

次の課題は、2017年7月20日の補講の時間に実施した演習でカバーできていなかった関数の極値に関する問題です。期末試験では、補講での演習問題と以下の演習問題の類題が(主に)出題される予定です。

---

1. 関数  $f(x, y) = 3x^2 + 5xy + 2y^2 + y + 1$  の極値を求めよ。

2. Lagrange の未定常数法は次のような定理だった:

定理 (Lagrange の未定常数法).  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\varphi : D \rightarrow \mathbb{R}$  を  $\mathbb{R}^2$  の領域  $D$  上の  $C^1$ -級関数として,  $\varphi$  は,

(\*)  $\varphi(x, y) = 0$  となるすべての  $(x, y) \in D$  で,  $\varphi_x(x, y) \neq 0$  または  $\varphi_y(x, y) \neq 0$  のどちらか少なくとも1つを満たす

ものとする. このとき,  $B = \{(x, y) \in D \mid \varphi(x, y) = 0\}$  上で  $f$  が極値をとる点  $(x, y)$  は, 3変数の関数  $L$  を

$$L(x, y, \lambda) = f(x, y) - \lambda\varphi(x, y), \quad (x, y) \in D, \lambda \in \mathbb{R}$$

で定義するとき,

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial \lambda} = 0$$

を満たす.

この定理の証明を与えよ. (ヒント: (\*) と陰関数の定理により,  $\varphi(x, y) = 0$  の各解の近傍で, この等式の解は, ある  $x$  の関数  $\eta$  により,  $(x, \eta(x))$  と表わせるか, あるいは, ある  $y$  の関数  $\zeta$  により,  $(\zeta(y), y)$  と表わせるかのいずれかである.)

3.  $x + y = 4$  の条件の下で,  $f(x, y) = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$  が極値をとる可能性のある点を Lagrange の未定常数法を用いて求めよ.