Forcing 入門

渕野 昌 (Sakaé Fuchino)
fuchino@diamond.kobe-u.ac.jp

主な更新日: 16.07.05(火 09:07(JST)) 16.04.11(月 10:52(JST)) 15.10.07(水 07:53(JST)) 15.07.19(日) 15.05.17(日)

2017 年 03 月 20 日 (08:46) 版

目 次

以下は，2015 年度神戸大学システム情報学研究科で開講の「数理論理学特論」の講義録に手を入れたものである．このテキストの著者は，2015 年度後期 (10 月 19 日~ 10 月 23 日) に東京大学数理科学研究科にて，強制法に関する集中講義を行なった．この集中講義で想定した予備知識は，以下のテキストの完成版の内容のサブセットになる予定で，そこでも，このテキストを受講者が目を通すべき参考資料の一つとして指定した．

そのような事情もあり，講義録とは言っても，講義で行った記述の更なる改良のために，そこでとは若干異なる定義の仕方をしていたり，証明や説明の道筋を変えている場所もある．また，講義では十分な時間がとれずに省いた内容も多く含まれている．

著者は 2016 年の「数理論理学特論」の講義でも同様のテーマについての講義を行なっており，このテキストもこの講義に由来する拡張／補足を行なっている．

現在，このテキストの著者は 「強制法 — 現代集合論入門」(仮題，東大出版会から出版予定) の執筆準備を進めているところであるが，本テキストは，この本の前半の部分の下書きとして再利用される予定である．

本稿はまだ未完の部分を多く含み，Forcing 入門と言いながら forcing についての記述のところまで至っていない．Forcing の理論のあらましについては，上で述べた 2015 年の神戸大学での講義の資料として作成した “An outline of independence proofs by forcing” (`http://fuchino.ddo.jp/kobe/forcing-ss15-outline.pdf`) も参照されたい．

本テキストや上のテキストに関するコメントや改良のアイデア，間違いの指摘等を歓迎する．

Part I
集合論と論理学

1　素朴公理的集合論

naive-axiomatic

本節では，まず，集合論の公理系を，通常の数学での言葉遣いで導入する．このような立場での集合論を，ここでは「**素朴公理的集合論**」とよぶことにする．

集合論は (既存のあるいは未来の) 数学のすべてがその中で展開できる (べき) 体系であるため，以下で見るように，その公理化では，“(数学で現れる) 性質のすべてに対して … が成り立つ”，という形の公理を導入する必要が生じてくる (以下の「分離公理」，および，「置換公理」を参照)．集合論の中で古典的な数学を展開するためには，この「(数学で現れる) 性質のすべて」が何かが確定していないことは，それほど大きな障害にはならないようにも思える，しかし，集合論の無矛盾性や公理系の間の依存関係，更に後に議論することになるような，数学的命題の集合論の公理系からの独立について論じようとするときには，この「(数学で現れる) 性質のすべて」を厳密に規定しておくことが必須となる．

このために最終的には次のような方策をとる: 集合論の公理系を (数理論理学の意味での) 述語論理の枠組の中で形式的に記述することにして， (数学で現れる性質をすべて含む) 「集合論の体系で扱うことのできる性質」とは，そこでの述語論理の論理式のことである，と規定することで，述語論理での無限個の公理の集まりとして集合論の公理系を厳密に導入する．

このような形式的な体系での公理系の記述に必要となる述語論理の基礎を，次の第 3 節で考察し，本節での素朴公理的集合論の公理系を，この論理体系で再記述する．

以下の公理を集めてできる公理系は**選択公理付きのツェルメロ・フレンケル素朴集合論**

の公理系とよばれる．この名称は，通常，英語でのこの名称の頭文字をとって ZFC と略記される．ZFC のすべての公理は，基本的な非論理記号としては，2 変数の関係記号，‘$\in$’ と ‘$=$’ のみを含むものになっている．

“$x \in y$”, “$x = y$” はそれぞれ 「(集合) x は (集合) y の要素である」,「(集合) x と (集合) y は等しい」ということを表わすものと “解釈” する．ここで，“(集合)” と括弧 () に入れて書いたのは，集合論では,「すべての対象物は集合である」と仮定して議論するため，“集合である” という述語は必要にならないからである．以下，たとえば「すべての x に対して…」と言ったときには，想定している “意味” は「すべての集合 x に対して…」である．

またここで “解釈”，“意味” と “ ” つきで書いているのは，ここで持ち出した，“集合”，“要素である”，“等しい” といった，我々が理解している (と錯覚している) 概念は，公理系の公理を読み下すときの (心理的な) 理解の助けとして言っているにすぎないからである．我々がここで行なおうとしているのは，全ての数学的理論を展開することのできる枠組としての集合論であり，そうであるからには，(数学的前提の) 何もないところに，集合の理論を確立する必要がある．したがって，記号列 “$x \in y$”, “$x = y$” がここで持つことになる意味は，以下の公理が規定する性質の総体以外のものではあり得ない．

以上の注意にも関わらず，多くの場所で，直観的な理解の助けとするために，たとえば，“ある x が存在して …” と書くところで，“ある集合 x が存在して …” という書き方をしているところもある[1]．

ZFC の公理系に属す最初の公理は，集合がその要素によって一意に決まることを主張する次のものである:

(外延性公理) すべての x, y に対し，$x = y$ となるのは，すべての z に対して，$z \in x$ と $z \in y$ が同値になる丁度そのときである．

同等性 “$=$” は論理で規定された概念と考えることが多いのだが，集合論では，外延性公理が同等性を規定している，と考えることもできる．

exerc-0

演習問題 1.1 外延性公理を “$=$” の定義と解釈するとき，“$=$” は推移律，対称律，反射律を満たす．つまり:

(1.1)　すべての x, y, z に対し，$x = y$ かつ $y = z$ なら $x = z$ が成り立つ;

(1.2)　すべての x, y に対し，$x = y$ なら $y = x$ が成り立つ;

(1.3)　すべての x に対し，$x = x$

---

[1] 後に，第 5 節で “クラス” という用語を導入することになる．これは，単に (集合に関する)“性質” ということの言い換えに過ぎないものだが，クラスを集合の一般化のようなものとして扱かうことになるため，それとの区別をする必要が生じた段階では，“集合 x” と言って x が (集合でない可能性のあるクラスでなく) 集合であることを指定する必要が出てくることもある．

集合論の立場では，すべての集合の要素はまた集合であるが，ある集合が集合の集まりになっている，という事実を強調する必要があるときには，“ある集合 x が存在して …” ではなく，敢て “ある集合族 x が存在して …” という書き方をすることすらある．

が成り立つことが証明できる．

(空集合公理) すべての y に対し，$y \notin x$ となるような x が存在する．

“$y \notin x$” は，“$y \in x$ でない” の略記である．空集合公理で存在の保証されている x は，外延性公理により一意に決まることがわかる．そこでこの一意に決まる x のことを，‘$\emptyset$’ という記号で表わすことにする．ここでは，これは単なる省略記号として扱かうことにして，たとえば，“$\emptyset \in y$” と書いたときには，これは，

(1.4) $x \in y$ で，すべての z に対し，$z \notin x$ となるようなものが存在する

という主張の略記だと思うことにする．

(対の公理) 任意の x, y に対し，z で，すべての u に対し，$u \in z$ と $(u = x$ または $u = y)$ とが同値になるようなものが存在する．

外延性公理により，任意の x と y に対し，対の公理が存在を主張しているような z は一意に決まる．そこで，この集合のことを $\{x,y\}$ と書くことにする．$x = y$ が成り立つときには，すべての u に対し，$u \in z$ と $u = x$ (または $u = y$) が同値になるが，このようなとき z を $\{x\}$ (または $\{y\}$) と書くことにする．ここでも，空集合の記号のときと同じように導入された記号 “$\{\cdots\}$” は略記と理解され，この記号が具体的な主張で現れたときには，それは非論理記号としては $\in$ と $=$ のみを含む主張に書きなおすことができる．以下で導入される他の記号についても同様の扱いをすることにする．

$\{x\}$ は**シングルトン** x と読み下されることが多い[(2)]． シングルトン x は一般には x とは異なる: たとえば，空集合の定義から，$\emptyset \notin \emptyset$ だが，$\emptyset \in \{\emptyset\}$ だから，$\emptyset \neq \{\emptyset\}$ である[(3)]．

「すべての対象物は集合である」という立場からは，すべての集合の要素はまた集合となるので，集合と「集合族」の間の区別は存在しない．それにもかかわらず，以下では，主張の内容の理解を容易にするため，ある (集合) $\mathcal{F}$ について，単に「$\mathcal{F}$」 と言わず，あえて余分な形容を加えて,「集合族 $\mathcal{F}$」 と言って，$\mathcal{F}$ をそこで「要素が集合であるような集合」という見方で捉えようとしていることを強調することがある．以下の公理での x はそのような意味での「集合族」である[(4)]．

(和集合の公理) 任意の x に対して，y で，すべての z に対して，$z \in y$ となることと，ある $u \in x$ に対し $z \in u$ となることとが同値になるようなものが存在する．

各 x に対し，y は外延性公理により一意に定まる．このような y を $\bigcup x$ と表わすことにする．$x = \{u, v\}$ のときには，$\bigcup x$ を $u \cup v$ とも書くことにする．

(1.5) すべての z に対し，$z \in u \cup v$ は，$(z \in u$ または $z \in v)$ と同値

(2) シングルトン (singleton) はトランプゲームでの手持ちのカードで組札のないものを指す言葉である．

(3) 後出の基礎の公理の下では，すべての x について $x \neq \{x\}$ となることが証明できる．

(4) 既に前に注意したように，同様の理由から，ある x について単に「x」と言わず，あえて余分な形容を加えて,「集合 x」と言うこともある．

である．対の公理と和集合の公理を組み合わせることにより，すべての正の数 $\mathtt{n}$ に対し，

(1.6) すべての $x_0, x_1, \ldots, x_{\mathtt{n}-1}$ に対し，z で，すべての u に対し，$u \in z$ と ($u = x_0$ または $u = x_1$ または ,..., または $u = x_{\mathtt{n}-1}$) が同値になるものが存在する

ことが示せる．たとえば，$n = 3$ のときには，$z = \bigcup\{\{x_0, x_1\}, \{x_2\}\}$ とすればよい[5]．

次の公理での「**確定的な性質**」が何かについては，今の段階 (素朴公理的集合論) では明確に確定できない．ここでは，これはとりあえず，“具体的に記述することのできる集合に関する性質” というような直観で理解しておくことにする．

(分離公理) すべての確定的な性質 $\varphi(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ と，$a_0, a_1, \ldots, a_n$ に対し，x で，すべての u に対し，$u \in x$ となることと ($u \in a_0$ かつ $\varphi(u, a_1, \ldots, a_n)$ が成り立つ) ことが同値になるようなものが存在する．

外延性公理により，確定的な性質 $\varphi(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ を固定したときに，各 $a_0, a_1, \ldots, a_n$ に対し，分離公理でのような x は一意に確定する．このような，x を

(1.7) $\{u \in a_0 : u$ は $\varphi(u, a_1, \ldots, a_n)$ を満たす$\}$

あるいは，もっと簡略化して $\{u \in a_0 : \varphi(u, a_1, \ldots, a_n)\}$ と表わすことにする．

exerc-1

演習問題 1.2 (1) 任意の x, y に対し，z で，すべての u に対し，$u \in z$ であることと ($u \in x$ かつ $u \notin y$) が同値になるようなものが存在することを分離公理を用いて示せ．このような z は x と y の**差集合**とよばれ，$x \setminus y$ で表される．

(2) 任意の $\emptyset$ と異なる x に対して，y で，すべての u に対し，$u \in y$ であることと $u \in z$ がすべての $z \in x$ に対して成り立つことが同値になるようなものが存在する．このような y は x の**共通部分**とよばれ，$\bigcap x$ で表される．特に，$x = \{u, v\}$ のときには，$\bigcap x$ は $u \cap v$ とも表される．

(3) 任意の確定的な性質 $\varphi(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ と $a_1, \ldots, a_n$ で，$\varphi(b, a_0, \ldots, a_n)$ となるような b が少なくとも 1 つは存在するようなものに対し， y で，すべての u に対し，$u \in y$ となることと，すべての $\varphi(b, a_1, \ldots, a_n)$ となる b に対して $u \in b$ となることが同値になるようなものが存在する．このような y は $\bigcap\{x : \varphi(x, a_1, \ldots, a_n)\}$ とも表される．

次の公理は無限個の要素を持つ集合が (少なくとも 1 つは) 存在することを主張するものになっている．無限個の要素を持つ集合としては，他のものの存在の主張を公理として採用することも考えられるが，以下の形の主張を選んでいる理由は，公理の直後に述べることから明らかになる．

---

[5] これは，今，考察している公理系を述語論理の上でより精密に再記述したときに明確になることであるが，ここで “すべての正の数 $\mathtt{n}$ に対し” と言っているのは，超数学での一つ一つの具体的な数という意味での “すべての正の数” であり，これから集合論の内部で定義しようとしている自然数の概念をここで使ってしまっている，という悪循環が起っているわけではない．

(無限公理) 集合 x で，$\emptyset \in x$ かつ，すべての $u \in x$ に対し，$u \cup \{u\} \in x$ となるようなものが存在する．

この公理での x は一意ではない: たとえば，x が公理の条件を満たすような集合だとすると，$s(x)$ で集合 x に対し，$x \cup \{x\}$ をとる演算を表すことにして，y を x の要素でないような任意の集合として，$x' = x \cup \{y, s(y), s^2(y), s^3(y), ...\}$ とすると，$x \neq x'$ だが x' も公理の条件を満たす(6)．

現代の数学では，通常数 0, 1, 2, 3,... をそれぞれ

$$
\begin{aligned}
(1.8)\qquad & \emptyset,\\
& \emptyset \cup \{\emptyset\} = \{\emptyset\},\\
& \{\emptyset\} \cup \{\{\emptyset\}\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}\},\\
& \{\emptyset, \{\emptyset\}\} \cup \{\{\emptyset, \{\emptyset\}\}\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}, ...
\end{aligned}
$$

のこととする(7)．したがって，上の無限公理は，0, 1, 2, 3,... $\in x$ を主張するものになっている．第 9 節で見ることになるように，このように導入される自然数 n は，次の性質で特徴付けられる(8)：

(i) n は**推移的**である，つまり，n の要素の要素は必ず n の要素となる．

(ii) $\in$ は n の要素の線形順序となっており，n の空でない任意の部分集合は $\in$ に関する最小元を持つ．

(iii) $\emptyset$ を除く n のすべての要素は $\in$ に関する直前の (n の) 要素を持つ．

この性質をたとえば $\psi(n)$ と書くことにして，x を無限公理でのような集合とすると，(分離公理がその存在を保証するところの) $\{n \in x : \psi(n)\}$ は x の選び方によらず一意に決まる．そこで，この集合を ω で表わすことにする(9)．ω は自然数の全体の集合 (とみなすことのできるもの) である．実際，ω 上の関数 $n \mapsto n \cup \{n\}$ を "次の数をとる関数"s として導入すると(10)，(ω, s) はペアノが自然数の全体の満たすべき性質としてあげているものをすべて満たす．したがって，集合論の中で，たとえばデデキント [2] でのようにして，自然数の理論を展開することができるようになる．これに対し，実数論や実関数論を含む解析学を集合論の中で展開するには，次の幂集合公理，あるいは少なくともこの公理の何らかの部分が必要になる．

---

(6) 実は，この説明では，循環が起ってしまっている，$x' = x \cup \{y, s(y), s^2(y), s^3(y), ...\}$ を厳密に導入するためには，以下で導入する ω が必要になるからである．

(7) 一般には，n が (集合として) 定義されたとき，$n+1$ を $n \cup \{n\}$ のこととして定義する．これにより，各 n は集合 $\{0, 1, ..., n-1\}$ となる．この定義の仕方は von Neummann [6] による．自然数のこの定義の長所は，1 つには各 n は n 個の要素を持つ "標準的" な集合になっていると看倣せることであり，もう 1 つにはこの定義が第 9 節で見ることになるように (超限) 順序数の定義に自然につながることである．

(8) 後で見るように，以下の条件から (iii) を除いたものが超限順序数の定義となる．

(9) 通常の数学では，この集合に対し $\mathbb{N}$ の記号を使うことも多いが，集合論では，この自然数の全体の集合を特に無限順序数としてとらえるとき，$\mathbb{N}$ でなく ω (ギリシャ文字のオメガ) をあてることが多い．

(10) 関数の集合論での扱いについては，以下で述べる．

演習問題 1.3 $\omega = \bigcap\{w : \emptyset \in w$ ですべての $u \in w$ に対し $u \cup \{u\} \in w\}$ exerc-1-0
である (演習問題 1.2, (3) を参照).

「すべての u に対し，$u \in y$ なら $u \in x$ である」が成り立つとき，y を x の**部分集合**とよび，このことを $y \subseteq x$ と表わすことにする．この言い方を使うと，外延性公理は，$x = y$ と ($y \subseteq x$ かつ $x \subseteq y$) が同値であることを主張しいてる公理とも読むことができる．すべての集合 x に対し，$\emptyset \subseteq x$ と $x \subseteq x$ は常に成り立つ． $x \subseteq y$ だが $x = y$ でないとき，これを $x \subsetneq y$ で表わす.

(冪集合公理) すべての x に対し，集合 z で，すべての y に対し $y \in z$ と $y \subseteq x$ とが同値になるようなものが存在する.

すべての x に対し一意に決まる上のような z を，x 上の**冪集合** (べきしゅうごう) とよび，$\mathcal{P}(x)$ で表わす.

