微分積分 2　演習問題

担当:　渕野 昌 (Sakaé Fuchino)　　　　2019 年 7 月 11 日

1. 関数 $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R};\ (x, y) \mapsto x^2 + y^2$ を考える．

(1) 関数 f のグラフ $z = f(x, y)$ を図示せよ．

(2) 関数 f が平面上の各点 (a, b) で全微分可能であることを示せ．

(3) 関数 f のグラフ $z = f(x, y)$ の各点 (a, b) における接平面を求めよ．

2. D を $\mathbb{R}^2$ の領域として，D は $[-1, 1] \times [-1, 1] = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x, y \in [-1, 1]\}$ を含むものとする．$f : D \to \mathbb{R}$ を D 上で偏微分可能な関数で，f_x, f_y は D 上で連続とする．$\varphi(t) = \cos t$, $\psi(t) = \sin t$ とするとき，$\dfrac{d}{dt} f(\varphi(t), \psi(t))$ を求めよ．

3. 関数 $f(x, y)$ を 点 (a, b) の近傍で，C^3-級 (3 回偏微分可能で 3 回偏微分の結果がすべて連続) とする．このとき，ある定数 h, k に対して，$f^*(t) = f(a + ht, b + kt)$ とする．このとき，$\dfrac{d}{dt} f^*$, $\dfrac{d^2}{dt^2} f^*$, $\dfrac{d^3}{dt^3} f^*$ を求めよ．(注意: 教科書では $f^*(t)$ を $f(t)$ と同じ記号 f を用いて表わしているが，19 世紀ごろの数学では教科書でのような記号の使い方が標準である．)