微分積分 1　定期試験 予想問題集

担当:　渕野 昌　　　　**2019 年第 1 クオーター (2019 年 06 月 05 日 21:50 版)**

この問題集は試験の前まで訂正／拡張される可能性があります．試験の直前には問題の解説も付け加える予定です．試験前まで何度かチェックしてみてください．

以下の問題の細部を調節したもののいくつかの類題を，期末試験の基本問題として出題します．これらの問題 (とその背景) を理解しておいてください．

期末試験では，これ以外にも，さらに challenging な問題を 1 題程度出す可能性もあります．

このプリントのファイルは，

`http://fuchino.ddo.jp/kobe/calculus-1-2-1q-pre-final.pdf`

としてダウンロードできます．

$\boxed{\text{I.}}$　x に関する式で与えられた関数 $f : D \to \mathbb{R}$ ，は，何も指定しない場合には，定義域 D はその式が意味を持つような実数の全体とするのだった．この慣習に従って次の問に答えよ．

$f(x) = \sqrt{x+3} + \dfrac{1}{x}$, $g(x) = x^3$ とする．このとき

(a) f の定義域 D は何か?　(b) f は定義域上で連続である．なぜそう言えるか説明せよ．(c) f の導関数 f' を求めよ．　(d) $X = [3,4]$ とするとき，f は X 上で増加関数であることを示せ．$f[X]$ は何か?　(e) g の定義域は何か?　(f) f と g の合成関数 $g \circ f$ を h とするとき，$h(-1)$ を求めよ．

$\boxed{\text{II.}}$　$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を微分可能な関数で，$f[\mathbb{R}] = \mathbb{R}$, $g[\mathbb{R}] = \mathbb{R}$ となるものとする．$f(1) = 2,\ f(2) = 4,\ f(3) = 5\ f'(1) = 4,\ f'(2) = 4,\ f'(3) = 0,\ g(1) = 2,\ g(2) = 4,\ g(4) = 5,\ g(5) = 6,\ g'(1) = -1,\ g'(2) = -2,\ g'(3) = -3$ のとき，次に答えよ．(a) $g \circ g(1)$ は何か?　(b) $g \circ f(1)$ は何か?　(c) f が 1-1 関数なら f は逆関数を持つ．これがなぜかを説明せよ．(d) f が逆関数を持つとして f の逆関数を h とあらわすことにすると $h'(2)$ は何か?　(e) f が逆関数を持つとして，f の逆関数を再び h であらわすことにすると h は 5 で微分可能でない．これはなぜかを説明せよ．　(f) 区間 $(1, 2)$ に含まれる実数 x で $g(x) = \pi$ となるものが少なくとも 1 つは存在する．これが言えるのはなぜかを説明せよ．

$\boxed{\text{III.}}$　(a) $0 < a$ として 等式 $\log a^b = b \log a$ が成り立つことを示せ．
(b) $f(x) = (x^2 - 1)^x$ とするとき，関数 f の定義域は何か?
(c) (b) の関数 f の導関数 f' を求めよ．

$\boxed{\text{IV.}}$　D をある区間として $f : D \to \mathbb{R}$ とする．f に関する以下の主張のうちのいくつかは正しくない．正しくないものを選びそれらの主張の反例を求めよ．正しいものについては，それがなぜ正しいと言えるかを説明せよ．

(a) f が D で連続でないなら，$f[D]$ は区間ではない．

(b) D が閉区間で f は D 上連続なら，$f[D]$ も閉区間になる．

(c) f が D で連続なら，f は D で最大値と最小値をとる．

(d) f が D で微分可能なら，f は D で連続である．

(e) f が D で連続なら，f は D で微分可能である．

(f) D は閉区間で，f は D で微分可能なら，$f'(x) = 0$ となる $x \in D$ が存在する．

(g) $D = [a, b]$ で，f は D 上で C^1-級とする．$a < c < b$ で，$f(a) < f(b)$ かつ $f'(c) < 0$ とするとき，$a < d < b$ で，$f'(d) = 0$ となるものが存在する．

(h) f が 1-1 で D で微分可能なら，f の逆関数 $f^{-1} : f[D] \to D$ が存在して，$f[D]$ で微分可能である．

V. Taylor の定理と $e < 3$ であることを用いて，すべての $n = 2, 3, 4, ...$ について，次の不等式が成り立つことを示せ:

$$1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{(n-1)!} \ < \ e \ < \ 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{(n-1)!} + \frac{3}{n!}.$$

(ヒント．$f(x) = e^x$ とすると $e = f(1)$ であることに留意する．)

VI. 次の定理を平均値の定理 (定理 7.3) を用いて証明してください:

定理． (1) $D \subseteq \mathbb{R}$ を区間として $f : D \to \mathbb{R}$ を D で微分可能で，すべての D の内点 x に対し $f'(x) > 0$ となるとする．このとき，f は D で真に増加である．