演習問題 1.4 すべての x に対し，$\emptyset \in \mathcal{P}(x)$ かつ $x \in \mathcal{P}(x)$ である. exerc-2

対の公理を用いると，次のようなトリックによって x と y の順序対 (として扱かうことのできる集合) を導入することができる: 任意の x, y に対し，$\{\{x\}, \{x, y\}\}$ を x と y の**順序対**とよび，$\langle x, y\rangle$ と表わす．この定義は恣意的ではあるが，この定義により，次が成り立つ **(演習)** ので，$\langle x, y\rangle$ は “x と y の順序対” の概念の満たすべき性質を備えていることがわかる:

演習問題 1.5

(1.9) すべての x, y, x', y' に対し，$\langle x, y\rangle = \langle x', y'\rangle$ と ($x = x'$ かつ $y = y'$) は同値である. pair-0

この順序対の概念を用いると，集合 x と y の直積集合を次のように定義することができる: 集合 z は，性質「すべての u に対し，$u \in z$ と，ある $v \in x, w \in y$ に対し，$u = \langle v, w\rangle$ となることが同値になる」を満たすとき x と y の**直積集合**である，と言い，このような z を $x \times y$ で表わす．$x \times x$ は x^2 とも書くことにする.

x と y の直積集合は，存在すれば一意であることは明らかだが，その存在を示すには若干の工夫が必要になる．まず，$u, v \in z$ なら，$\{u\}$, $\{u, v\} \in \mathcal{P}(z)$ となることに留意すると，$\langle u, v\rangle \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(z))$ が成り立つことがわかる．これを用いると，

(1.10) $x \times y = \{u \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(x \cup y))$: ある $v \in x, w \in y$ に対し $u = \langle v, w\rangle$ となる $\}$

となるが，右辺の表現は，分離公理 (及び冪集合公理と和の公理) により，存在の保証された対象物を表わす．したがって

補題 1.6 すべての x, y に対し，$z = x \times y$ となる z が存在する.

x と y に対し，f が x から y への関数である，ということを，f が (関数の) グラフであることとして定義する．つまり，f が x から y への**関数**であるとは，

(1.11) $f \subseteq x \times y$ で，各 $u \in x$ に対し，$v \in y$ で $\langle u, v\rangle \in f$ となるものが，ちょうど 1 つ存在する d-function

こととする．この状況を $f : x \to y$ で表わすことにする．$f : x \to y$ のとき，$u \in x$ に対し，$\langle u, v\rangle \in f$ となるただ 1 つの $v \in y$ のことを $f(u)$ で表わし，f の u での**値**とよぶ．f が x から，ある y への関数であるとき y への言及を落として，"f は x 上の関数である" という言い方もすることにする．関数 $f : x \to y$ は x の要素を添字とする集合の列と捉えることもできる．こう捉えたときの f を $\langle f(i) : i \in x\rangle$ とあらわすこともある．

function-0

演習問題 1.7 (1) 任意の集合 x に対し，$\emptyset : \emptyset \to x$ である．

(2) 任意の集合 x に対し，$id_x = \{\langle u, u\rangle \in x^2 : u \in x\}$ とすると，$id_x : x \to x$ で，すべての $u \in x$ に対し，$id_x(u) = u$ となる．

(3) 任意の x, y と $v^* \in y$ に対し，$c_{v^*} = \{\langle u, v^*\rangle \in x \times y : u \in x\}$ とすると，$c_{v^*} : x \to y$ で，すべての $u \in x$ に対し $c_{v^*}(u) = v^*$ である．

上の演習問題 1.7, (2) での id_x を x 上の**恒等写像**とよぶ．$x \subseteq y$ なら，$id_x : x \to y$ と見ることもできるが，このように見たとき，id_x は x の y への**自然な埋め込み**であるという．

演習問題 1.7, (3) での c_{v^*} は，値 v^* をとる x 上の**定数関数**とよばれる．

exerc-2-0

演習問題 1.8 $s : \omega \to \omega$ を $n \mapsto n \cup \{n\}$ で定義でき，以下が成り立つ:

(i) すべての $n \in \omega \setminus \{\emptyset\}$ に対し，$s(m) = n$ となるような $m \in \omega$ が存在する．

(ii) すべての $n, n' \in \omega$ に対し，$s(n) = s(n')$ なら，$n = n'$ である．

(iii) すべての $X \subseteq \omega$ に対し，$\emptyset \in X$ で X が s に関して閉じているなら，$X = \omega$ である．

exerc-2-0-0

演習問題 1.9 演習問題 1.8 での関数 s を用いると，$l, m, n \in \omega$ に対して，通常の数の足し算やかけ算に対応する集合 $A = \{\langle\langle l, m\rangle, n\rangle : l, m, n \in \omega,$ "$l+m = n$"$\}$, $M = \{\langle\langle l, m\rangle, n\rangle : l, m, n \in \omega,$ "$l \cdot m = n$"$\}$ が定義できる (これは，第 2 節で考察することになる，ω 上の関数の帰納的定義の一般論の特別な場合として容易に実現することができるが，この演習問題は，読者がそれを直接的，発見的に検証することを促すものである)．

演習問題 1.10

(1) すべての x, y に対し，z で $z = \{f : f : x \to y\}$ となるものが存在する(11)．このような z を ${}^{x}y$ で表わす．つまり， exerc-2-1

(1.12) ${}^{x}y = \{f : f : x \to y\}$ exerc-2-1-0

(11) "$z = \{f : f : x \to y\}$" は,「すべての f に対し，$f \in z$ と $f : x \to y$ は同値である」という主張をあらわす．したがって，"z で $z = \{f : f : x \to y\}$ となるものが存在する" は,「すべての f に対し，$f \in z$ と $f : x \to y$ が同値であるような z が存在する」という主張である．

である．

（2）すべての y に対し，${}^{\emptyset}y = \{\emptyset\}$ である.

（3）すべての x, y に対し，($x = \emptyset$ または $y \neq \emptyset$) なら，${}^{x}y \neq \emptyset$ である．

（4）$r \subseteq x^2$ が x 上の**同値関係**であるとは，すべての $u, v, w \in x$ に対し (i) $\langle v,v\rangle \in r$ (反射律); (ii) $\langle u,v\rangle \in r$ なら $\langle v,u\rangle \in r$ (対称律); (iii) $\langle u,v\rangle \in r$ かつ $\langle v,w\rangle \in r$ なら，$\langle u,w\rangle \in r$ (推移律) が成り立つことである[12]．

r が x 上の同値関係のとき，$u \subseteq x$ が r の**同値類**であるとは，(iv) すべての $a, b \in u$ に対し，$\langle a,b\rangle \in r$ で，(v) すべての $a \in u$ と $c \in x \setminus u$ に対し，$\langle a,c\rangle \notin r$ となることである．すべての x と x 上の同値関係 r に対し，z で，$z = \{u : u$ は r の同値類である $\}$ となるものが存在する．このような z を x/r で表わす．$\bigcup x/r = x$ である．また，任意の異なる $u, v \in x/r$ に対し，$u \cap v = \emptyset$ である．

上の演習問題 1.10, (4) により，$r \subseteq x^2$ が x 上の同値関係のとき，任意の $s \in x$ に対し，$s \in u$ となるような x の同値類 $u \subseteq x$ が一意に存在するが，この同値類を $[s]_r$ 表わす．

任意の f に対し (f は関数でなくてもよい)，f の**定義域**と**値域**を，それぞれ

(1.13)　$\mathrm{dom}(f) = \{u :$ ある v に対し $\langle u,v\rangle \in f\};$

(1.14)　$\mathrm{range}(f) = \{v :$ ある u に対し $\langle u,v\rangle \in f\}$

により定義する．任意の x に対し，x の f による**像**と，f の x への**制限**を，それぞれ

(1.15)　$f''x = \{v :$ ある $u \in x$ に対し $\langle u,v\rangle \in f\};$

(1.16)　$f \restriction x = \{\langle u,v\rangle : u \in x, \langle u,v\rangle \in f\}$

とする．$\mathrm{range}(f) = f''(\mathrm{dom}(f))$ である．$f''x$ は $f[x]$ という記号で表されることも多い．集合論を積極的に用いない数学では，集合族を常に大文字で書くという記号の使い方をして $f(X)$ で $f''X$ を表す，という記号の使い方をすることも多いが，集合論では，集合族と集合の区別をつけない議論が必要になることが多く，この記法では関数の値 $f(X)$ と区別がつけられないため具合が悪い．

exerc-3

演習問題 1.11　（1）すべての $n \in \omega$ に対し，$n \subseteq \omega$ となる．

（2）すべての $n \in \omega$ と $p : n \to x$ に対し，$p \in \mathcal{P}(\omega \times x)$ となる．

（3）すべての f に対し，$\mathrm{dom}(f)$ も $\mathrm{range}(f)$ も存在する．$f : x \to y$ なら，$\mathrm{dom}(f) = x$, $\mathrm{range}(f) \subseteq y$ である．

（3）すべての f, x に対し，$f''x$, $f \restriction u$ は存在する．$\mathrm{dom}(f \restriction x) = \mathrm{dom}(f) \cap x$ で，$f''x = \mathrm{range}(f \restriction x)$ である．

---

[12] $r \subseteq x^2$ を関係として見るときには，$\langle u,v\rangle \in r$ を，$u\ r\ v$ とも書くことにする．この書き方を用いると，反射律，対称律，推移律は，それぞれ，すべての $u, v \in x$ に対し，$v\ r\ v$ である; すべての $u, v, w \in x$ に対し，$u\ r\ v$ なら $v\ r\ u$ である; すべての u, v に対し $u\ r\ v$ かつ $v\ r\ w$ なら，$u\ r\ w$ である，という主張である．

ある x, y に対して $f : x \to y$ のとき，$\mathrm{dom}(f) = y$ となるとき，f は x から y への**上射**である，または，f から y の**上への関数**である，いう．すべての異なる $u, v \in x$ に対し，$f(u) \neq f(v)$ となるとき f は**単射**である，または，f は $1-1$ **関数**である，という．f が上射かつ単射のときには，f は**上単射**である，という．

上のいくつかの演習問題で用意した道具立てを用いると，[1] で述べられているような筋書をなぞることで，集合論の中で実数体 $\mathbb{R}$ を構成することができる．実数体の構成 !!!!

順序対を使って，三つ組，四つ組 etc. を，

(1.17) すべての x_0, x_1, x_2, x_3 に対し，

$$\langle x_0, x_1, x_2\rangle = \langle x_0, \langle x_1, x_2\rangle\rangle;$$
$$\langle x_0, x_1, x_2, x_3\rangle = \langle x_0, \langle x_1, x_2, x_3\rangle\rangle$$

などとすることにより導入できる．このとき，このように導入した三つ組，四つ組 etc. が (1.9) に対応する一意性の性質を満たすことが確かめられる．しかし，n-組を，このようにして導入すると，ここでの n は集合論の外側の (超数学での) 数とならざるを得ず，たとえば，$\{\mathbf{a} : \mathbf{a}$ はある $n \in \omega$ に対する x の要素の n-組 $\}$ というような集合は，このやり方では導入できない．そこで，$n \in \omega$ に対し p が n-組である，ということを，p は n 上の関数である，つまり，$p : n \to \mathrm{range}(p)$ となること，として定義しなおす．$\mathtt{n}$ を (超数学での) 具体的な数とするとき $\mathtt{n}$-組 p は $\langle p(0), p(1), ..., p(\mathtt{n}-1)\rangle$ という組と同一視することができる．この捉え方では，x の要素の $\mathtt{n}$-組の全体からなる集合 $x^{\mathtt{n}}$ は n から X への関数の全体 ${}^n x$ と同じ集合である．そこで，$n \in \omega$ に対し，X の要素の n-組の全体の集合 X^n を

(1.18) $X^n = \{f : f : n \to X\}\ \ (= {}^n X)$ pair-0-0

とし，先程の「ある $n \in \omega$ に対する x の要素の n-組の全体」$X^{<\omega}$ を

(1.19) $X^{<\omega} = \{p : p$ はある $n \in \omega$ に対する x の要素の n-組 $\} = \bigcup\{{}^n X : n \in \omega\}$ pair-1

として導入する．$X^{<\omega}$ を関数の集合として見るときには，これを ${}^{\omega>}X$ とも表わすことにする．

exerc-3-0

演習問題 1.12 (1) 任意の集合 X に対し，$X^0 = \{\emptyset\}$ である．

(2) 任意の集合 X に対し，集合 $X^{<\omega}$ は実際に存在する．

演習問題 1.12, (1)により，任意の集合 X, Y に対し，${}^{X^0}Y = \{\{\emptyset, y\} : y \in Y\}$ となるので，各 $f \in {}^{X^0}Y$ は $f(\emptyset)$ と同一視できるものとなることに注意しておく．

r を x の上の同値関係とする．x 上の関数，$f : x^n \to x$ に対し，r が**合同関係**であるとは，任意の $a_0, ..., a_{n-1}, b_0, ..., b_{n-1}$ に対し，

(1.20) $a_0\ r\ b_0, ..., a_{n-1}\ r\ b_{n-1}$ なら，$f(a_0, ..., a_{n-1})\ r\ f(b_0, ..., a_{n-1})$ が成り立つ

ことである．　⟦Some paragraphs are missing here; they will be written later.⟧　!!!

(1.11) で定義した関数の概念を用いると，選択公理 (Axiom of Choice) とよばれる次の公理を定式化することが可能になる．

(選択公理, AC)　任意の x に対し，$\emptyset \notin x$ なら，$f : x \rightarrow \bigcup x$ で，すべての $u \in x$ に対し，$f(u) \in u$ となるものが存在する．

これまでの他の公理とは異なり，この公理で存在の保証される f は x から一意に定まらない．このことが，選択公理 (AC) に他の公理とは異なるステータスを与えている．ここで導入しつつある公理系は ZFC (Zermelo-Fraenkel Axiom System with Axiom of Choice) とよばれることになるのだが，この名称で体系が選択公理を加えたものであることが明示されているのも，この AC のこの特異なステータスによるものである．現代の数学では，通常，選択公理が縦横に用いられている．また???で示すことになるように，AC を集合論の他の公理に付け加えた体系は，集合論の他の公理からなる体系上無矛盾である．本書では，ごく一部の議論を除くと，選択公理を常に仮定する．　???

上で与えられた公理からなる公理系は，ツェルメロが [7] で導入した公理系に対応するものになっている(13)．

以上の公理で，古典的な数学に関する議論はほとんどすべて展開できるが，現代的な数学，特にカントルの超限順序数や基数の理論を含む数学や，そのような数学のその後の発展を集合論の公理系の中で展開するためには，更に以下の 2 つの公理が必要となる．

(置換公理)　すべての確定的な性質 $\varphi(x, y, x_1, ..., x_n)$ と，$a_0, a_1, ..., a_n$ に対し，すべての $u \in a_0$ に対し，$\varphi(u, v, a_1, ..., a_n)$ となる v が一意に存在するなら，すべての v に対し，$v \in w$ と $\varphi(u, v, a_1, ..., a_n)$ となるような u が存在することが同値となるような w が存在する．

上のような w は (一意性の条件件が成り立つなら) $a_0, a_1, ..., a_n$ に対し一意に存在するので，これを，$\{v$: ある $u \in a_0$ に対し $\varphi(u, v, a_1, ..., a_n)\}$ と表わすことにする．確定的な性質 $\varphi(u, x_1, ..., x_n)$ に対し，置換公理を $\varphi(u, x_1, ..., x_n)$ かつ $u = v$ に適用することで，分離公理が φ に対し存在を主張している集合が得られる．したがって分離公理は置換公理の一般化となっていることがわかる．

次の公理は，**正則性公理**とよばれることもある．

(基礎の公理)　すべての $\emptyset$ と異なる x に対し，$y \in x$ で $x \cap y = \emptyset$ となるようなものが存在する．

基礎の公理で存在の保証されている y も，一般には x に対して一意には決まらないことを注意しておく．このことから，この公理のステータスも選択公理と同様他の公理より問題の残るものになるが，この公理に関しては，選択公理でとは異なり，これを暫定的に認めてよいことに対する妥当な理由付けが可能である．

exerc-4

演習問題 1.13 基礎の公理の下ですべての x に対し，$x \neq \{x\}$ が成り立つ．特に $x \neq x \cup \{x\}$ である．

置換公理の必要性や基礎の公理の意味については，第 15 節で更に考察する．

以上で導入した公理をすべて集めてできる公理系を ZFC (Zermelo-Fraenkel Axiom System of Set Theory with Axiom of Choice) とよぶ．

2　集合論での算術と再帰的定義

arithmetic

3　形式論理上の公理的集合論

formal-axiomatic

分離公理と置換公理における「確定的な性質」はそれが何であるかの規定がなく，適応範囲が不明である．集合論の中で “通常の” 数学を展開するだけなら，このことは大きな問題とはならない，分離公理や置換公理を応用する各局面で，これらの公理を適用する際に現れる性質が，集合に関する「確定的な性質」と言えることを確認しながら先に進めばよいからである．しかし，集合論の公理系の無矛盾性や相対的無矛盾性などについて議論しようとするときには，このことは大きな障害となる．集合論の公理系を述語論理の枠組の中で記述しなおすことで，この「確定的な性質」を述語論理の集合論の言語での論理式と読みなおすことができるようになり，これが集合論の公理系の最終版を与えることになる．

本節では述語論理の一般論から初めて，その枠組の中で ZFC の公理系の最終的な定式化を与える．

以下で述べることは,「集合論以前」で行なわれる考察である．考察の対象となっているのは，具体的に (紙の上に書いて) 与えることのできる記号列とそれらに対する具体的な記号列操作のみである．ただし，ここで記述されている作業の効率や必要となる “容量” (紙の大きさ) に関しての議論はしないので，その意味では理想化された議論となっている．ここでは，便宜上集合論で用いる記号や用語を流用することもあるが，そのときには，それらの記号や用語は，理解を容易にしたり，記述をすっきりとさせるために用いられているにすぎず，それ以上の本質的な役割を果しているわけではないことが確かめられる．

このような，数学を展開するための枠組についての数学的考察を**超数学**とよび，そこで具体的な対象や有限的な記号列操作のみを考察する，という立場を，**確定的立場**という[14]．

まず，**変数記号**とよばれる記号を (潜在的) 無限個用意して固定しておく．変数記号は x, y, z, x_0, x_1, x_2,... などで表わすが，たとえば “x を変数記号とする” と言ったとき，“x” で表わしている変数記号の字面が “x” である，とは必ずしも仮定していない．

---

[13] ただし，[7] では無限公理はここでとは異なる主張として導入されており，そこでの無限公理と本書での無限公理との同値性を示すためには，以下で導入される置換公理が必要となる．

[14] 確定的立場 (“finitary standpoint”, ヒルベルトの用語では „finiter Standpunkt“) は過って「有限の立場」と訳されることが多いが，原語の形容詞 „finit“ は (有限性をある意味では内包しているとしても) 「有限」という意味ではない (ドイツ語の「有限な」という形容詞は „endlich“ である) 英語の “finitary” という語も有限的な (finite) とは異なる．ドイツ語の „finit“ に対応させるために作られた造語である．

