微分積分学 II　レポート No.1 — 解説と解答例

担当:　渕野 昌　　**(2010 年 5 月 11 日 提出分 (2010 年 06 月 16 日 (14:39) 版))**

＊以下の解説と解答例は，TA の倉橋 太志君の作成してくれた解答を参考にしています.

1. 次の不定積分の計算をしてください:

(1) $\displaystyle\int (4x^5 - 3x^3 + 2x^2 + 7x - 8)dx$　(2) $\displaystyle\int \left(\sqrt[3]{x^2} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right) dx$　(3) $\displaystyle\int \sin\left(\frac{4}{3}x\right) dx$

(4) $\displaystyle\int x\sin x dx$　(5) $\displaystyle\int \sin x\cos x dx$　(6) $\displaystyle\int \frac{1}{(3+5)^2}\,dx$　(7) $\displaystyle\int x\sqrt{x+1}\,dx$

(8) $\displaystyle\int \frac{6x-9}{x^2-3x+4}\,dx$　(9) $\displaystyle\int \frac{x^3-5x^2+4+1}{x^2-5x+6}\,dx$　(10) $\displaystyle\int \sin^2 x\,dx$

(1): $\displaystyle\int (4x^5 - 3x^3 + 2x^2 + 7x - 8)dx = \frac{2}{3}x^6 - \frac{3}{4}x^4 + \frac{2}{3}x^3 + \frac{7}{2}x^2 - 8x + C.$

(2): $\displaystyle\sqrt[3]{x^2} + \frac{1}{\sqrt{x}} = x^{\frac{2}{3}} + x^{-\frac{1}{2}}$ に注意すると: $\displaystyle\int \left(\sqrt[3]{x^2} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right) dx = \frac{3}{5}x^{\frac{5}{3}} + 2x^{\frac{1}{2}} + C.$

(3): $\displaystyle\int \sin\left(\frac{4}{3}x\right) dx = -\frac{3}{4}\cos\left(\frac{4}{3}x\right) + C.$

(4): （部分積分法を用いる）$\displaystyle\int x\sin x dx = \int x(-\cos x)' dx = -x\cos x + \int \cos x\,dx = -x\cos x + \sin x + C.$

(5):（部分積分法を用いる）$\displaystyle\underline{\int \sin x\cos x dx} = \int \sin x(\sin x)' dx = \sin^2 x - \int (sinx)'\sin x dx = \underline{\sin^2 x - \int \sin x\cos x dx}$. 下線の項の間の等式で，$\displaystyle -\int \sin x\cos x dx$ を移項して（この移項をすると右辺に積分記号を含む項がなくなるので，$+C$ を書きくわえる必要がある），両辺を 2 で割ると，$\displaystyle\int \sin x\cos x dx = \frac{1}{2}\sin^2 x + C$ となる（C を 2 で割ると $\dfrac{C}{2}$ だが，積分定数は ”ある定数を足す” ことをあらわしているだけなので，これは，ふたたび C で置きかえてよい）.

（別解） 加法定理から $\sin x\cos x = \dfrac{1}{2}\sin(2x)$ だから，$\displaystyle\int \sin x\cos x dx = \int \frac{1}{2}\sin(2x)dx = -\frac{1}{4}\cos(2x) + C$. この解は一見すると 1 番目の解と異なっているように見えるが，半角の公式 $\displaystyle\sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{2}$ を 1 番目の積分結果に用いると，$\displaystyle\frac{1}{2}\sin^2 x + C = \frac{1-\cos(2x)}{4} = -\frac{1}{4}\cos(2x) + \frac{1}{4} + C$ となる．ここで $\dfrac{1}{4} + C$ を C で置きかえると別解の積分結果と一致するから，両方の解は,（定数を足すという操作を除いて）同じ解になっていることがわかる.

