

次の課題は、2017年7月20日の補講の時間に実施した演習でカバーできていなかった関数の極値に関する問題です。期末試験では、補講での演習問題と以下の演習問題の類題が(主に)出題される予定です。

1. 関数 $f(x, y) = 3x^2 + 5xy + 2y^2 + y + 1$ の極値を求めよ。

2. Lagrange の未定常数法は次のような定理だった:

定理 (Lagrange の未定常数法). $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $\varphi : D \rightarrow \mathbb{R}$ を \mathbb{R}^2 の領域 D 上の C^1 -級関数として, φ は,

(*) $\varphi(x, y) = 0$ となるすべての $(x, y) \in D$ で, $\varphi_x(x, y) \neq 0$ または $\varphi_y(x, y) \neq 0$ のどちらか少なくとも1つを満たす

ものとする. このとき, $B = \{(x, y) \in D \mid \varphi(x, y) = 0\}$ 上で f が極値をとる点 (x, y) は, 3変数の関数 L を

$$L(x, y, \lambda) = f(x, y) - \lambda\varphi(x, y), \quad (x, y) \in D, \lambda \in \mathbb{R}$$

で定義するとき,

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial \lambda} = 0$$

を満たす.

この定理の証明を与えよ. (ヒント: (*) と陰関数の定理により, $\varphi(x, y) = 0$ の各解の近傍で, この等式の解は, ある x の関数 η により, $(x, \eta(x))$ と表わせるか, あるいは, ある y の関数 ζ により, $(\zeta(y), y)$ と表わせるかのいずれかである.)

3. $x + y = 4$ の条件の下で, $f(x, y) = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ が極値をとる可能性のある点を Lagrange の未定常数法を用いて求めよ.