次に述語論理で記述しようとしている理論体系に応じて**関数記号**と**関係記号**とよばれる記号をいくつか (それぞれゼロ個の場合もあるし有限個の場合も (潜在的) 無限個の場合もある) 用意しておく，関数記号は f, g, h, f_0, f_1, f_2,... などで表わし，関係記号は r, s, r_0, r_1, r_2,... などで表わす．それぞれの関数記号や関係記号には，その記号の**変数の数**が付与されているものとする．0 変数の関数記号も許すことにする．0 変数の関数記号は**定数記号**とよばることもある．これに対して，関係記号の変数の数は常に ≥ 1 とする．s を関数記号または関係記号とするとき，$ary(s)$ で s の変数の数を表わすことにする．関数記号と関係記号をいくつか集めて固定したもの $\mathcal{L}$ を**言語**とよぶ．ここで，異なるカテゴリーの記号の全体の間，たとえば変数記号の全体と関数記号の全体の間には，重複はないものとする．

以下では，これまでに導入した記号以外に，等号 '$\equiv$', 論理記号 '$\neg$', '$\rightarrow$' 量化子 '$\exists$', 分離記号 '(' ',' ')' を用いる．これらの記号も，上で導入した変数記号，関数記号，関係記号のどれとも異なるものとする．

上で導入した記号からなる記号列を，言語 $\mathcal{L}$ の記号列，あるいはもっと短かく **$\mathcal{L}$-記号列**とよぶことにする．$\mathcal{L}$-記号列が **$\mathcal{L}$-項**である，ということを次のような再帰的な定義により決める:

(3.1)　変数記号や，$\mathcal{L}$ の 0-変数の関数記号は (長さ 1 の記号列として) $\mathcal{L}$-項である;　term-0

(3.2)　f が $\mathcal{L}$ の n-変数の関数記号で，$t_1, \ldots, t_n$ が $\mathcal{L}$-項なら，$f(t_1, ..., t_n)$ も $\mathcal{L}$-項である[15]．　term-1

(3.3)　以上のみ[16]．　term-2

たとえば $\mathcal{L}$ が 2 変数の関数記号 f を含んでいて，x と y を変数記号とすると，"$f(x, y)$", "$f(y, y)$", "$f(y, f(y, x))$", "$f(f(x, y), f(y, f(y, x)))$" などは $\mathcal{L}$-項であるが，"$f((xy))$" は $\mathcal{L}$-項ではない．

$\mathcal{L}$-項 t が変数記号を全く含まないとき ($\mathcal{L}$ に 0-変数の関数記号 (つまり定数記号) が含まれているときこのことが起りえる)， t は $\mathcal{L}$ の**閉項**または，**閉 $\mathcal{L}$-項**であるという．

次に，$\mathcal{L}$-記号列が **$\mathcal{L}$-論理式**である，ということを次のように再帰的に定義する:

(3.4)　t_0, t_1 を $\mathcal{L}$-項とするとき，$t_0 \equiv t_1$ は $\mathcal{L}$-論理式である;　fml-0

(3.5)　$t_0, \ldots, t_{n-1}$ が $\mathcal{L}$-項で，r が $\mathcal{L}$ の n-変数関係記号のとき，$r(t_0, ..., t_{n-1})$ は $\mathcal{L}$-論理式である;　fml-1

(3.6)　φ, ψ が $\mathcal{L}$-論理式のとき，$\neg\varphi$, $(\varphi \rightarrow \psi)$ も $\mathcal{L}$-論理式である;　fml-2

(3.7)　φ が $\mathcal{L}$-論理式で，x が変数記号のとき，$\exists x\varphi$ も $\mathcal{L}$-論理式である;　fml-3

(3.8)　以上のみ．　fml-4

supposed-intprt

---

[15] ここで，"$f(t_1, ..., t_n)$" は，記号 'f', 記号 (, 記号列 t_1 etc. を繋げて得られる記号列のことである．

[16] つまり， $\mathcal{L}$-項は (3.1) と (3.2) の繰り返し適用により得られるもののみとする．

$\neg\varphi$, $(\varphi \rightarrow \psi)$ の想定されている解釈は，それぞれ，“φ でない”，“φ ならば ψ” である．ただし，このような想定された解釈が初めて顧慮されることになるのは，以下で形式的な証明の概念が導入されるところにおいてであり，現在の段階では，想定されている解釈が何なのかは，(‘$\neg$’ は L-論理式の前置詞として現われ，‘$\rightarrow$’ は 2 つの L-論理式に挟まれて現れる，といった) これらの記号を含む論理式の導入の仕方を除くと，ここでの形式的体系の定義にはまだ全く反映されていない．

$\exists x\varphi$ の想定されている解釈は，“x が存在して φ が成り立つ” である．

論理を考察するときには，通常，“かつ”，“または”， を表す論理結合子 ‘$\wedge$’, ‘$\vee$’ また，“すべての” を表す量化子 ‘$\forall$’ も導入されることが多いが，ここでは，記述の効率のために “$(\varphi \wedge \psi)$” と “$(\varphi \vee \psi)$” はそれぞれ “$\neg(\varphi \rightarrow \neg\psi)$” と “$(\neg\varphi \rightarrow \psi)$” の略記と思い，“$\forall x\varphi$” は “$\neg\exists\neg\varphi$” の略記と思うことにする．

$\exists x\varphi$ は，“ある x が存在して，この x に対し φ が成り立つ” という解釈を付与することになるものであるが，このような解釈を前提とすると，ここでの x はたとえば定積分をあらわす $\int_a^b f(x)dx$ での x と同じように，普通の変数としては機能しないと考えられる．そこで，このような $\exists$ で “縛られた” 変数のことを**束縛変数**とよび，束縛変数でない変数を**自由変数**とよぶ．

$\mathcal{L}$-項 t や $\mathcal{L}$-論理式 φ に対し，それらのそれらの自由変数の全体 $\mathit{freeVar}(t)$, $\mathit{freeVar}(\varphi)$ を次のように再帰的に定義することができる:

まず，$\mathcal{L}$-項 t に対する，$\mathit{freeVar}(t)$ を次のように再帰的に定義する:

(3.9a) t が定数記号 (0-変数の関数記号) なら，$\mathit{freeVar}(t) = \emptyset$ とする; freevar-0

(3.9b) t が変数記号 $x \in Var$ なら，$\mathit{freeVar}(t) = \{x\}$ とする;

(3.10) $\mathcal{L}$-項 t_0,...,t_{n-1} と $\mathcal{L}$ の n-変数関数記号 f に対し，$t = f(t_0, ..., t_{n-1})$ のとき，$\mathit{freeVar}(t) = \mathit{freeVar}(t_0) \cup \cdots \cup \mathit{freeVar}(t_{n-1})$ とする． freevar-1

ここで，$\mathcal{L}$-項 t に対し，$\mathit{freeVar}(t) \subseteq \{x_0, ..., x_{n-1}\}$ となっていることを，

(3.11) $t = t(x_0, ..., x_{n-1})$

と表す．

次に，$\mathcal{L}$-論理式 φ に対して，$\mathit{freeVar}(\varphi)$ を次のように再帰的に定義する:

(3.12) ある $\mathcal{L}$-項 t_0, t_1 に対し，φ が $t_0 \equiv t_1$ の形をしているとき，$\mathit{freeVar}(\varphi) = \mathit{freeVar}(t_0) \cup \mathit{freeVar}(t_1)$ とする; freeVar-1

(3.13) ある $\mathcal{L}$-項 t_0,..., t_{n-1} と $\mathcal{L}$ の n-変数関係記号 r に対して φ が $r(t_0, ..., t_{n-1})$ の形をしているとき，$\mathit{freeVar}(\varphi) = \mathit{freeVar}(t_0) \cup \cdots \cup \mathit{freeVar}(t_{n-1})$ とする; freeVar-2

(3.14) ある $\mathcal{L}$-論理式 φ_0, φ_1 に対し， freeVar-3

(a) φ が $\neg\varphi_0$ のとき， $\mathit{freeVar}(\varphi) = \mathit{freeVar}(\varphi_0)$ とする;

(b) $(\varphi \rightarrow \varphi_0)$ のとき，$\mathit{freeVar}(\varphi) = \mathit{freeVar}(\varphi_0) \cup \mathit{freeVar}(\varphi_1)$ とする;

(3.15) ある $\mathcal{L}$-論理式 ψ に対し，φ が $\exists x\psi$ のとき，$\mathit{freeVar}(\varphi) = \mathit{freeVar}(\psi) \setminus \{x\}$ とする． freeVar-4

$\mathcal{L}$-論理式 φ に対し，$\mathit{freeVar}(\varphi) \subseteq \{x_0, ..., x_{n-1}\}$ となっている，ということを，

(3.16)　$\varphi = \varphi(x_0, ..., x_{n-1})$ freeVar-5

で表すことにする．$\mathcal{L}$-論理式 φ が **$\mathcal{L}$-文**であるとは，$\mathit{freeVar}(\varphi) = \emptyset$ となることとする．$\mathcal{L}$-文の集まりを **$\mathcal{L}$-理論**とよぶ．

⟦Some paragraphs are missing here; they will be written later.⟧ !!!

以下で形式的証明の体系 K^* を導入するが(17)，このために次の記号法を用意しておく: ある言語 $\mathcal{L}$ に対し，$\varphi_1,..., \varphi_k$, φ を $\mathcal{L}$-論理式とするとき，

(3.17)　$\varphi_1 \rightarrow \cdots \rightarrow \varphi_k \rightarrow \varphi$ i-0

は，

(3.18)　$(\varphi_1 \rightarrow (\varphi_2 \rightarrow (\cdots(\varphi_{k-1} \rightarrow (\varphi_k \rightarrow \varphi))\cdots)))$ i-1

の略記のことと考える．また，この記法の延長で，$(\varphi \rightarrow \psi)$ の形の論理式では，混乱が生じないときには，一番外側の括弧を省略して $\varphi \rightarrow \psi$ と書くことにする．

言語 $\mathcal{L}$ を一つ固定したとき，それに対する K^* の証明の体系は，次の論理公理，推論規則，および，それらを用いて定義される証明の概念からなる．

言語 $\mathcal{L}$ に対する K^* の**論理公理**は次のものである:

(3.19)　**(トートロジー)**　すべての命題論理によるトートロジーとなっている $\mathcal{L}$-論理式は K^* の公理である(18) la-0

(3.20)　**(等号の公理)**　x, y, z, x_1, x_2,..., y_1, y_2,... を任意の変数記号とするとき，次の形の論理式は K^* の公理である: la-1

(a)　$x \equiv x$;

(b)　$x \equiv y \rightarrow y \equiv x$;

(c)　$x \equiv y \rightarrow y \equiv z \rightarrow x \equiv z$;

(d)　$x_1 \equiv y_1 \rightarrow \cdots x_n \equiv y_n \rightarrow f(x_1, ..., x_n) \equiv f(y_1, ..., y_n)$,
　　ただし f は $\mathcal{L}$ の n 変数関数記号;

(e)　$x_1 \equiv y_1 \rightarrow \cdots x_n \equiv y_n \rightarrow r(x_1, ..., x_n) \rightarrow r(y_1, ..., y_n)$,
　　ただし r は $\mathcal{L}$ の n 変数関係記号．

(3.21)　**(代入公理)** φ を $\mathcal{L}$-論理式として，x を変数記号とし，t を $\mathcal{L}$-項とする．φ に変数記号 x が自由変数として現われるすべての個所について，t に現われる，ある変数 y に対して $\exists y \psi$ という形の φ の部分論理式に含まれないとき — このことを t は φ で x に対し自由であると言う，$\varphi(t/x) \rightarrow \exists x \varphi$ は K^* の公理である(19)． la-2

---

(17) “K^*” というのはここで便宜的につけた名前でしかないが，K というアルファベットは，ドイツ語の „Logischer Kalkül“ (論理計算体系) から来ている．

K^* の推論規則は次のものである:

(3.22) **(三段論法)** すべての $\mathcal{L}$-論理式 φ, ψ に対し，$\dfrac{\varphi,\ \varphi \to \psi}{\psi}$ は K^* の推論規則である; dr-0

(3.23) **(存在推論)** すべての $\mathcal{L}$-論理式 φ, ψ と 変数記号 x に対し，$\dfrac{\varphi \to \psi}{\exists x\varphi \to \psi}$ は K^* の推論規則である．ただし，x は ψ には自由変数として現われないものとする． dr-1

T を $\mathcal{L}^*$-文の集まりとするとき，$\mathcal{L}$-論理式の列 $\varphi_0\varphi_1 \cdots \varphi_{n-1}$ が $\mathcal{L}$-論理式 φ の (K^* での) T からの証明であるとは，

(3.24) φ_{n-1} は論理式 φ である． pr-0

(3.25) すべての $i < n$ に対し，以下の (a) ∼ (d) のいずれかが成り立つ． pr-1

(a) φ_i は T に属す．

(b) φ_i は論理公理の一つである．

(c) $j, k < i$ で，$\dfrac{\varphi_j,\ \varphi_k}{\varphi_i}$ は三段論法であるようなものが存在する．

(d) $j < i$ で，$\dfrac{\varphi_j}{\varphi_i}$ が存在推論であるようなものが存在する．

演習問題 3.1 上で導入した証明の体系が 13 ページで述べた論理記号の想定された解釈と整合性を持つものになっていることを確かめよ[20]． exerc-4-0

上で導入された証明の概念が数学的証明 (我々が現在までに数学的論証として用いたすべての論理的な推論や，我々が未来に数学的論証として用いる可能性のあるすべての論理的な推論) をすべて網羅していることの (間接的な) 保証は，次の節で論じることになる (ゲーデルとヘンキンによる) 完全性定理により与えられる．

上で導入された述語論理と証明の体系 K^* の上に，第 1 節で数学の日常語のレベルで導入した集合論の公理系を，次の言語 $\mathcal{L}_\varepsilon$ により，15 ページ の意味での $\mathcal{L}_\varepsilon$-理論として再導入することができるようになる．

[18] $\mathcal{L}$-論理式 φ が命題論理によるトートロジーである，とは，命題論理のトートロジー (命題論理の論理式で対応するブール関数が恒等的に 1 を返すものになっているようなもの) の命題変数に，任意の $\mathcal{L}$-論理式を代入して得られるような $\mathcal{L}$-論理式のことである．与えられた $\mathcal{L}$-論理式 φ に対して，φ が命題論理によるトートロジーであるかどうかを判定するアルゴリズムが存在することに注意しておく．

[19] $\varphi(t/x)$ で論理式 φ に自由変数として現われる x をすべて $\mathcal{L}$-項 t で置き換えて得られる論理式をあらわす．ただし，この書き方をしたときには $\varphi = \varphi(x)$ は仮定せず，φ は x 以外の自由変数を含んでいてもよいとする．

[20] 証明の体系の最終的な解釈は，たとえば，群論に対する群 (複数)，体論に対する体 (複数) に相当するような，何らかの数学的構造 (無限な数学的構造を含む) を経由してなされる必要があるが，そのような考察は (超数学が有限的な記号列の確定的な操作のみを対象としている限りそこで行なわれることはできず) 集合論ないしその何らかの部分理論の中で始めて可能になる．そのような解釈については次の第 6 節で考察する．

集合論の言語としては，要素記号 ε のみを 2 変数の関係記号として唯一の関係記号として含み，関数記号は全く含んでいないような $\mathcal{L}_\varepsilon$ を採用する．

以下の $\mathcal{L}_\varepsilon$-文の集まりを公理系 ZFC とする[21]：

(外延性公理)

$$\forall x \forall y\,(\forall z\,(z\ \varepsilon\ x \leftrightarrow z\ \varepsilon\ y) \rightarrow x \equiv y)$$ [22]

(空集合公理)

$$\exists x \forall y\,(y \not\varepsilon\ x)$$

(対の公理)

$$\forall x \forall y \exists z \forall u\,(u\ \varepsilon\ z \leftrightarrow (u \equiv x \vee u \equiv y))$$

(和集合の公理)

$$\forall x \exists y \forall z\,(z\ \varepsilon\ y \leftrightarrow \exists u\,(u\ \varepsilon\ x \wedge y\ \varepsilon\ u))$$

次の公理は各 $\mathcal{L}_\varepsilon$-論理式 $\varphi = \varphi(x, x_1, ..., x_n)$ ごとにとる:

(分離公理)$_{\varphi=\varphi(x,x_1,...,x_n)}$

$$\forall x_0 \forall x_1 \cdots \forall x_n\,\exists y \forall z\,(z\ \varepsilon\ y \leftrightarrow (z \in x_0 \wedge \varphi(z, x_1, ..., x_n)))$$

(無限公理)

$$\exists x\,(\exists u(\forall v\,(v \not\varepsilon\ u) \wedge u\ \varepsilon\ x) \wedge \forall y(y\ \varepsilon\ x \rightarrow \exists u\,(u \equiv y \cup \{y\} \wedge u\ \varepsilon\ x)))$$

ここで，“$u \equiv y \cup \{y\}$” は

(3.26)　$\exists v(\forall w\,(w\ \varepsilon\ v \leftrightarrow (w\ \varepsilon\ y \vee v \equiv y)) \wedge v \equiv u)$

の略記とする．

(冪集合公理)

$$\forall x\,(\exists y\,\forall z\,(z\ \varepsilon\ y \leftrightarrow z \subseteq y))$$

ここで “$z \subseteq y$” は

(3.27)　$\forall u\,(u\ \varepsilon\ z \rightarrow u \in y)$

の略記とする．

(選択公理, AC)

$$\forall x\,(\exists y\ \varepsilon\ x \rightarrow \exists f\,(f : x \rightarrow \bigcup x \wedge \forall y\,(y\ \varepsilon\ x \rightarrow f(y)\ \varepsilon\ y)))$$

---

[21] 可読性のために，曖昧さの生じない範囲で括弧を省略したり，必要のない場所で補ったりしているし，既に論じた様々な略号を使っているところもあるが，以下で与えたものに相当する厳密な意味での $\mathcal{L}_\varepsilon$-文が書き下せることは，容易に確かめられる．

[22] “$\leftarrow$” は等号の公理から導けることに注意する．

演習問題 3.2 上の論理式での “$f : x \to \bigcup x$” と “$f(y)\ \varepsilon\ y$” を $\mathcal{L}_\varepsilon$-論理式として書き出せ．

次の置換公理も分離公理と同様に，$\mathcal{L}_\varepsilon$-論理式 $\varphi = \varphi(x, y, x_1, ..., x_n)$ ごとにとる:

(置換公理)$_{\varphi=\varphi(x,y,x_1,...,x_n)}$

$$\forall x_1 \cdots \forall x_n \forall u\ \big(\forall x\,(x\ \varepsilon\ u \to \exists^! y \varphi(x, y, x_1, ..., x_n)) \to \\ \exists v \forall y (y\ \varepsilon\ v \leftrightarrow \exists x\,(x\ \varepsilon\ u \land \varphi(x, y, x_1, ..., x_n))))$$

ここで，論理式 $\varphi = \varphi(x, ...)$ に対し，$\exists^! x\varphi$ は「φ を満たす対象 x がちょうど一つ存在する」ことを表現する，$(\exists x\varphi(x, , ...) \land \forall x \forall y\,(\varphi(x, ...) \land \varphi(y/x, ...)))$ のこととする．ただし，たとえば y は φ に現れない最初の変数記号として，$\varphi(x/y, ...)$ は φ に現れる x をすべて y で置き換えて得られる論理式とする[(23)]．

演習問題 3.3 論理式 φ に対し，それぞれ 「φ を満たす x がちょうど n 個存在する」,「φ を満たす x は高々 n 個である」 を表す，$\exists^{=n} x\varphi$, $\exists^{<n} x\varphi$ が論理式として書けることを確かめよ．

(基礎の公理)

$$\forall x\,(\exists u\, u\ \varepsilon\ x \to \exists v\,(v\ \varepsilon\ x \land \forall u\,(u\ \varepsilon\ v \to \neg u\ \varepsilon\ x)))$$

⟦Some paragraphs are missing here; they will be written later.⟧　!!!