(6): $\displaystyle\int \frac{1}{(3+5)^2}\,dx = \int \frac{1}{64}\,dx = \frac{1}{64}x + C.$

(7): $t = x+1$ と置くと，$dt = \dfrac{dt}{dx}dx = dx$ だから，置換積分法により，$\displaystyle\int x\sqrt{x+1}\,dx = \int (t-1)\sqrt{t}\,dt\Big|_{t=x+1} = \int (t^{\frac{3}{2}} - t^{\frac{1}{2}})\,dt\Big|_{t=x+1} = \left(\frac{2}{5}t^{\frac{5}{2}} - \frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}} + C\right)\Big|_{t=x+1}$

$$= \left(\frac{2}{15}t^{\frac{3}{2}}(3t-5) + C\right)\Big|_{t=x+1} = \frac{2}{15}(x+1)^{\frac{3}{2}}(3x-2) + C$$

(8): $t = x^2 - 3x + 4$ と置くと，$dt = \dfrac{dt}{dx}dx = (2x-3)dx$ だから，

$$\int \frac{6x-9}{x^2-3x+4}\,dx = \int \frac{3}{t}\,dt\Big|_{t=x^2-3x+4} = (3\log|t| + C)\Big|_{t=x^2-3x+4} = 3\log|x^2-3x+4| + C.$$

(9): $\displaystyle\frac{x^3-5x^2+4+1}{x^2-5x+6} = x + \frac{-6x+5}{x^2-5x+6} = x + \frac{-6x+5}{(x-2)(x-3)} = x + \frac{7}{x-2} - \frac{13}{x-3}$ だから,

$$\int \frac{x^3-5x^2+4+1}{x^2-5x+6}\,dx = \frac{1}{2}x^2+7\log|x-2|-13\log|x-3|+C = \frac{1}{2}x^2+\log\left|\frac{(x-2)^7}{(x-3)^{13}}\right|+C.$$

(10): 半角の公式から，$\sin^2 x = \dfrac{1-\cos 2x}{2}$ だから，$\displaystyle\int \sin^2 x\,dx = \int \frac{1-\cos 2x}{2}\,dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin 2x + C.$

2. 次の等式が正しいことを確かめてください:

(1) $\displaystyle\int \frac{1}{a^2+x^2}\,dx = \frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{x}{a}+C$ （ただし $a \neq 0$）

(2) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx = \sin^{-1}\frac{x}{a}+C$ （ただし $a \neq 0$）

(3) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\,dx = \log(\sqrt{x^2+1}+x)+C$

(4) $\displaystyle\sqrt{x^2+1}\,dx = \frac{1}{2}(x\sqrt{x^2+1}+\log(\sqrt{x^2+1}+x))+C$

関数 $f(x), F(x)$ に対して，$\displaystyle\int f(x)dx = F(x)+C \Leftrightarrow F(x)$ は $f(x)$ の原始関数 ($\Leftrightarrow F'(x)=f(x)$) だから，(1) ～ (4) の等式を示すには，各等式の右辺を微分した結果が積分記号の中の関数と一致することを確かめればよい．

3. $F(x)$ と $F_1(x)$ を $f(x)$ の原始関数として，$G(x)$ と $G_1(x)$ を $g(x)$ の原始関数とする．このとき，ある定数 C, D をうまく選ぶと，

(1) $\displaystyle\frac{d}{dx}(F(x)G(x)) = f(x)G_1(x)+g(x)F_1(x)+Df(x)+Cg(x)$

(2) $\displaystyle\frac{d}{dx}F(G(x)) = g(x)f(G_1(x)+D)$

が成り立つことを示してください．

$F(x)$ と $F_1(x)$ が両方とも $f(x)$ の原始関数であることから，定数 C をうまく選ぶと $F(x) = F_1(x)+C$ となる．同様に，ある定数 D をうまく選ぶと $G(x) = G_1(x)+D$ となる．$F_1(x)$ は $f(x)$ の原始関数だから，$(F_1)'(x) = f(x)$ で，$G_1(x)$ が $g(x)$ の原始関数であることから，$(G_1)'(x) = g(x)$ である．したがって，C と D を上のように選んだとき，

$$\frac{d}{dx}(F(x)G(x)) = \frac{d}{dx}((F_1(x)+C)(G_1(x)+D)) = \frac{d}{dx}((F_1(x)+C)(G_1(x)+D))$$
$$= \frac{d}{dx}(F_1(x)G_1(x)+DF_1(x)+CG_1(x)+CD) = f(x)G_1(x)+g(x)F_1(x)+Df(x)+Cg(x)$$

$$\frac{d}{dx}F(G(x)) = (F_1(x)+C)'\Big|_{x=G_1(x)+D}(G_1(x)+D)' = g(x)f(G_1(x)+D)$$

(注意): 講義でも何度かこの記法を用いましたが，そこでも説明したように，上では，$式_1\Big|_{x=式_2}$ という表現で， $式_1$ にあらわれる変数 x に $式_2$ で表わされる対象を代入して得られる対象をあらわしています．