(2) $D \subseteq \mathbb{R}$ を区間として $f : D \to \mathbb{R}$ を D で微分可能で，すべての $x \in D$ に対し $f'(x) \geq 0$ となり，すべての D の部分閉区間 $D_0 \subseteq D$ に対し，$x \in D_0$ で $f'(x) = 0$ となるものは，高々有限個しかないとする．このとき，f は D で真に増加である．

解答例，and/or 解説 (ヒント)

$\boxed{\text{I.}}$: (a): $\sqrt{x+3}$ が実数値をとれるのは $x+3 \geq 0 \iff x \geq -3$ のときで，$\dfrac{1}{x}$ が定義されているのは $x \neq 0$ のときである．したがって，$\sqrt{x+3}+\dfrac{1}{x}$ が実数値をとれるのは，x が区間 $[-3,\infty)$ に入っていて $x \neq 0$ のときである．つまり，$x \in [-3,0) \cup (0,\infty)$ のときである．可能な解答は $D = [-3,0) \cup (0,\infty)$ または，$D = \{r \in \mathbb{R} : -3 \leq r$ かつ $r \neq 0\}$ などと書ける．

(b): $f_1 : [-3,\infty) \to \mathbb{R}; x \mapsto \sqrt{x+3}$ は，$g_1 : [0,\infty) \to [-3,\infty); x \mapsto x^2-3$ の逆関数だが，g_1 は，系 4.7 により連続だから，f_1 は定理 5.5 により連続である．$f_2 : (-\infty,0) \cup (0,\infty) \to \mathbb{R}$; $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ も系 4.7 により連続だから，$f = f_1 + f_2$ は定理 4.6 (2) により連続である．

(c): 次を用いると微分の計算ができる ($\sqrt{x+3} = (x+3)^{\frac{1}{2}}$, $\dfrac{1}{x} = x^{-1}$ に留意する):

補題． $a \in \mathbb{R}$ に対し，$f : [0,\infty) \to \mathbb{R}; x \mapsto x^a$ とすると，f は $[0,\infty)$ で微分可能で，$f'(x) = ax^{a-1}$ である

証明． f が微分可能であることは，

(†) $f(x^a) = e^{a \log x}$

となることから，合成関数の微分法 (定理 6.4) によりよい．$f'(x)$ 計算も (†) と合成関数の微分法により示せるが，ここでは，対数関数との合成関数を考える，という講義でも何度か使ったテクニックで計算してみる: $g(x) = \log(f(x))$ とすると，合成関数の微分法 (定理 6.4) により $g'(x) = \dfrac{1}{f(x)} \cdot f'(x) = \dfrac{1}{x^a} \cdot f'(x)$ である．一方 $g(x) = a \log x$ だから，$g'(x) = \dfrac{a}{x}$．したがって，$\dfrac{1}{x^a} \cdot f'(x) = \dfrac{a}{x}$ により，$f'(x) = ax^{a-1}$ である． (q.e.d.)

(d): $\boxed{\text{VI.}}$, (1) を用いる．以下略．

$\boxed{\text{II.}}$: (f): g は仮定により微分可能なので，定理 6.1 により連続である．したがって，中間値の定理 (定理 5.2) により，$f(x)$ は区間 (a,b) で $f(1) = 2$ と $f(2) = 4$ の間のすべての値をとる．特に $2 \leq \pi \leq 4$ だから，$x \in [a,b])$ で，$f(x) = \pi$ となるものが少なくとも一つは存在するが，x は a でも b でもありえないから，$x \in (a,b)$ である．

$\boxed{\text{III.}}$: (a): 関数

$\mathbb{R} \ni x \mapsto e^x \in \mathbb{R}$ は 1-1 だから，$e^{\log(a^b)} = e^{b \log a}$ が示せればよい．$\mathbb{R} \ni x \mapsto e^x \in \mathbb{R}$ と $(0,\infty) \ni x \mapsto \log(x) \in \mathbb{R}$ は互いに逆関数であることから，

$e^{\log(a^b)} = a^b = (e^{(\log a)})^b = e^{b \log a}$

である．

$\boxed{\text{IV.}}$: (a) から (h) までで正しい主張は，(b), (d), (g) で，他の主張にはすべて反例が容易に見つかる．

(d) は講義での定理 6.1 である．

(b) は，次のように示せる: D が閉区間で，f が連続なら，定理 5.1 により f は最大値 M と最小値 m をとる．最大値，最小値の定義から，$f[D] \subseteq [m,M]$ で，$M, m \in f[D]$ だが，中間値の定理 (定理 5.2) により f は m と M の間のどの値もとるから，$f[D] = [m,M]$ である．

(g) は次のように示せる: $f(a) < f(b)$ により，平均値定理 (系 7.3) により，$c' \in (a,b)$ で，$f'(c') > 0$ となるものがある．f は C^1-級だから，f' は連続なので，f' に中間値の定理 (定理 5.2) を適用すると，c と c' の間のある d で $f'(d) = 0$ となるものがあることが帰結できる．