$\mathcal{L}$ を言語として，$\tilde{\mathcal{L}}$ を $\mathcal{L}$ を拡張するもう一つの言語とする．$\mathcal{L}$-理論 T と $\tilde{\mathcal{L}}$-理論 $\tilde{T}$ について，$\tilde{T}$ が T の**保守拡大**であるとは，

(3.28)　すべての $\mathcal{L}$-文 φ に対し，$T \vdash \varphi \ \Leftrightarrow\ \tilde{T} \vdash \varphi$　ce-0

が成り立つことである．

$\tilde{\mathcal{L}}$ が $\mathcal{L}$ の拡張になっていない場合にも，$\mathcal{L}$-論理式の全体が，$\tilde{\mathcal{L}}$-論理式の全体に $\neg$, $\vee$ を保存して埋め込めて，この埋め込みに関して (3.28) に対応する性質が成り立つときにも，$\tilde{T}$ は T の保守拡大であると言う．

T が無矛盾な $\mathcal{L}$-理論であることと，その任意の保守拡大 (の一つ，または全て) が無矛盾であることは同値である．

conserv-ext

定理 3.4　(1)　T を $\mathcal{L}$-理論として，$\varphi = \varphi(x_0, ..., x_{n-1})$ を $\mathcal{L}$-論理式とする．r を $\mathcal{L}$ に含まれない n-変数関係記号として，$\tilde{\mathcal{L}}$ を $\mathcal{L}$ にこの関数記号を加えて得られる言語とする．このとき，

(3.29)　$\tilde{T} = T \cup \{\forall x_0 \cdots \forall x_{n-1}(\varphi(x_0, ..., x_{n-1}) \leftrightarrow r(x_0, ..., x_{n-1}))\}$　e-1

---

(23) y の選び方は論理式の (K^* での) ”意味” を変えないから，y が φ に現れる変数と衝突を起こさない限り，自由にとってよい．

は T の保守拡大である．

（2）T を $\mathcal{L}$-理論として，$\psi = \psi(x, x_0, ..., x_{n-1})$ を $\mathcal{L}$-論理式とする ($n = 0$ のときには $\psi = \psi(x)$ と考える)．$T \vdash \forall x_0 \cdots \forall x_{n-1} \exists^! x\, \psi(x, x_0, ..., x_{n-1})$ が成り立っているとして，f を $\mathcal{L}$ に含まれない n-変数関数記号として，$\tilde{\mathcal{L}}$ を $\mathcal{L}$ にこの関数記号を加えて得られる言語とする．このとき，

$$(3.30)\quad \tilde{T} = T \cup \{\forall x_0 \cdots \forall x_{n-1} \psi(f(x_0, ..., x_{n-1}), x_0, ..., x_{n-1})\} \qquad \text{e-2}$$

は，T の保守拡大である．　❑

次の定理 3.4, (2) の変形は集合論の文脈で頻繁に用いられることになる: T が ZFC の十分に大きな部分を含んでいて (特に ε は $\mathcal{L}$ に 2 変数関係記号として含まれているとする)，空集合を表す 0-変数関数記号 $\emptyset$ と，これに対応する公理 $\forall x\,(x \not\varepsilon\, \emptyset)$ も含むものとする．c が $\mathcal{L}$ の定数記号で，

$$(3.31)\quad T \vdash \forall x_0 \cdots \forall x_{n-1}((x_0 \,\varepsilon\, c \wedge \cdots \wedge x_{n-1} \,\varepsilon\, c) \rightarrow \exists^! x\, \psi(x, x_0, ..., x_{n-1})) \qquad \text{e-3}$$

が成り立っているとき，ψ_0 を

$$(3.32)\quad \Big(\big((x_0 \,\varepsilon\, c \wedge \cdots \wedge x_{n-1} \,\varepsilon\, c) \wedge \psi(x, x_0, ..., x_{n-1})\big) \vee \big((x_0 \not\varepsilon\, c \vee \cdots \vee x_{n-1} \not\varepsilon\, c) \wedge x \equiv \emptyset\big)\Big)$$

とすると，これに対して定理 3.4, (2) が適用できる．これにより，c 上の関数を表す関数記号が導入できる．

定理 3.4 や上で述べてこの定理のバリエーションによる拡大の繰り返しにより得られる保守拡大を**定義による保守拡大**とよぶことにする．$\tilde{T}$ を T の定義による保守拡大として，それぞれの言語を $\mathcal{L}$ と $\tilde{\mathcal{L}}$ とするとき，定理 3.4 により，

任意の $\tilde{\mathcal{L}}$-論理式 $\tilde{\varphi}(\overline{x})$ に対し，$\mathcal{L}$-論理式 $\varphi(\overline{x})$ で，$\tilde{T} \vdash^{K^*} \forall \overline{x} \tilde{\varphi}(\overline{x}) \leftrightarrow \varphi(\overline{x})$ となるものがとれる．

第 1 節 では，'$\emptyset$', '$\{\cdot,\cdot\}$', '$\bigcup(\cdot)$', '$\mathcal{P}(\cdot)$', 'ω',... などの関数記号を略記として導入したが，これらの記号を，定理 3.4 の意味での言語の拡張を行なって，本当に新しい記号として導入した方が都合の良いことも多い．特に，次の節での考察では，

$$(3.33)\quad \text{'}\emptyset\text{'},\ \text{'}\{\cdot,\cdot\}\text{'},\ \text{'}\textstyle\bigcup(\cdot)\text{'},\ \text{'}\textstyle\bigcap(\cdot)\text{'},\ \text{'}(\cdot)\setminus(\cdot)\text{'} \qquad \text{e-4}$$

を関数記号として $\mathcal{L}_\varepsilon$ に (3.33) の関数記号を付加して得られる言語 $\mathcal{L}_{\{\}}$ での ZFC の定理 3.4 の意味での定義による保守拡大を $\mathrm{ZFC}_{\{\}}$ で表すことにする．

$\mathrm{ZFC}_{\{\}}$ に更に以下の議論で導入されることになる関数記号や関係記号をすべて付け加えて得られる言語を $\widetilde{\mathcal{L}_\varepsilon}$ で表し，$\widetilde{\mathcal{L}_\varepsilon}$ での ZFC の定義による保守拡大を $\widetilde{\mathrm{ZFC}}$ と表すことにする．

4　演繹定理と論理式の階層

deduction-th

証明体系 K^* に関する基本的な事実を見ておくことにする．

5 ZFC でのクラスの扱い

classes

$\varphi = \varphi(x, x_0, ..., x_{n-1})$ をある $\mathcal{L}_\varepsilon$-論理式とする．ある $\mathcal{L}_\varepsilon$-論理式 $\psi(x_0, ..., x_{n-1})$ に対し，$\mathrm{ZFC}, ..., \psi \vdash \varphi(u, x_0, ..., x_{n-1})$ (あるいは，$\mathrm{ZFC} \vdash \big((\ldots \wedge \psi) \rightarrow \varphi(u, x_0, ..., x_{n-1})\big)$) が証明できるとき，このことを口語的に，

(5.1) $\psi(a_0, ..., a_{n-1})$ となる $a_0, ..., a_{n-1}$ に対し，クラス $\mathcal{X}$ を

$$\mathcal{X} = \{x : \varphi(x, a_0, ..., a_{n-1})\}$$

として定義するとき，このクラス $\mathcal{X}$ に対し，$u \in \mathcal{X}$ である

と表現して，この "クラス $\mathcal{X}$" があたかも $\mathcal{L}_\varepsilon$-項として表現されたオブジェクトであるかのように扱かう．

同様に，ある $\mathcal{L}_\varepsilon$-論理式 $\psi(x_0, ..., x_{n-1})$ に対し，$\mathrm{ZFC}, ..., \psi \vdash \forall x\ (x \in u \leftrightarrow \varphi(x, x_0, ..., x_{n-1}))$ (あるいは，$\mathrm{ZFC} \vdash \big((\ldots \wedge \psi) \rightarrow \forall x\ (x \in u \leftrightarrow \varphi(x, x_0, ..., x_{n-1}))\big)$) が証明できるとき，このことを

(5.2) $\psi(a_0, ..., a_{n-1})$ となる $a_0, ..., a_{n-1}$ に対し，クラス $\mathcal{X}$ を

$$\mathcal{X} = \{x : \varphi(x, a_0, ..., a_{n-1})\}$$

として定義するとき，$u = \mathcal{X}$ である

と表現する．

外延性により，集合 a は $\{x : x \in a\}$ と表わせる．したがって，集合はクラスの特別な場合とみることができる．

フォン・ノイマン＝ベルナイス＝ゲーデル集合論 (NBG) は，このような意味でのクラスを実際に体系のオブジェクトとして扱かうことができるような ZFC の保守拡大である．

現在，集合論では主に NBG でなく ZFC をベースとする議論が行なわれるのだが，ことの一つの大きな理由として，NBG が有限の公理からなる公理系を持つことから，系 15.7 に対応する性質をうまく記述できないことが挙げられる．

クラスに対する同等性や包含関係や集合算も集合に対するものと同じように導入することができる:

$\mathcal{X} = \{x : \varphi(x, ...)\}, \mathcal{Y} = \{x : \psi(x, ...)\}$ のとき，$\mathcal{X} = \mathcal{Y}$ と $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{Y}$ は，それぞれ，論理式 $\forall x\,(\varphi \leftrightarrow \psi)$ と $\forall x\,(\varphi \rightarrow \psi)$ の略記と考える．

クラス $\mathcal{X} \cap \mathcal{Y}$, $\mathcal{X} \cup \mathcal{Y}$, $\mathcal{X} \setminus \mathcal{Y}$ は，それぞれ，論理式 $(\varphi \wedge \psi)$, $(\varphi \vee \psi)$, $(\varphi \wedge \neg\psi)$ に対応するクラスである．分離公理は,「すべてのクラス $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$ に対し，少なくとも一つが集合なら $\mathcal{X} \cap \mathcal{Y}$ も集合になる」 という主張として捉えることもできる[24]．

クラス $\mathcal{X} = \{x : \varphi(x, ...)\}$ を集合族として見たときの $\bigcup \mathcal{X}$, $\bigcap \mathcal{X}$ も，それぞれ，$\bigcup \mathcal{X} = \{u : \exists x\,(\varphi(x, ...) \wedge u \in x)\}$, $\bigcap \mathcal{X} = \{u : \forall x\,(\varphi(x, ...) \rightarrow u \in x)\}$ として定義できる．特に，分離公理により，$\bigcap \mathcal{X}$ は常に集合になる **(演習)**．

[24] ここで,「全てのクラス $\mathcal{X}$ に対し ⋯」と言ったときの「すべての」は超数学での量化子である．より具体的には，このでの「全てのクラス $\mathcal{X}$ に対し ⋯」は，命題 「⋯」をクラス $\mathcal{X}$ の定義となっている論理 φ ごとに対応する命題に書き直して得られるもののすべてが成り立つことを主張するしかない．

クラス $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$ に対し，クラス $\mathcal{X} \times \mathcal{Y} = \{\langle x, y\rangle : x \in \mathcal{X}, y \in \mathcal{Y}\}$ も考えることができる．$\mathcal{F}$ が，$\mathcal{F} \subseteq \mathcal{X} \times \mathcal{Y}$ を満たし，すべての $x \in \mathcal{X}$ に対して $\langle x, y\rangle \in \mathcal{F}$ となる $y \in \mathcal{Y}$ がちょうど一つ存在するとき，$\mathcal{F}$ を $\mathcal{X}$ から $\mathcal{Y}$ への**クラス関数** とよび，集合のときと同様に，このことを $\mathcal{F} : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ と表わす．集合とクラスの関係と同様に，通常の集合となっている関数はクラス関数の特別な場合と看做すことができる．

上でのような $\mathcal{X}$ と $\mathcal{F}$ に対し，クラス $\mathcal{X}$ を $\mathrm{dom}(\mathcal{F})$ と表わし，クラス関数 $\mathcal{F}$ の定義域とよぶ．$x \in \mathrm{dom}(\mathcal{F})$ に対し，$\langle x, y\rangle \in \mathcal{F}$ となるような (一意に決まる集合) y を $\mathcal{F}(x)$ と表わす．またクラス $\mathcal{Z}$ に対し，$\mathcal{F}''\mathcal{Z}$ でクラス $\mathcal{Z}$ の $\mathcal{F}$ による像 $\{y :$ ある $x \in \mathcal{Z}$ に対し，$\langle x, y\rangle \in \mathcal{F}\}$ を表わす．置換公理は，「任意のクラス関数 $\mathcal{F}$ と集合 x に対し，$\mathcal{F}''x$ は集合になる」，と言い換えることもできる．

クラス $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{X} \times \mathcal{Y}$ は，**クラス列** $\langle \mathcal{F}''\{x\} : x \in \mathcal{X}\rangle$ と捉えることもできる[25]．

クラス $\mathcal{X}$ のうち，集合とならないもの (つまり集合 x で $x = \mathcal{X}$ となるものが存在しないもの) は**真のクラス**とよばれる．真のクラスが実際に存在することは，(もともとはそのような文脈での考察ではなかったにしても) ラッセルによって 20 世紀初頭に発見されている[26]:

定理 5.1 (B. Russell, 1901) $u = \{x : x \notin x\}$ となる集合 u は存在しない． russell

証明． もしそのような u が存在したとすると，$u \in u$ または $u \notin u$ のどちらかが成立するが，$u \in u$ とすると，u の定義から $u \notin u$ となり矛盾である．一方 $u \notin u$ としても u の定義から $u \in u$ となってしまい矛盾である． □ (定理 5.1)

すべての集合からなるクラスを V で表わす．$V = \{x : x \equiv x\}$ である．

V

定理 5.2 V は真のクラスである．

証明． もし $v = V$ となるような集合 v があったとすると，分離公理により $\{x : x \notin x\} = \{x \in v : x \notin x\}$ も集合となるが，これは，定理 5.1 に矛盾する． □ (定理 5.2)

上の定理の証明には，集合論の公理のうち，ほんの一部しか用いられていないことに注意しておく．たとえば，冪集合の公理，選択公理，置換公理，基礎の公理はここでは用いられていない．次の系も，これらの公理なしで証明が可能なものである:

V-a

系 5.3 任意の集合 x に対し，$y \notin x$ となるような集合 y が存在する．

証明． 基礎の公理の下では，$y = x$ とすればよい．しかし，このような集合の存在は基礎の公理の仮定なしでも示せる: もし，ある x に対し，$y \notin x$ となるような y が存在しなければ，$x = V$ となるが，これは定理 5.2 に矛盾するからである． □ (系 5.3)

---

[25] ここでクラス列と言っているのは，添字の族がクラスになっているような列のことで，クラスの列ではないことに注意する．

[26] 実はこのことはツエルメロによってもラッセルと同時あるいはそれより前に発見されており，当時のゲォッティンゲンでは，この事実の認識はいちはやく共有されていたようである．

6　集合論内での述語論理とその意味論

logic-in-st

超数学では，0, 1, 2, 3,... といった具体的な自然数や，それを一般化した (“...” としての) 自然数 (の全体) が考察できたのに対し，公理的集合論の体系では，“自然数の全体からなる集合” というオブジェクト (集合) の存在が証明でき，それに対応する記号 ω を導入した．

超数学での数の一般論と，ω (に対し ZFC で証明できる命題) は完全に同一視することはできないにしても，これらの間には密接な関係がある．たとえば，次の (6.1) は (超数学での) 数 $\mathtt{n}$ に対する実効的な帰納法により証明できる:

(6.1)　ある数 $\mathtt{n}$ が超数学で具体的に与えられたときには，$\mathtt{n}$ に対応する $\mathrm{ZFC}_{\{\}}$ での項 $\underline{\mathtt{n}}$ をそれから作ることができて[27]，$\mathrm{ZFC}_{\{\}} \vdash \underline{\mathtt{n}}\,\varepsilon\,\omega$ となる (つまりその証明を機械的に生成することができる)． n-0

この n から $\underline{n}$ への対応では，$n_0, n_1, \ldots$ に対する初等的な性質 φ が成り立つとき，φ に対応する論理式 $\underline{\varphi}$ が ZFC で成り立つようなものになっている．たとえば

(6.2)　$\mathtt{l} + \mathtt{m} = \mathtt{n}$ となることが (我々の算数の知識を動員して) 示せるときには，その計算から，$\mathrm{ZFC}_{\{\}} \vdash \underline{\mathtt{l}} + \underline{\mathtt{m}} \equiv \underline{\mathtt{n}}$ の証明が生成できるし，$=$ を $\neq$ に置き換えたときにも同様である (このときには，$\mathrm{ZFC}_{\{\}} \vdash \underline{\mathtt{l}} + \underline{\mathtt{m}} \not\equiv \underline{\mathtt{n}}$ の証明が生成できる)． n-1

