微分積分 1　定期試験 予想問題集

担当:　渕野 昌　　**2017 年 05 月 30 日**

以下の問題のいくつかの細部を調節したもの and/or 演習問題が定期試験の基本問題となります.（最低線でも）これらの問題が解けるよう準備しておいてください.

　ただし，これらのタイプの問題以外にも，もう少し challenging な問題も 1 題以上出る可能性があります.

　このプリントのファイルは，

`http://fuchino.ddo.jp/kobe/biseki1-ss17-pre-final-exam.pdf`

としてダウンロードできます.

I.　$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ を連続関数とする．a を任意の実数として，数列 $\{a_n\}$ を $a_0=a$, $a_{n+1}=f(a_n)$ により定義する．$\{a_n\}$ が収束するとして，$b=\lim_{n\to\infty}a_n$ とすると，$f(b)=b$ が成り立つことを示せ.

II.　$a,b\in\mathbb{R}$, $a<b$ として，$f:[a,b]\to\mathbb{R}$ を微分可能で導関数が連続となるようなものとする．平均値の定理と，中間値の定理から，次が言えることを示せ.

(1) (a) $f'(x)=0$ となる $x\in[a,b]$ が存在しないとき，f は狭義単調 (真に単調) であることを示せ．(b) 更に，$f(a)<0$, $f(b)>0$ であるときには，f は単調増加で，$f(x)=0$ となる $x\in(a,b)$ がちょうど一つ存在することを示せ.

(2) $f'(x)=0$ となる点 $x\in[a,b]$ が，ちょうど m 個 存在するとき，$f(x)=0$ となるような $x\in[a,b]$ は全部で $m+1$ 以下しか存在しないことを示せ.

(3) f が $[a,b]$ で増加なとき，$N=\{c\in[a,b]:f'(c)=0\}$ が有限なら，N の各点で f' は極小になることを示せ.

III.　ある実数 $\alpha\in\mathbb{R}$, $\alpha>0$ に対し，$f(x)=(x+1)^\alpha$ とするとき，$f(x)$ のマクローリン展開を求めよ.

IV.　(a) e^x のマクローリン展開を求めよ．(b) 次の不等式を示せ $e^x>1+x+\dfrac{1}{2}x^2$ $(x>0)$