{\partial z}{\partial \theta}$ を求めよ.

(b) (a) で，$f(x, y) = g(x^2) + h(y)$ で g, h は C^1-級のとき，$\dfrac{\partial z}{\partial r}$, $\dfrac{\partial z}{\partial \theta}$ を更に計算せよ.

V.　領域 $D \subseteq \mathbb{R}^2$ で x と y が連結で y と z が連結なら，x と z は連結であることを示せ.