乗法についても同様である．

また，

(6.3)　t を $\mathrm{ZFC}_{\{\}}$ の任意の閉項として，$\mathrm{ZFC}_{\{\}} \vdash t \in \omega$ のときには，ある数 $\mathtt{n}$ で $\mathrm{ZFC}_{\{\}} \vdash \underline{\mathtt{n}} \equiv t$ となるものがとれる n-2

(このような $\mathtt{n}$ を作るためのアルゴリズムが存在する) ことが，t の長さに関する帰納法で示せる[28]．

一方，ある $\mathcal{L}_{\{\}}$-論理式 φ に対し，$\mathrm{ZFC}_{\{\}} \vdash \exists x\,(x\,\varepsilon\,\omega \wedge \varphi(x))$ が証明できたとしても，$\mathrm{ZFC}_{\{\}} \vdash \varphi(\underline{\mathtt{n}})$ となるような具体的な自然数 $\mathtt{n}$ が見つかる，という保証はない，実際，ZFC が無矛盾であることを仮定すると，$\mathrm{ZFC}_{\{\}}$ の拡張で，このような n の存在しないような φ を持つものを人工的に作ることができる．

“$\mathtt{n}$ は自然数である” に対応する “ZFC 内” での状況を表現する，自由変数 n を含む $\mathcal{L}_{\{\}}$-論理式 “$n\ \varepsilon\ \omega$” という対比に対応して，“φ は $\mathcal{L}$-論理式である，“$\mathcal{P}$ は φ の理論 T からの証明である” 等の超数学での表明に対峙する概念の ZFC 内での定式化となっていると看做せる $\mathcal{L}_{\{\}}$-論理式たちを，以下で導入する．このためにここで与えることになる

---

[27] 0, 1, 2, 3,... に対応して，$\mathcal{L}_\varepsilon$ の閉項 “$\emptyset$”, “$\{\emptyset\}$”，$\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$，$\{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$,... をとればよい． 一般には，$\underline{n}$ が得られたとき，$\underline{n+1}$ を，$\{\cdots, \{\underline{n}\}\}$ とすればよい，ただし，“$\cdots$” は閉項 $\underline{n}$ から両端の集合括弧を取り除くことで得られる表現である．

[28] ZFC の保守拡大を更に行ない，他の関数記号も導入したときには，このことは必ずしも成り立つとは限らないことに注意する．

coding[29] の仕方は，恣意的なものであり，他の様々な方法も可能である．ここで重要なのは，そのような coding で (6.1), (6.2), (6.3) に対応する性質が成り立つことである．

まず，$\mathsf{Var} = \{0\} \times \omega$ とする．変数記号はすべて x_0, x_1, x_2,... という形をしているものとして，これらが $\langle \underline{0}, \underline{0} \rangle$, $\langle \underline{0}, \underline{1} \rangle$, $\langle \underline{0}, \underline{2} \rangle$ という $\mathcal{L}_{\{\}}$-閉項で表される集合で “コードされる” ものとする．これらのコードの表現となっている閉 $\mathcal{L}_{\{\}}$-項を $\ulcorner x_0 \urcorner$, $\ulcorner x_1 \urcorner$, $\ulcorner x_2 \urcorner$,... で表すことにする[30]．言語 $\mathcal{L}$ とは，関数記号と関係記号の範囲と各記号の変数の数を指定する (集合としての) 関数の組 $\langle f, g \rangle$ のこととする．ここに，$w_0 = \mathrm{dom}(f)$, $w_1 = \mathrm{dom}(g)$ として，$w_0, w_1 \in \omega$ で，$f : w_0 \to \omega$, $g : w_0 \to \omega$ とする．$n \in w_0$ に対し，$\langle \underline{1}, n \rangle$ は，$f(n)$ 変数関数記号とし，$m \in w_1$ に対し，$\langle \underline{2}, m \rangle$ は $g(m)$ 変数関係記号とする，と考える．

ex-1

例 1 ZFC の言語 $\mathcal{L}_\varepsilon$ は，ここでの枠組では，$w_0 = 0$, $w_1 = 1$ で，$g(0) = 2$ となるものとして扱うことができる．

$\langle \underline{3}, \underline{0} \rangle$ ～ $\langle \underline{3}, \underline{6} \rangle$ はそれぞれ，記号 ‘$\equiv$’, ‘$\neg$’, ‘$\to$’, ‘$\exists$’, ‘(’, ‘,’, ‘)’ のコードとし，これらを，表す $\mathcal{L}_{\{\}}$-閉項を，それぞれ $\ulcorner\equiv\urcorner$, $\ulcorner\neg\urcorner$, $\ulcorner\to\urcorner$, $\ulcorner\exists\urcorner$, $\ulcorner(\urcorner$, $\ulcorner,\urcorner$, $\ulcorner)\urcorner$ と表すことにする．

言語 $\mathcal{L} \equiv \langle f, g \rangle$ に対し，

(6.4) $$L_{\mathcal{L}} \equiv \mathsf{Var} \cup \{\langle \underline{1}, n \rangle : n \in \mathrm{dom}(f)\} \cup \{\langle \underline{2}, m \rangle : m \in \mathrm{dom}(g)\} \cup \{\langle \underline{3}, \underline{0} \rangle, ..., \langle \underline{3}, \underline{6} \rangle\}$$ n-3

として，$\tau \in {}^{\omega>}L_{\mathcal{L}}$ が $\mathcal{L}$-項である，ということを主張する (と解釈のできる) 述語 ($\mathcal{L}_\varepsilon$-論理式) “$\tau \in \mathsf{Trm}_{\mathcal{L}}$” を以下のようなものとして採用することができる．

まず，いくつかの (多くはここでのローカルな) 定義をしておく．$\tau \in {}^{\omega>}L_{\mathcal{L}}$ に対し，$\ell(\tau)$ で τ の長さを表すことにする．$\ell(\tau) \equiv \mathrm{dom}(\tau)$ である．

(6.5) $$\mathcal{S}(\tau) \equiv \{\tau \restriction n \setminus m : m, n \in \omega,\ m < n \leq \ell(\tau)\}$$

とする．$m, n \in \omega$, $m < n \leq \ell(\tau)$ に対し，$n \setminus m$ は区間 $[m, n) = \{k \in \omega : m \leq k < n\}$ となることに注意する．$m < n \leq \ell(\tau)$ に対し，$\ell(\tau \restriction n \setminus m) \equiv m - n$ とする．

ここで，$\tau \in {}^{\omega>}L_{\mathcal{L}}$ に対しては，$\tau \in \mathsf{Trm}_{\mathcal{L}}$ を

(6.6) $$\begin{aligned}\forall f \Big(\big(\ & f : \mathcal{S}(\tau) \to 2 \\ & \wedge\ \forall s\, ((s \in \mathcal{S}(\tau) \wedge \ell(s) \equiv 1 \wedge \text{“}s(i),\, i \in \mathrm{dom}(s) \text{ は変数記号} \\ & \qquad \text{または} \mathcal{L} \text{ の 0-変数関数記号の code”}) \quad \to \quad f(s) \equiv 1) \\ & \wedge\ \forall s\, \forall n \forall m\, ((s \equiv \tau \restriction m - n\ \wedge\ \text{“}s(m) \text{ は } \mathcal{L} \text{ の } k\text{-変数関数記号の code”} \\ & \qquad \wedge \text{“}\exists \langle \tau_i \rangle_{i<k} (s \restriction (n \setminus m + 1) \equiv \ulcorner(\urcorner \frown \tau_0 \frown \ulcorner,\urcorner \frown \cdots \frown \ulcorner,\urcorner \frown \tau_{k-1} \frown \ulcorner)\urcorner \\ & \qquad\qquad \wedge f(\tau_0) \equiv \cdots \equiv f(\tau_{k-1}) \equiv 1)\text{”}) \ \to\ f(s) \equiv 1)\big) \\ \to \quad & f(\tau) \equiv 1 \Big)\end{aligned}$$ term-3

---

[29] ここで coding と言っているのは，具体的な数 $\mathtt{n}$ に対して，$\mathcal{L}_{\{\}}$-項 $\underline{\mathtt{n}}$ を 与え方や，この与え方に呼応する “$k + l \equiv m$” etc. などの $\mathcal{L}_\varepsilon$-論理式を定義する仕方，などに対応する定義のことである．

[30] $\mathcal{L}_{\{\}}$ では順序対 $\langle x, y \rangle$ を $\{f\{x, x\}, \{x, y\}\}$ の略記として用いることができるとに注意する．

として定義できる．ただし，上で “⌢” は記号列の連結に対応する集合演算を表しており，“…” と quotation marks で囲って書いたところは，対応する集合論の論理式に翻訳する必要がある．

exerc-5

演習問題 6.1 (6.6) での “…” が $\mathcal{L}_\varepsilon$- (ないしは $\widetilde{\mathcal{L}_\varepsilon}$-) 論理式として表現できることを確かめよ．

7 完全性定理と不完全性定理

incompl

二階の数論の範囲で定式化できる，可算な理論に対する) 完全性定理は，逆数学での基礎理論 PA_0 上で PA_0 と同値になることが知られている． !!!!

構造，部分構造，モデル等の概念をラフな定義で導入する． !!!!

Part II
超限帰納法

8 整列順序

well-ordering

集合 X 上の二項関係 $R \subseteq X^2$ は，次の**推移律**と**反対称律**を満たすとき，X 上の**半順序**であるという:

(8.1) すべての $a, b, c \in X$ に対し，$a\,R\,b$ かつ $b\,R\,c$ なら $a\,R\,c$ が成り立つ． po-0

(8.2) すべての $a \in X$ に対し $a \not{R}\, a$ が成り立つ[31]． po-1

R が X 上の半順序のとき，$\langle X, R\rangle$ は**半順序集合**であるともいうことにする．どの R を問題としているかが文脈から明らかなときには， X は半順序集合である，ともいう．X 上の半順序 R は,

(8.3) すべての $a, b \in X$ に対し，$a = b$, $a\,R\,b$, $b\,R\,a$ のどれかが成り立つ po-2

とき，**全順序** (あるいは**線形順序**) であるという．

演習問題 8.1 R が X 上の全順序のとき，(8.3) の 3 つの場合は互いに排他的である (つまりどの $a, b \in X$ に対してもこれらのうちの丁度一つだけが成り立つ)．

R を X 上の全順序として $a \in X$ が $A \subseteq X$ の**最小元**である，とは，$a \in A$ で，すべての $b \in A$ に対し，$b \not{R}\, a$ となることとする．

X 上の全順序 R は,

(8.4) すべての空でない X の部分集合 A は (R に関する) 最小元を持つ wo-0

[31] 半順序の定義は R の 2 変数に対して対称だが，我々は以下で $a\,R\,b$ を “a は b より (R に関して) 小さい” ことと理解することにする．以下で現れる “最小元”, “極小元”, “最大元” etc. の用語はすべてこの理解に基くものとなっている．

とき**整列順序**である，という．

$\langle X, R\rangle$ が全順序のとき，$A \subseteq X$ が**始片** (initial segment) であるとは，

(8.5)　すべての $b \in A$ と $c \in X$ に対し，$c\,R\,b$ なら，$c \in A$ となる　lo-0

こととする．

$a \in X$ に対し，

(8.6)　$I_R(a) = \{b \in X : b\,R\,a\}$　lo-1

は X の始片となる．$\langle X, R\rangle$ が整列順序のときには，すべての始片は $I_R(a)$ の形で表わせる:

補題 8.2 $\langle X, R\rangle$ を整列順序とする．このとき

(1) X の (R に関する) 最小元が存在する．

(2) $a \in X$ が X の最大元でないとき，a の次の元が存在する．

(3) A を X の始片で X と異なるものとするとき，$A = I_R(a)$ となる X の元 a が存在する．

(4) $A \in X$ が X で R に関して上に有界なら，$\sup A \in X$ が存在する．

証明． (1): (8.4) で A として X をとれば，X の最小元の存在がいえる．

(2): $a \in X$ が X の最大元でないなら，$B = \{b \in X : a\,R\,b\}$ は空でないから，(8.4) により，B の最小元 b が存在することがわかるが，b は a の次の元となっている．

(3): $B = X \setminus A$ とすれば，仮定から $B \neq \emptyset$ だから，(8.4) により，B の最小元 a が存在するが，このとき a の最小性から $A = I_R(a)$ である．

(4): A が最大元 a を持つなら，$a = \sup A$ である．A が最大元を持たないときには，$B = \{b \in X : b$ は A の上界$\}$ すれば仮定から $B \neq \emptyset$ だから，(8.4) により B の最小元 b が存在するが，b の最小性から，$b = \sup A$ である．　❑ (補題 8.2)

整列順序の概念の重要性は，整列順序の上で帰納法の議論や再帰による関数の定義が可能になることである:

定理 8.3 (整列順序集合上の帰納法と再帰的定義)
$\langle X, R\rangle$ を整列順序集合とする．このとき　Th-ind-recur-0

(1) $A \subseteq X$ が

(8.7)　すべての $a \in X$ に対し，すべての $b \in X$ で $b\,R\,a$ となるものに対し $b \in A$ となるなら，$a \in A$ である　wo-ind-0

を満たすとき，$A = X$ である．

(2) Y を任意の空でない集合として，

(8.8)　$\mathcal{F} = \{f : f$ は X の始片から Y への関数$\}$　wo-ind-1

とし，$g : \mathcal{F} \to Y$ とするとき，$f : X \to Y$ で，全ての $a \in X$ に対し，$f(a) = g(f \restriction I_R(a))$ が成り立つようなものが存在する．

この定理は，次の集合的な整列順序クラスに対する帰納法と再帰的定義の定理 (定理 8.5) の特別な場合となっている．

$\mathcal{X}$ をクラスとして $\mathcal{R}$ を $\mathcal{X}$ 上のクラス二項関係とする．このとき $\mathcal{R}$ が $\mathcal{X}$ 上の整列順序である，ということを集合でと同様に定義する: $\mathcal{R}$ は，次の**推移律** と**反対称律**を満たすとき，$\mathcal{X}$ 上の**半順序**であるという:

(8.1') すべての $a, b, c \in \mathcal{X}$ に対し，$a\,\mathcal{R}\,b$ かつ $b\,\mathcal{R}\,c$ なら $a\,\mathcal{R}\,c$ が成り立つ．

(8.2') すべての $a \in X$ に対し $a \not\mathcal{R}\, a$ が成り立つ[32]．

$\mathcal{R}$ がクラス $\mathcal{X}$ 上の半順序のとき，$(\mathcal{X}, \mathcal{R})$ は半順序クラスであるともいうことにする[33]．どの $\mathcal{R}$ を問題としているかが文脈から明らかなときには，$\mathcal{X}$ は半順序集合である，ともいう．クラス $\mathcal{X}$ 上の半順序 $\mathcal{R}$ は，

(8.3') すべての $a, b \in \mathcal{X}$ に対し，$a = b$, $a\,\mathcal{R}\,b$, $b\,\mathcal{R}\,a$ のどれかが成り立つ

とき，**全順序** (あるいは**線形順序**) であるという．

$\mathcal{R}$ を $\mathcal{X}$ 上の全順序として $a \in \mathcal{X}$ がクラス $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{X}$ の**最小元**である，とは，$a \in \mathcal{A}$ で，すべての $b \in \mathcal{A}$ に対し，$b \not\mathcal{R}\, a$ となることとする．

$\mathcal{X}$ 上の全順序 $\mathcal{R}$ は，

(8.4') すべての空でない $\mathcal{X}$ の部分集合は最小元を持つ

ときクラス $\mathcal{X}$ 上の**整列順序**である，という．$(\mathcal{X}, \mathcal{R})$ は整列順序クラスである，という言い方もすることにする．(8.4') で，“すべての空でない $\mathcal{X}$ の部分クラス” ではなく “ すべての空でない $\mathcal{X}$ の部分集合” と言っていることに注意する[34]．

$(\mathcal{X}, \mathcal{R})$ が全順序のとき，クラス $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{X}$ が ($\mathcal{X}$ の $\mathcal{R}$ に関する) **始片**であるとは，

(8.5') すべての $b \in \mathcal{A}$ と $c \in \mathcal{X}$ に対し，$c\,\mathcal{R}\,b$ なら，$c \in \mathcal{A}$ となる

こととする．$\mathcal{A}$ は $\mathcal{X}$ と異なるとき真の始片である，という．

$a \in \mathcal{X}$ に対し，

(8.6') $I_{\mathcal{R}}(a) = \{b \in \mathcal{X} : b\,\mathcal{R}\,a\}$

---

(32) ここでも $a\,\mathcal{R}\,b$ を “a は b より ($\mathcal{R}$ に関して) 小さい” ことと理解している (脚注 (31) を参照).

(33) ZFC ではクラスの順序対は扱えるオブジェクトではないことに注意する — $(\mathcal{X}, \mathcal{R})$ は単にひとまとめにして考えるという意味での組にすぎない.

(34) これは，もちろん ZFC の枠組の中ではクラスの量化ができないからである．それにもかかわらず，たとえばすぐ後の補題 8.4 でのように，いくつかの場所では “すべてのクラス $\mathcal{X}$ に対し …” という表明をしているのは，そこでの主張 “…” を $\mathcal{X}$ の定義式ごとに書き出して得られる無限個の類似の主張を束ねたメタセオレムとして扱っているからである．ここでは概念の定義をしているので，このようなメタな (つまり超数学での) 扱いはいずれにしてもできない.

は $\mathcal{X}$ の始片となる．

整列順序クラス $(\mathcal{X}, \mathcal{R})$ が**集合的**である，とは，すべての $a \in \mathcal{X}$ に対し，$I_{\mathcal{R}}(a)$ が集合になることとする．

L-wo-class-0

補題 8.4 $(\mathcal{X}, \mathcal{R})$ を空でない集合的な整列順序クラスとする．このとき，

(1) すべての空でないクラス $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{X}$ に対し，$\mathcal{A}$ の ($\mathcal{R}$ に関する) 最小元が存在する．特に，$\mathcal{X}$ は最小元を持つ．

(2) すべての $\mathcal{X}$ の始片 $\mathcal{A}$ で $\mathcal{A} \neq \mathcal{X}$ となるものに対し，$\mathcal{A} = I_{\mathcal{R}}(a)$ となる $a \in \mathcal{X}$ が存在する．特に $\mathcal{X}$ のすべての真の始片は集合である．

(3) すべての $a \in \mathcal{X}$ に対し，a が $\mathcal{X}$ の最大元でなければ，($\mathcal{R}$ に関し) a の直ぐ次の元が存在する．

(4) 任意の集合 $A \subseteq \mathcal{X}$ に対し，A の $\mathcal{R}$ に関する最小上界 $\sup A \in \mathcal{X}$ が存在する．

証明． (1): $a \in \mathcal{A}$ を任意にとる，$I_{\mathcal{R}}(a) \cap \mathcal{A} = \emptyset$ なら，a は $\mathcal{A}$ の最小元である．そうでなければ，$I_{\mathcal{R}}(a) \cap \mathcal{A}$ は空でない $\mathcal{X}$ の部分集合だから $\mathcal{R}$ に関する最小元 b が存在するが，b は $\mathcal{A}$ の最小元でもある．

(2): $\mathcal{B} = \mathcal{X} \setminus \mathcal{A}$ とすれば，仮定から $\mathcal{A}$ は空でない $\mathcal{X}$ の部分クラスとなるから，(1) により最小元 $a \in \mathcal{B}$ を持つ．このとき $\mathcal{A} = I_{\mathcal{R}}(a)$ である． ❑ (補題 8.4)

前出の定理 8.3 は，次の定理の特別な場合となっている．

定理 8.5 (集合的な整列順序クラスでの帰納法と再帰的定義)
$(\mathcal{X}, \mathcal{R})$ を集合的な整列順序クラスとする．このとき Th-ind-recur-1

(1) $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{X}$ を任意のクラスとするとき，

(8.9) すべての $b \in \mathcal{X}$ に対し，$(\forall a \in \mathcal{A}\,(a\,R\,b \rightarrow a \in \mathcal{A}) \rightarrow b \in \mathcal{A})$ である ind-recur-0

が成り立つなら，$\mathcal{A} = \mathcal{X}$ である．

(2) $\mathfrak{F} = \{f : f$ は関数で $\mathrm{dom}(f)$ は $\mathcal{X}$ の始片 $\}$ とする．$\mathcal{G}$ を $\mathfrak{F}$ 上のクラス関数とすると，$\mathcal{X}$ 上のクラス関数 $\mathcal{F}$ で，

(8.10) $\mathcal{F}(a) = \mathcal{G}(\mathcal{F} \restriction I_{\mathcal{R}}(a))$ ind-recur-0-0

がすべての $a \in \mathcal{X}$ に対し成り立つようなものが一意に存在する．

証明． (1): $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{X}$ に対し，(8.9) が成り立つが $\mathcal{A} \neq \mathcal{X}$ だったとしてみる．このときには $\mathcal{X} \setminus \mathcal{A}$ は空でない $\mathcal{X}$ の部分クラスだから，補題 8.4 (1) により，このクラスの最小元 a_0 が存在する．a_0 の最小性から，(8.9) の前提が成り立つから，(8.9) により，$a_0 \in \mathcal{A}$ が言えてしまうが，これは矛盾である．

(2):

(8.11) $\mathfrak{F}_0 = \{f : f \in \mathfrak{F},\ \forall a \in \mathrm{dom}(f)\ (f(a) = \mathcal{G}(f \restriction I_{\mathcal{R}}(a)))\}$

とする．$f \in \mathfrak{F}_0$ で $b \in \mathrm{dom}(f)$ なら，$I_{\mathcal{R}}(b) \subseteq \mathrm{dom}(f)$ で，$f \restriction I_{\mathcal{R}}(b) \in \mathfrak{F}_0$ となることに注意する．

cl-class-ind-1

Claim 8.5.1 すべての $f, g \in \mathfrak{F}_0$ は共存する．

$\vdash$ 共存しない $\mathfrak{F}_0$ の要素の組があったとして，$\langle f, g\rangle$ をそのような組のうちの一つとする．$\mathrm{dom}(f) \subseteq \mathrm{dom}(g)$ としてよいが，$a \in \mathrm{dom}(f)$ を $f(a) \neq g(a)$ となるもののうち $\mathcal{R}$ に関して最小のものとする (補題 8.4, (2),(1) を参照)．

a の最小性から，すべての $b\ R\ a$ となる $b \in \mathrm{dom}(f)$ に対し，$f(b) = g(b)$ である．したがって，$f \restriction I_{\mathcal{R}}(a) = g \restriction I_{\mathcal{R}}(a)$ だから，$f, g \in \mathfrak{F}_0$ により，

$$f(a) = \mathcal{G}(f \restriction I_{\mathcal{R}}(a)) = \mathcal{G}(g \restriction I_{\mathcal{R}}(a)) = g(a) \tag{8.12}$$

となるが，これは a のとり方に矛盾である． $\dashv$ (Claim 8.5.1)

cl-class-ind-2

Claim 8.5.2 $F \subseteq \mathfrak{F}_0$ に対し $\bigcup F$ はクラス関数で，すべての $a \in \mathrm{dom}(\bigcup F)$ に対し，$(\bigcup F)(a) = \mathcal{G}((\bigcup F) \restriction I_{\mathcal{R}}(a))$ が成り立つ．特に F が集合のときには，$f = \bigcup F$ は $\mathfrak{F}_0$ の要素となり，$a^* = \sup\{\mathrm{dom}(g) : g \in F\}$ として，$\mathrm{dom}(f) = I_{\mathcal{R}}(a^*)$ である．

$\vdash$ $\bigcup F$ がクラス関数となることは，Claim 8.5.1 からよい．主張の残りの部分は容易に示せる (演習)． $\dashv$ (Claim 8.5.2)

cl-class-ind-3

Claim 8.5.3 すべての $a \in \mathcal{X}$ に対し，$f \in \mathfrak{F}_0$ で $a \in \mathrm{dom}(f)$ となるものが存在する．

$\vdash$ $\mathcal{A} = \{a \in \mathcal{X} : f \in \mathfrak{F}_0$ で $a \in \mathrm{dom}(f)$ となるものが存在する $\}$ とすると，$\mathcal{A}$ が (8.9) を満たすことは容易に示せるので，(1) により，$\mathcal{A} = \mathcal{X}$ である $\dashv$ (Claim 8.5.3)

$\mathcal{F} = \bigcup \mathfrak{F}_0$ とすれば，Claim 8.5.1 により，$\mathcal{F}$ はクラス関数である．Claim 8.5.2 により，$\mathcal{F}$ は性質 (8.10) を満たし，Claim 8.5.3 により，$\mathrm{dom}(\mathcal{F}) = \mathcal{X}$ である．よってこの $\mathcal{F}$ は求めるようなものである．

$\mathcal{F}$ の一意性は次のようにして示せる: $\mathcal{F}$ と $\mathcal{F}'$ が両方とも (8.10) を満たすクラス関数だったとすると，$\mathcal{A} = \{a \in \mathcal{X} : \mathcal{F}(a) = \mathcal{F}'(a)\}$ は (8.9) を満たすクラスであることが容易に確かめられるから，定理 8.9, (1) により，$\mathcal{A} = \mathcal{X}$ したがって， $\mathcal{F} = \mathcal{F}'$ である．

□ (定理 8.5)

定理 8.3 は以上で証明された定理 8.5 の特別な場合である．

$\langle X, R_X\rangle$, $\langle X, R_Y\rangle$ が 2 つの半順序のとき，構造 $\langle X, R_X\rangle$ から構造 $\langle X, R_Y\rangle$ への同型写像 $f : \langle X, R_X\rangle \overset{\cong}{\to} \langle X, R_Y\rangle$ は X から Y への**順序同型**であるとも言うことにする．半順序 $\langle X, R\rangle$ に対し，X から X 自身への順序同型 $f : X \to X$ を (X 上の) **自己同型**とよぶ．つまり，f が X 上の自己同型であるとは，f は上単射で，すべての $x, y \in X$ に対し，$x\ R\ y \Leftrightarrow f(x)\ R\ f(y)$ が成り立つことである．

$\mathcal{R}$ と $\mathcal{R}'$ がそれぞれ クラス $\mathcal{X}$ と $\mathcal{X}'$ 上のクラス二項関係で，これらのクラス上の半順序となっているときにも，$(\mathcal{X}, \mathcal{R})$ から $(\mathcal{X}', \mathcal{R}')$ への順序同型となっているクラス関数や $(\mathcal{X}, \mathcal{R})$ 上の自己同型となっているクラス関数の概念を同様に定義する．

wo-rigid

補題 8.6 $(\mathcal{X},\mathcal{R})$ を集合的な整列順序クラスとするとき，$(\mathcal{X},\mathcal{R})$ から $\mathcal{X}$ のある始片 $\mathcal{I}$ への順序同型は，$id_{\mathcal{X}}:\mathcal{X}\rightarrow\mathcal{X}$ に限る[35]．特に $\mathcal{X}$ から $\mathcal{X}$ の真の始片への同型写像は存在せず，$\mathcal{X}$ 上の自己同型は $id_{\mathcal{X}}$ に限る．

証明． $\mathcal{I}$ を $\mathcal{X}$ の始片として，$\mathcal{F}:\mathcal{X}\rightarrow\mathcal{I}$ を同型写像とする．$\mathcal{F}=id_{\mathcal{X}}$ が示せればよい．このためには，

$$(8.13)\quad \mathcal{A}=\{a\in\mathcal{X}\,:\,\mathcal{F}(a)=a\}$$ wo-1

として，$\mathcal{A}$ が (8.9) を満たすことを示せばよい: $a\in\mathcal{X}$ で，すべての $b\in\mathcal{X}$ に対し $b\mathrel{\mathcal{R}}a$ なら $b\in\mathcal{A}$ となるとする．このとき，$\mathcal{F}(a)\mathrel{\mathcal{R}}a$ ではあり得ない: $b=\mathcal{F}(a)\mathrel{\mathcal{R}}a$ だったとすると，仮定から $\mathcal{F}(b)=b=f(a)$ となるから，$\mathcal{F}$ が単射であることに矛盾してしまうからである．一方 $a\mathrel{\mathcal{R}}\mathcal{F}(a)$ でもあり得ない: もし $a\mathrel{\mathcal{R}}\mathcal{F}(a)$ だとすると， $\mathcal{F}$ が上射で $\mathcal{R}$ を保存することから，$b\mathrel{\mathcal{R}}a$ で $\mathcal{F}(b)=a$ となるものが存在しなくてはならないが，これは仮定により $\mathcal{F}(b)=b$ となることと矛盾する．したがって，(8.3') により，$\mathcal{F}(a)=a$ となり，$a\in\mathcal{A}$ である． ❏ (補題 8.6)

wo-2

系 8.7 $(\mathcal{X},\mathcal{R})$ と $(\mathcal{Y},\mathcal{R}')$ を集合的な整列順序クラスとするとするとき，$(\mathcal{X},\mathcal{R})$ から $(\mathcal{Y},\mathcal{R}')$ の始片 $\mathcal{I}$ への順序同型 $\mathcal{F}$ が存在するとすれば，$\mathcal{I}$ と $\mathcal{F}$ は一意に存在する．

L-wo-0

補題 8.8 (1) $(\mathcal{X},\mathcal{R})$ が整列順序クラスで，$\mathcal{Y}\subseteq\mathcal{X}$ なら， $\mathcal{R}'=\mathcal{R}\cap\mathcal{Y}^2$ として，$(\mathcal{X},\mathcal{R})$ の部分順序 $(\mathcal{Y},\mathcal{R}')$ も整列順序クラスである．

(2) $\langle X,R\rangle$ が整列順序集合で，a を X に要素として含まれない集合とするとき，$\tilde{X}=X\cup\{a\}$, $\tilde{R}=R\cup\{\langle x,a\rangle\,:\,x\in X\}$ とすると， $\langle\tilde{X},\tilde{R}\rangle$ も整列順序集合である．

(3) $A=\{\langle u,R_u\rangle\,:\,u\in S\}$ を整列順序集合の族で，任意の u, $v\in S$ に対し，$\langle u,R_u\rangle$ は $\langle v,R_v\rangle$ の始片であるか，$\langle v,R_v\rangle$ が $\langle u,R_u\rangle$ の始片であるか，少なくとどちらかの片方が成り立つとき，$\langle\bigcup S,\bigcup_{u\in S}R_u\rangle$ は整列順序集合である．

9 順序数

transfinite

集合 X が**推移的**であるとは，すべての $x\in X$ と $y\in x$ に対し，$y\in X$ となることである．これは，すべての $x\in X$ に対し $x\subseteq X$ となること，と言い換えることもできる．より一般的に，クラス $\mathcal{X}$ が推移的である，というのを，任意の $x\in\mathcal{X}$ と $y\in x$ に対して $y\in\mathcal{X}$ となること，と定義する．

集合 α が**順序数**であるとは， α は推移的で

(9.1) 二項関係 $\in$ (つまり二項関係 $\in\cap\,\alpha^2=\{\langle i,j\rangle\in\alpha^2\,:\,i\in j\}$) が α 上の整列順序になる ord-a

---

[35] ここで，$id_{\mathcal{X}}$ は $id_{\mathcal{X}}=\{\langle a,a\rangle\,:\,a\in\mathcal{X}\}$ として定義されるクラス関数である．

ことである．基礎の公理を仮定しているときには，$\in$ が α 上の全順序になることが保証されていれば十分である[36]．

L-ord-0

補題 9.1 (0) $\emptyset$ は順序数である．

(1) α が順序数なら $\alpha \cup \{\alpha\}$ も順序数である．

(2) α が順序数なら，任意の $\beta \in \alpha$ も順序数である．したがって，α が順序数なら，$\alpha = \{\beta \in \alpha : \beta$ は順序数$\}$ である．

(3) α が順序数で，$A \subseteq \alpha$ が α の α 自身と異なる始片のとき，ある $\beta \in \alpha$ に対して，$A = \beta$ である．

(4) α が順序数で $\beta \in \alpha$ で $\beta_0 \in \alpha$ が β の直前の元なら，$\beta = \beta_0 \cup \{\beta_0\}$ である．

証明． (0): 順序数の定義の条件はすべて $\emptyset$ に対して無内容的 (vacuously) に成り立つ．

(1), (2): α が順序数なら，$\alpha \cup \{\alpha\}$ も，任意の $\beta \in \alpha$ も推移的だから，補題 8.8l,(1),(2) により，これらは順序数である．

(3): 補題 8.4, (2) により，$A = I_\in(\beta)$ となる $\beta \in \alpha$ がとれるが，α が推移的であることから，$I_\in(\beta) = \{\gamma \in \alpha : \gamma \in \beta\} = \{\gamma : \gamma \in \beta\} = \beta$ である．

(4): β_0 は β の $\in$ に関する直前の元なら， $\beta_0 \in \beta$ で $\beta \setminus \{\beta_0\} = \{\gamma \in \beta : \gamma \in \beta_0\} = \{\gamma : \gamma \in \beta_0\} = \beta_0$ である． □ (補題 9.1)

$$\text{(9.2)} \qquad \mathrm{On} = \{\alpha : \alpha \text{ は順序数 }\}$$ on-0

とする．

Th-ord-0

定理 9.2 (1) α と β を任意の異なる 2 つの順序数とするとき，$\alpha \in \beta$ か $\beta \in \alpha$ のいずれかが成り立つ．

(2) On は推移的で，$\in$ は On 上の集合的な整列順序である．

証明． (1): 補題 9.1, (3) により，α が β の真の始片となるか，あるいは，β が α の真の始片となるかのどちらかが成り立つことが示せればよい．$A = \alpha \cap \beta$ とすると，A は推移的だから，A は α の始片で， β の始片でもある．もし α と β が互いの真の始片になっていないとすると， A は α の真の始片で，β の真の始片でもある．したがって，補題 9.1, (3) により $\alpha' \in \alpha$, $\beta' \in \beta$ で，$\gamma = \alpha'$, $\gamma = \beta'$ となるものがあるが，このとき $\alpha = \beta$ となるが，$\alpha' \notin A$, $\beta' \notin A$ でなくてはならないのでこれは矛盾である．

(2): $\alpha \in \mathrm{On}$ で $\beta \in \alpha$ なら補題 9.1, (2) により $\beta \in \mathrm{On}$ である．したがって On は推移的である．

α, β, γ を順序数として，$\alpha \in \beta$, $\beta \in \gamma$ なら， γ が推移的であることから，$\alpha \in \gamma$ である．$\alpha \notin \alpha$ は，$\in$ が α 上整列順序であることからよい．したがって，$\in$ は On 上の半順序

[36] ここで，特に「整列順序になる」として定義しているのは，基礎の公理を除いた体系ででも順序数の理論が展開できるようにするためである．この定義の仕方は，基礎の公理の下では冗長なものになるが，そこでも有効である．

であることがわかったが，(1) から，$\in$ は On 上の全順序である．$\in$ が On 上の整列順序であることは，a を任意の，空でない，順序数の集合とするとき，α を a の任意の要素として，$A \cap \alpha = \emptyset$ なら α は A の $\in$ に関する最小元である．$A \cap \alpha \neq \emptyset$ なら，$A \cap \alpha$ は α の部分集合として $\in$ に関する最小元 β を持つが，この β は A の $\in$ に関する最小元でもある．

明らかに $\in$ はどのクラスに対しても集合的である． ❑ (補題 9.2)

$\alpha, \beta \in \mathrm{On}$ に対し，$\alpha \in \beta$ を $\alpha < \beta$ ともあらわすことにする．また $\alpha \leq \beta$ で "$\alpha = \beta$ または $\alpha < \beta$" をあらわす．

定理 9.2 により，$<$ は On 上の集合的な整列順序である．補題 9.1 により，任意の $\alpha \in \mathrm{On}$ に対し，$\alpha \cup \{\alpha\}$ は，On で，$<$ に関する α の次の元となっている．そこで，自然数のときと同様にこの順序数を $\alpha + 1$ とあらわすことにする．$\alpha + 1$ という形にあらわされない順序数を**極限順序数**とよぶ．極限順序数の全体からなるクラスを Lim であらわす．

(9.3) $\mathrm{Lim} = \{\alpha \in \mathrm{On} : \alpha \text{ は極限順序数}\}$ ord-a-0

である．これに対し，$\alpha + 1$ という形の順序数のことを**非極限順序数**，は，α の次の順序数などとよぶことにする．

rigid-0

演習問題 9.3 f がある順序数 α から順序数 β の始片 A への $\in$ に関する順序同型写像のとき $\alpha \leq \beta$ で，$f = id_\alpha$ である．

特に $f : \alpha \to \beta$ が順序同型のときには，$\alpha = \beta$ で $f = id_\alpha$ である．

証明． 系 8.7 から従う． ❑ (演習問題 9.3)

L-ord-2

補題 9.4 A を順序数からなる集合とするとき $\bigcup A$ は再び順序数となる．A が最大元を持たないときには，$\bigcup A$ は A の要素をすべて要素として含む，$\in$ に関して最小の順序数となる．

証明． $\bigcup A$ は On の始片となるから，補題 8.4,(2) により，$\bigcup A = I_\in(\alpha) = \alpha$ となる $\alpha \in \mathrm{On}$ が存在する (定理 9.2, (2) により $(\mathrm{On}, \in)$ に補題 8.4 が適用できることに注意する)．

A が $\in$ に関する最大元を持たないときには，すべての $\beta \in A$ に対し，$\beta \in \bigcup A = \alpha$ となる．$\beta < \alpha$ なら，$\beta \in \bigcup A$ だから，ある $\alpha_0 \in A$ で $\beta \in \alpha_0$ となるものがあるが，この α_0 に対し，$\alpha_0 \notin \beta$ である． ❑ (補題 9.4)

次の補題は，定理 9.2 と補題 8.4, (1) から直ちに導かれる．

ord-class-1

補題 9.5 $\mathcal{X} \subseteq \mathrm{On}$ を空でないクラスとするとき，$\mathcal{X}$ は最小元を持つ． ❑

On-prop-class

補題 9.6 On は真のクラスである．

証明． $\alpha = \mathrm{On}$ となる集合 α が存在したとすると，α は推移的で，$\in$ は α 上の整列順序となっているので，α は順序数である．したがって $\alpha \in \mathrm{On}$ したがって $\alpha \in \alpha$ となるが，これは α が $\in$ に関し整列されていることに矛盾である． ❑ (補題 9.6)

定理 9.2 により，次の定理は，定理 8.5 の特別な場合である:

定理 9.7 (順序数のクラス上の $\in$-帰納法と再帰的定義) class-induction

(1) 任意の順序数からなるクラス $\mathcal{X}$ に対し，

(9.4) すべての $\beta \in \mathrm{On}$ に対し，$(\forall\alpha\,(\alpha < \beta \rightarrow \alpha \in \mathcal{X}) \rightarrow \beta \in \mathcal{X})$ となる ind-0

が成り立つなら，$\mathcal{X} = \mathrm{On}$ である．

(2) $\mathfrak{F} = \{f : f$ は関数で $\mathrm{dom}(f) \in \mathrm{On}\}$ とする．$\mathcal{G}$ を $\mathfrak{F}$ 上のクラス関数とすると，On 上のクラス関数 $\mathcal{F}$ で，

(9.5) $\mathcal{F}(\alpha) = \mathcal{G}(\mathcal{F} \restriction \alpha)$ ind-0-0

がすべての α に対し成り立つようなものが一意に存在する．

T-wo-class-1

定理 9.8 すべての集合的な整列順序クラス $(\mathcal{X}, \sqsubset)$ に対し，On の始片 $\mathcal{I}$ と (クラス) 同型写像 $\mathcal{F} : (\mathcal{I}, \in) \overset{\cong}{\rightarrow} (\mathcal{X}, \sqsubset)$ が一意に存在する．

上の定理での $\mathcal{I}$ は，補題 8.4, (2) と定理 9.2 により，ある $\alpha^* \in \mathrm{On}$ に対して $I_\in(\alpha^*)$ という形をしている (つまり $\mathcal{I} = \alpha^*$) か，あるいは $\mathcal{I} = \mathrm{On}$ となるかのどちらかなので，集合的な整列順序クラス，$(\mathcal{X}, \sqsubset)$ は， (1) ある $\alpha^* \in \mathrm{On}$ に対し $\langle\alpha^*, \in\rangle$ と同型であるか，(2) $(\mathrm{On}, \in)$ と同型であるかのどちらかである．(1) の場合，定理から α^* は一意に決まるが，この α^* を $(\mathcal{X}, \sqsubset)$ の**順序型**とよび，$otp(\langle\mathcal{X}, \sqsubset\rangle)$, あるいは，$\sqsubset$ が何か明らかなときには，$otp(\mathcal{X})$ とあらわす.

定理 9.8 の証明. $\mathcal{X} = \emptyset$ なら $\mathcal{I} = \emptyset$, $\mathcal{F} = \emptyset$ とすればよいから，$\mathcal{X} \neq \emptyset$ としてよい．$\mathcal{X}$ の $\sqsubset$ に関する最小元を x_0 とする (補題 8.4, (1))．

$\tilde{\mathcal{F}} : \mathrm{On} \rightarrow \mathcal{X}$ を次のように定義する．

(9.6) $\mathcal{F}(\emptyset) = x_0$; on-1

(9.7) $\tilde{\mathcal{F}} \restriction \alpha$ が α $(= I_\in(\alpha))$ と $\mathcal{X}$ のある真の始片 $I_\sqsubset(x)$ の間の同型写像となっているときには，$\tilde{\mathcal{F}}(\alpha) = \alpha$; on-2

(9.8) それ以外の場合には $\tilde{\mathcal{F}}(\alpha) = x_0$.[37] on-3

ある $\alpha \neq 0$ に対し $\tilde{\mathcal{F}}(\alpha) = x_0$ となるときには，$\alpha^* = \min\{\alpha \in \mathrm{On} \setminus 1 : \tilde{\mathcal{F}}(\alpha) = x_0\}$ として， $\mathcal{I} = \alpha^*$, $\mathcal{F} = \tilde{\mathcal{F}} \restriction \alpha^*$ とし，そうでないときには，$\mathcal{I} = \mathrm{On}$, $\mathcal{F} = \tilde{\mathcal{F}}$ とすれば，これらの $\mathcal{I}$, $\mathcal{F}$ は求めるようなものである．一意性は系 8.7 によりよい． ❑ (定理 9.8)

inc-enum

系 9.9 (1) 任意の真のクラス $\mathcal{X} \subseteq \mathrm{On}$ に対し，$\mathcal{X}$ は $\mathcal{X} = \{\eta_\alpha : \alpha \in \mathrm{On}\}$ と小さい順に枚挙できる．つまり，クラス関数 $\mathcal{F}_X : \mathrm{On} \rightarrow \mathcal{X}$ で，すべての $\alpha, \beta \in \mathrm{On}$ に対し，$\mathcal{F}_X(\alpha) < \mathcal{F}_X(\beta)$ が成り立ち，すべての $\eta \in \mathcal{X}$ に対し $\alpha \in \mathrm{On}$ で $\mathcal{F}_X(\alpha) = \eta$ となるものが存在する．

---

[37] このような $\tilde{\mathcal{F}}$ は，定理 9.7, (2)で，$\mathcal{G} = \{\langle f, x\rangle \in \mathfrak{F} \times \mathcal{X} : (f = \emptyset$ かつ $x = x_0)$ または f は $\mathrm{dom}(f)$ から $\mathcal{X}$ の真の始片 $I_\sqsubset(x)$ への $\in$ と $\sqsubset$ に関する同型写像; またはそれ以外の場合で $x = x_0\}$ として，$\tilde{\mathcal{F}}(\alpha) = \mathcal{G}(\tilde{\mathcal{F}} \restriction \alpha)$ がすべての α に対し成り立つようなものとしてとればよい．

(2) $\mathcal{X} \subseteq \mathrm{On}$ が真のクラスとなるのは $\mathcal{X}$ が On で共終的である (つまりどんな $\alpha \in \mathrm{On}$ に対しても，$\alpha \leq \beta$ となる $\beta \in \mathcal{X}$ が存在する) ちょうどそのときである．

(3) 任意の集合 $x \subseteq \mathrm{On}$ に対し，x の小さい順の枚挙 $x = \{\eta_\alpha : \alpha \in \delta\}$ が存在する．ここで，$\delta \in \mathrm{On}$ は x に対して一意に決まる．

証明. ❏ (系 9.9)

otp

演習問題 9.10 $\langle a, r\rangle$ を整列順序集合とする．$b \subseteq a$ とすると，補題 8.8, (1) により a の部分順序としての b も整列順序集合になるが，$otp(\langle b, r\rangle) \leq otp(\langle a, r\rangle)$ である．

証明. b から a の r に関する始片への順序同型を再帰的に定義できる． ❏ (演習問題 9.10)

10　順序数算術

ord-arith

11　整順関係とモストフスキー崩壊

mostowski-colapse

集合 X 上の二項関係 R は，

$$(11.1)\quad (\forall Y \subseteq X)\Big(Y \neq \emptyset \ \rightarrow\ (\exists y \in Y)(\neg\exists z \in Y)(z\ R\ y)\Big)$$ well-founded-rel

を満たすとき，**整順的**であるという．(11.1) でのような y のことを Y の R に関する**極小元**とよぶことにする．

クラス $\mathcal{X}$ 上の (クラス) 二項関係 $\mathcal{R}$ が **集合的**であるとは，すべての $x \in \mathcal{X}$ に対し，

$$(11.2)\quad ext_{\mathcal{R}}(x) = \{y \in \mathcal{X} : y\ \mathcal{R}\ x\}$$ wf-0

が集合になることとする． $\mathcal{X}$ が集合のときには，$\mathcal{X}$ 上の二項関係はすべて集合的である．

$\mathcal{R}$ が $\mathcal{X}$ 上**整順的**であるとは，すべての集合 $x \subseteq \mathcal{X}$ に対し，x の $\mathcal{R}$ に関する極小元 y (つまり，$y \in x$ で任意の $z \in x$ に対し，$z \not\mathcal{R}\ x$ となるようなもの) が存在することとする．この定義は，集合が整順的であることの定義の拡張になっていることに注意する．集合的で整順的なクラスに対しても，定理 9.7 と同様の帰納法原理や，クラス関数の再帰的定義の原理が成立する (定理 11.3).

L-wf-a

補題 11.1 $\mathcal{X}$ をクラスとして $\mathcal{R}$ を X 上の整順的で集合的なクラス二項関係とする．このとき，

(1) 任意の $x \in \mathcal{X}$ に対し，$x \not\mathcal{R}\ x$ である．

(2) 任意のクラス $\mathcal{Y} \subseteq \mathcal{X}$ に対し，$\mathcal{Y} \neq \emptyset$ なら，$\mathcal{Y}$ の $\mathcal{R}$ に関する極小元 (つまり $y \in \mathcal{Y}$ で，$y' \in \mathcal{X}$ で $y'\ \mathcal{R}\ y$ となるものの存在しないようなもの) が存在する[38]．

---

[38] $\mathcal{R}$ が $\mathcal{X}$ 上の整順的な関係であることの定義での，“すべての集合 $x \subseteq \mathcal{X}$ に対し”，は通常の量化であるのに対し，補題 11.1, (2) での “任意のクラス $\mathcal{Y} \subseteq \mathcal{X}$ に対し” は論理式としては表現できず，この補題は実際には，$\mathcal{Y}$ の定義式ごとの無限個の補題を束ねた meta-lemma になっていることに注意する．

証明. (1): もし $x \mathrel{\mathcal{R}} x$ なら，$\{x\}$ は極小元を持たない $\mathcal{X}$ の空でない部分集合となってまう．

(2): 以下の $trcl\,\mathcal{R}(x)$ を用いて，補題 9.5 と同様に示せる (演習). ❑ (補題 11.1)

クラス $\mathcal{X}$ と $\mathcal{X}$ 上の集合的な二項関係 $\mathcal{R}$ が与えられたとき，$x \in \mathcal{X}$ と $n \in \omega$ に対し，$ext^n_{\mathcal{R}}(x)$ を，

$$(11.3)\quad ext^0_{\mathcal{R}}(x) = \{x\}; \qquad \text{wf-1}$$

$$(11.4)\quad ext^{n+1}_{\mathcal{R}}(x) = \bigcup\{ext_{\mathcal{R}}(y) : y \in ext^n_{\mathcal{R}}(x)\} \qquad \text{wf-2}$$

により定義して，x の $\mathcal{R}$ に関する**推移的閉包**と**弱推移的閉包**をそれぞれ

$$(11.5)\quad trcl_{\mathcal{R}}(x) = \bigcup_{n\in\omega} ext^n_{\mathcal{R}}(x); \qquad \text{wf-3}$$

$$(11.6)\quad trcl^-_{\mathcal{R}}(x) = \bigcup_{n\in\omega\setminus 1} ext^n_{\mathcal{R}}(x) \qquad \text{wf-4}$$

で定義する．$\mathcal{R}$ が整順的なら $trcl^-_{\mathcal{R}}(x) = trcl_{\mathcal{R}}(x) \setminus \{x\}$ である (演習).

クラス $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{X}$ が $\mathcal{R}$ に関して**推移的** であるというのを，

$$(11.7)\quad \text{すべての } y \in \mathcal{A} \text{ と } y' \mathrel{\mathcal{R}} y \text{ となる } y' \in \mathcal{X} \text{ に対し，} y' \in \mathcal{A} \text{ となる} \qquad \text{wf-5}$$

ことと定義する．

$\mathcal{X} = V$, $\mathcal{R} = \in = \{\langle x, y\rangle : x \in y\}$ とするとき，$trcl_{\in}(x)$ を $trcl(x)$ とも書く．$\mathcal{A}$ が $\in$ に関して推移的であることを，単に $\mathcal{A}$ は推移的である，という．

L-wf-0

補題 11.2 $\mathcal{R}$ をクラス $\mathcal{X}$ 上の集合的なクラス二項関係とする．このとき，

(1) すべての $x \in \mathcal{X}$ に対し，$trcl_{\mathcal{R}}(x)$ も $trcl^-_{\mathcal{R}}(x)$ も $\mathcal{R}$ に関して推移的な $\mathcal{X}$ の部分集合である．$trcl_{\mathcal{R}}(x)$ は x を要素として含む推移的な集合のうち，$\subseteq$ に関して最小のもので，$trcl^-_{\mathcal{R}}(x)$ は $ext_{\mathcal{R}}(x)$ を部分集合として含む推移的な集合のうち，$\subseteq$ に関して最小のものである．

(2) すべての $x \in \mathcal{X}$ に対し，

$$(11.8)\quad trcl_{\mathcal{R}}(x) = \bigcup\{trcl_{\mathcal{R}}(y) : y \in ext_{\mathcal{R}}(x)\} \cup \{x\} \qquad \text{wf-5-0}$$

である．

(3) $a \subseteq \mathcal{X}$ が $\mathcal{R}$ に対し推移的である $\Leftrightarrow$ すべての $x \in a$ に対し $trcl_{\mathcal{R}}(x) \subseteq a$ である．

証明. (1): $trcl_{\mathcal{R}}(x)$ について示す．$trcl^-_{\mathcal{R}}(x)$ についても同様である．(11.3), (11.4) から，すべての $n \in \omega$ に対し， $ext^n_{\mathcal{R}}(x) \subseteq \mathcal{X}$ となるので，$trcl_{\mathcal{R}}(x) = \bigcup_{n\in\omega} ext^n_{\mathcal{R}}(x) \subseteq \mathcal{X}$ である． $y \in trcl_{\mathcal{R}}(x)$ なら，ある $n \in \omega$ に対して $y \in ext^n_{\mathcal{R}}(x)$ となるので，$y' \in \mathcal{X}$, $y' \mathcal{R} y$ なら，$y' \in ext^{n+1}_{\mathcal{R}}(x) \subseteq trcl_{\mathcal{R}}(x)$ である．

(2), (3) は演習. ❑ (補題 11.2)

$\mathcal{X} = V$, $\mathcal{R} = \in$ のとき，$trcl_{\mathcal{R}}(x)$ は通常の x の推移的閉包 $trcl(x)$ と一致する．

V 上のクラス関係 $\in$ は集合的である．基礎の公理 (正則性公理) は，$\in$ が整順的であることを主張するものとなっている．

以下の定理は定理 9.7 の拡張となっており，その証明のアイデアも，定理 8.5 のそれとほとんど同じである．

定理 11.3 (集合的で整順的なクラス関係での帰納法と再帰的定義) wf-class-ind
$\mathcal{X}$ をクラスとして $\mathcal{R}$ を $\mathcal{X}$ 上の集合的で整順的なクラス二項関係とする．

(1) 任意の $\mathcal{Y} \subseteq \mathcal{X}$ に対し，

(11.9) すべての $y \in \mathcal{X}$ に対し，$(\forall x\ (x\ \mathcal{R}\ y \rightarrow x \in \mathcal{Y}) \rightarrow y \in \mathcal{Y})$ となる(39) wf-ind-0

が成り立つなら，$\mathcal{Y} = \mathcal{X}$ である．

(2) $\mathfrak{F} = \{f\ :\ f$ は関数で, $\mathrm{dom}(f)$ は $\mathcal{R}$ に関して推移的な $\mathcal{X}$ の部分集合である $\}$ として，$\mathcal{G}$ を $\mathfrak{F} \times \mathcal{X}$ 上のクラス関数とするとき，$\mathcal{X}$ 上のクラス関数 $\mathcal{F}$ で，すべての $x \in \mathcal{X}$ に対し $\mathcal{F}(x) = \mathcal{G}(\mathcal{F} \restriction trcl^{-}_{\mathcal{R}}(x), x)$ となるものが一意に存在する(40)．

証明． (1): 上でのような $\mathcal{X}, \mathcal{R}$ に対し，$\mathcal{Y} \subseteq \mathcal{X}$ が (11.9) を満たすが，$\mathcal{X} \setminus \mathcal{Y} \neq \emptyset$ だったとして，x を $\mathcal{R}$ に関する $\mathcal{X} \setminus \mathcal{Y}$ の極小元とすると (補題 11.1, (2) を参照)，極小性から x は $\mathcal{Y}$ に対し，(11.9) の前提を満たすから，(11.9) により $x \in \mathcal{Y}$ となってしまい矛盾である．

(2):

$$\begin{aligned}(11.10)\quad \mathfrak{F}' = \{f\ :\ &\text{ある } x \in \mathcal{X} \text{ に対し } \mathrm{dom}(f) = trcl_{\mathcal{R}}(x),\\ &\text{すべての } y \in \mathrm{dom}(f) \text{ に対し } f(y) = \mathcal{G}(f \restriction trcl^{-}_{\mathcal{R}}(y))\}\end{aligned}$$ wf-6

とする．補題 11.2, (1) により $\mathfrak{F}' \subseteq \mathfrak{F}$ である．

Cl-wf-cl-1

Claim 11.3.1 $f \in \mathfrak{F}'$ で $y \in \mathrm{dom}(f)$ なら，$f \restriction trcl_{\mathcal{R}}(y) \in \mathfrak{F}'$ である．

$\vdash$ 補題 11.2, (1),(3) により，$trcl_{\mathcal{R}}(y) \subseteq \mathrm{dom}(f)$ である．したがって，$f' = f \restriction trcl_{\mathcal{R}}(y)$ とすると，$\mathrm{dom}(f') = trcl_{\mathcal{R}}(y)$ で，$z \in \mathrm{dom}(f')$ に対し，$trcl^{-}_{\mathcal{R}}(z) \subseteq trcl^{-}_{\mathcal{R}}(y) = \mathrm{dom}(f')$ だから，$f \in \mathfrak{F}'$ により，

$$(11.11)\quad f'(z) = f(z) = \mathcal{G}(f \restriction trcl^{-}_{\mathcal{R}}(z), z) = \mathcal{G}(f' \restriction trcl^{-}_{\mathcal{R}}(z), z),$$

したがって $f' \in \mathfrak{F}'$ である． $\dashv$ (Claim 11.3.1)

Cl-wf-cl-2

Claim 11.3.2 すべての $f, g \in \mathfrak{F}'$ は共存する．

$\vdash$ 主張が成立しないとして，$\langle f, g \rangle$ を $\mathfrak{F}'$ の共存しない要素の組で，特に f はそのような組の 1 番目の成分のうち $\mathcal{R}$ に関して極小であるようなものとする．特に，$\langle f, g \rangle$ は，共存しない $\mathcal{F}'$ の要素の組で，

(11.12) $\mathrm{dom}(f) = trcl_{\mathcal{R}}(x)$ として，任意の $y \in \mathcal{X}$ で $y\ \mathcal{R}\ x$ となるものに対し $f \restriction trcl_{\mathcal{R}}(x)$ wf-7

(39) $\mathcal{Y} = \{x\ :\ \varphi(x)\}$ のときには，これは，“$(\forall x\ (x\ \mathcal{R}\ y \rightarrow \varphi(x)) \rightarrow \varphi(y)$” を主張している．

(40) $\mathcal{F}(x) = \mathcal{G}(\mathcal{F} \restriction trcl^{-}_{\mathcal{R}}(x))$ でなく $\mathcal{F}(x) = \mathcal{G}(\mathcal{F} \restriction trcl^{-}_{\mathcal{R}}(x), x)$ としているのは，x が $trcl^{-}_{\mathcal{R}}(x)$ から一意に再構成できるとは限らないからである．たとえば $\alpha_0, \alpha_1, \beta \in \mathrm{On}$ で，$\alpha_0 < \alpha_1 < \beta$ とすると，$\beta \setminus \alpha_0 \neq \beta \setminus \alpha_1$ だが，$trcl^{-}_{\in}(\beta \setminus \alpha_0) = \beta = trcl^{-}_{\in}(\beta \setminus \alpha_1)$ である．

と g は共存する．

補題 11.2, (2) と $\mathfrak{F}'$ の定義により，

(11.13) $f = \bigcup\{f \restriction trcl_{\mathcal{R}}(y) : y \in ext_{\mathcal{R}}(x)\} \cup \{\langle x, \mathcal{G}(f \restriction trcl^-_{\mathcal{R}}(x), x)\rangle\}$ wf-8

となるが，(11.12) により，すべての $y \in ext_{\mathcal{R}}(x)$ に対し，$f \restriction trcl_{\mathcal{R}}(y)$ は g と共存する．したがって $x \notin \mathrm{dom}(g)$ なら，f は g と共存することになり矛盾である．

$x \in \mathrm{dom}(g)$ なら，$trcl_{\mathcal{R}}(x) \subseteq \mathrm{dom}(g)$ だから，

(11.14) $f \restriction trcl^-_{\mathcal{R}}(x) = \bigcup\{f \restriction trcl_{\mathcal{R}}(y) : y \in ext_{\mathcal{R}}(x)\} = \bigcup\{g \restriction trcl_{\mathcal{R}}(y) : y \in ext_{\mathcal{R}}(x)\} = g \restriction trcl^-_{\mathcal{R}}(x)$

(11.12) と (11.12) により，$f(x) = g(x)$ となり，このときも f と g は共存することになってしまい $\langle f, g\rangle$ の選び方に矛盾である． $\dashv$ (Claim 11.3.2)

Cl-wf-cl-3

Claim 11.3.3 すべての $x \in \mathcal{X}$ に対し，$f \in \mathfrak{F}'$ で $\mathrm{dom}(f) = trcl_{\mathcal{R}}(x)$ となるものが存在する．

$\vdash$ 主張が成り立たないと仮定して，$x \in \mathcal{X}$ を，$\mathrm{dom}(f) = trcl_{\mathcal{R}}(x)$ となるような $f \in \mathfrak{F}'$ の存在しないようなもののうち $\mathcal{R}$ に関して極小なもの，とする．x の極小性から，各 $y \in ext_{\mathcal{R}}(x)$ に対し，$f_y \in \mathfrak{F}'$ で $\mathrm{dom}(f_y) = trcl_{\mathcal{R}}(y)$ となるようなものを選ぶ (実は Claim 11.3.2 によりそのような f_y は一意に存在する)．このとき，

(11.15) $f^* = \bigcup\{f_y : y \in ext_{\mathcal{R}}(x)\} \cup \{\langle x, \mathcal{G}(\{f_y : y \in ext_{\mathcal{R}}(x)\}, x)\rangle\}$

とすれば，$f^* \in \mathfrak{F}'$ で $\mathrm{dom}(f^*) = trcl_{\mathcal{R}}(x)$ となるが，これは x の選び方に矛盾である． $\dashv$ (Claim 11.3.3)

$\mathcal{F} = \bigcup \mathfrak{F}'$ とすれば，$\mathfrak{F}'$ の定義と，Claim 11.3.2 および Claim 11.3.3 により，この $\mathcal{F}$ が求めるようなものである． □ (定理 11.3)

集合 X 上の二項関係 E と $x \in X$ に対し，

(11.16) $ext_E(x) = \{y \in X : y\ E\ x\}$

とする．$ext_E(x)$ は x の E に関する**外延**とよばれる．E が**外延的**であるとは，すべての $x, y \in X$ に対し，

(11.17) $x = y \;\Leftrightarrow\; ext_E(x) = ext_E(y)$

が成り立つこととする．x 上で $\in$ が外延的になるとき，x は**外延的**であるということにする[41]．

transitive-extensional

補題 11.4 x が推移的なら，x は外延的である．つまり x が推移的なら，$\mathcal{L}_\varepsilon$-構造 $\langle x, \in\rangle$ は外延性公理のモデルになる．

[41] x が外延的とは，$\langle x, \in\rangle$ が $\mathcal{L}_\varepsilon$-構造として外延性公理を満たすことに他ならない．

証明. x を推移的とする．$\langle x, \in\rangle$ は $\langle x, \in \cap x^2\rangle$ の略記だったことを思い出しておく．

$y \in x$, $z \in x$ とする．このとき，x の推移性から $y \subseteq x$, $z \subseteq x$ である．“$=$” が外延性公理を満たすことから，

$$ext_{\in\cap x^2}(y) = y,\ ext_{\in\cap x^2}(z) = z$$

である．したがって，

$$y = z \Leftrightarrow ext_{\in\cap x^2}(y) = ext_{\in\cap x^2}(z)$$

である． ❑ (補題 11.4)

定理 11.5 (モストフスキーの崩壊補題) E を集合 X 上の外延的な整順的関係とする．このとき，推移的な集合 M と写像 $\pi : X \to M$ で， T-mostowski

(11.18) $\pi : \langle X, E\rangle \overset{\cong}{\to} \langle M, \in\rangle$

となるものが一意に存在する．

上の定理は，以下のようなこの定理のクラス版と同様に証明できる．

定理 11.6 (クラス版モストフスキーの崩壊補題) $\mathcal{R}$ をクラス $\mathcal{X}$ 上の集合的で外延的な整順的クラス関係とする．このとき，推移的なクラス $\mathcal{M}$ とクラス写像 $\Pi : \mathcal{X} \to \mathcal{M}$ で， T-class-mostowski

(11.19) $\Pi : \langle \mathcal{X}, \mathcal{R}\rangle \overset{\cong}{\to} \langle \mathcal{M}, \in\rangle$

となるものが一意に存在する．

証明. クラス関数 $\Pi : \mathcal{X} \to V$ を，$a \in \mathcal{X}$ に対し

(11.20) $\Pi(a) = \{\Pi(b) : b \in ext_{\mathcal{R}}(a)\}$ wf-9

として定義できる．

定理 11.3, (2) との対応では，ここでの $\mathcal{X}$ に対し，$\mathfrak{F}$ を定理 11.3, (2) でと同じようにとり，$\mathfrak{F} \times \mathcal{X}$ 上のクラス関数 $\mathcal{G}$ を $\langle f, a\rangle \in \mathfrak{F} \times \mathcal{X}$ に対し，

(11.21)
$$\mathcal{G}(f, a) = \begin{cases} \{f(b) : b \mathrel{\mathcal{R}} a\}, & \mathrm{dom}(f) = trcl^{-}_{\mathcal{R}}(a) \text{ のとき;} \\ \emptyset, & \text{それ以外のとき} \end{cases}$$

として定義して．この $\mathcal{G}$ に対し，定理 11.3 で一意の存在の保証されている $\mathcal{F}$ を Π としてとればよい．

定理 11.3、(2) での $\mathcal{F}$ の一意性から，(11.20) を満たすような Π の一意性が言える．$\mathcal{R}$ の外延性から，Π が単射になることが示せる．$\mathcal{M} = \Pi''\mathcal{X}$ とすれば，$\Pi : \langle \mathcal{X}, \mathcal{R}\rangle \overset{\cong}{\to} \langle \mathcal{M}, \in\rangle$ となり $\mathcal{M}$ が推移的になることは容易に示せる (演習)． ❑ (定理 11.6)

12 整列化定理

well-ordering-th

次の定理の証明では選択公理が本質的に用いられている (以下の 系 12.2 を参照).

定理 12.1 (整列化定理) (ZFC – AF) すべての集合 x に対し，順序数 α で α から x への上単射の存在するようなものがとれる．特に，すべての集合上に整列順序が存在する． well-ordering-th-1

証明. x を任意の集合とする．$x = \emptyset$ なら，$\emptyset$ は x 上の整列順序だから，定理の主張は成り立つので，$x \neq \emptyset$ とする．選択公理により，選択関数 $f : \mathcal{P}(x) \setminus \{\emptyset\} \to x$ が存在する ($\bigcup(\mathcal{P}(x) \setminus \{\emptyset\}) = x$ に注意)．∞ を $\infty \notin x$ となる任意の集合とする (定理 5.3).

$\mathcal{G} : \mathrm{On} \to x \cup \{\infty\}$ を

$$(12.1) \quad \mathcal{G}(\alpha) = \begin{cases} f(x \setminus \mathrm{range}(\mathcal{G} \restriction \alpha)), & x \setminus \mathrm{range}(\mathcal{G} \restriction \alpha) \neq \emptyset \text{ のとき;} \\ \infty, & \text{そうでないとき.} \end{cases}$$ wot-1

として定義する．

C-wot-1

Claim 12.1.1 $\alpha, \beta \in \mathrm{On}, \alpha \neq \beta$ に対し，$\mathcal{G}(\alpha), \mathcal{G}(\beta) \in x$ なら，$\mathcal{G}(\alpha) \neq \mathcal{G}(\beta)$ である．

$\vdash$ たとえば $\alpha < \beta$ とすると，(12.1) により，$\mathcal{G}(\alpha) \in \mathrm{range}(\mathcal{G} \restriction \beta)$ で $\mathcal{G}(\beta) \notin \mathrm{range}(\mathcal{G} \restriction \beta)$ だから， $\mathcal{G}(\alpha) \neq \mathcal{G}(\beta)$ である． $\dashv$ (Claim 12.1.1)

C-wot-2

Claim 12.1.2 $\mathcal{G}(\delta) = \infty$ となる $\delta \in \mathrm{On}$ が存在する．

$\vdash$ そのような δ が存在しなかったとすると，Claim 12.1.1 により，$\mathcal{G}$ は On 上の x への単射的なクラス関数となるから，$\mathcal{G}$ の像 $\subseteq x$ から On への $\mathcal{G}$ の逆対応を考えると，置換公理により On が集合となることが示せてしまい矛盾である． $\dashv$ (Claim 12.1.2)

Claim 12.1.2 により，$\delta^* = \min\{\delta \in \mathrm{On} : \mathcal{G}(\delta) = \infty\}$ とすると， $g^* = \mathcal{G} \restriction \delta^*$ は δ^* から x への上単射となる．

x 上の関係 $\sqsubset$ を $u, v \in x$ に対し，

$$(12.2) \quad u \sqsubset v \ \Leftrightarrow \ \text{ある } \alpha < \beta < \delta \text{ に対し，} g^*(\alpha) = u, g^*(\beta) = v \text{ となる}$$

として定義すると，$\sqsubset$ は x 上の整列順序である **(演習)**. ❏ (定理 12.1)

well-ordering-th-2

系 12.2 ZFC から，選択公理と基礎の公理 (AF) を除いて得られる体系 ZF – AF 上，選択公理は，定理 12.1 の主張と同値である．

証明. 定理 12.1 の証明により ZF – AF に選択公理を加えた体系で定理 12.1 がが示せる．

逆に，ZF – AF 上で選択公理が定理 12.1 の主張から導かれることは，次のようにして示せる x を $\emptyset$ を含まない任意の集合 (族) とする．このとき，仮定から $\bigcup x$ 上の整列順序 r が存在する．関数

$$(12.3) \quad f = \{\langle u, v\rangle \in x \times (\textstyle\bigcup x) : v \text{ は } u \subseteq (\textstyle\bigcup x) \text{ の } r \text{ に関する最小元 }\}$$

は，x 上の選択関数である． ❑ (系 12.2)

定理 12.1 の主張の後半 “すべての集合上に整列順序が存在する” は以下の補題 8.8, (3) を用いることで，順序数と順序数上の再帰的定義を経由せずに証明できる．これを用いると，系 12.2 は，Z − AF 上の選択公理と整列順序定理の同値性の主張に強めることができる．

集合 x に対し，x の**濃度** $|x|$ を，

$$(12.4)\quad |x| = \min\{\alpha : \alpha \text{ は，ある } x \text{ 上の整列順序の順序型である}\}$$ card-a

で定義する．定理 12.1 により，(ZFC で) 上の定義はすべての集合 x に対し行なうことができ，$|x| \in \mathrm{On}$ で，$|x|$ と x の間には上単射が存在する．

$\kappa \in \mathrm{On}$ が**基数**であるとは，

$$(12.5)\quad \text{すべての } \alpha < \kappa \text{ に対し，} \alpha \text{ から } \kappa \text{ への上射は存在しない}$$ card-0

こととする．基数全体のクラス Card を

$$(12.6)\quad \mathrm{Card} = \{\alpha \in \mathrm{On} : \alpha \text{ は基数}\}$$ card-1

として定義する．後に補題 13.2 で示すように Card は On で共終である．したがって，系 9.9,（2）により Card は真のクラスである．

L-card-0

補題 12.3 すべての集合 x に対し，$|x| \in \mathrm{Card}$ である．

証明． ある集合 x に対し，$|x| \notin \mathrm{Card}$ だったとすると，ある $\alpha < |x|$ に対し，上射 $f : \alpha \to |x|$ が存在する．上単射 $g : |x| \to x$ が存在するから，$h = g \circ f$ とすると，h は α から x への上射となる．ここで，x 上の 2 項関係 $\sqsubseteq$ を，$u, v \in x$ に対し，

$$(12.7)\quad u \sqsubseteq v \;\Leftrightarrow\; \min(f^{-1}{}''\{u\}) \leq \min(f^{-1}{}''\{v\})$$ card-2

となること，として定義すると，$\sqsubseteq$ は x 上の整列順序でその順序型は $\leq \alpha$ となるが，$\alpha < |x|$ だったからこれは，$|x|$ の定義に矛盾である． ❑ (補題 12.3)

cantor-bernstein

補題 12.4（1）(Cantor-Bernstein Theorem) 任意の集合 x, y に対し，x から y への単射が存在して，y から x への単射も存在するなら，x から y への上単射が存在する．

（2）(Dual Cantor-Bernstein Theorem) 任意の集合 x, y に対し，x から y への上射が存在して，y から x への上射が存在するなら，x から y への上単射が存在する．

証明． (1): まず，AC を用いた証明を示す．$\varphi_x : x \to |x|$, $\varphi_y : y \to |y|$ を上単射とする．$f : x \to y$ が単射なら，$g = \varphi_y \circ f \circ \varphi_x^{-1}$ は $|x|$ から $|y|$ への単射となる．このとき，$h : |y| \to |x|$ を，$\alpha \in |y|$ に対し，

$$(12.8)\quad h(\alpha) = \begin{cases} g^{-1}(\alpha), & \alpha \in \mathrm{range}(g) \text{ のとき} \\ 0, & \text{そうでないとき} \end{cases}$$ card-3

として定義すると，h は $|\,y\,|$ から $|\,x\,|$ への surjection となる．したがって，$|\,x\,|$ が基数であることから，$|\,x\,| \leq |\,y\,|$ である．同様に，y から x への単射の存在から $|\,y\,| \leq |\,x\,|$ が帰結される．したがって，$|\,x\,| = |\,y\,|$ となる．したがって $\varphi_y^{-1} \circ \varphi_x$ は x から y への上単射である．

(2): φ_x と φ_y を (1) の証明でのものとするとき，$f : x \to y$ が上射なら，$\varphi_y \circ f \circ \varphi_x^{-1}$ は $|\,x\,|$ から $|\,y\,|$ への上射だから，基数の定義 (12.5) から，$|\,y\,| \leq |\,x\,|$ である．同様に y から x への上射から $|\,x\,| \leq |\,y\,|$ となるので $|\,x\,| = |\,y\,|$ となる．したがって，$\varphi_y^{-1} \circ \varphi_x$ は x から y への上単射である． ❑ (補題 12.4)

補題 12.4 の ZFC での証明では (2) の証明の方が (1) の証明より簡単なものになっているが，実は，次が言える: 補題 12.4, (1) は AC なしで証明できる．一方 補題 12.4, (2) の証明は ZF ではできないことが知られている (以下の補題 12.6,(2) を参照)．

補題 12.4, (2) の命題が AC と同値になるかどうかは，現在まだ未解決のようである．

補題 12.4, (1) **の ZF での (**AC **を用いない) 証明:** $f : x \to y$ と $g : y \to x$ をそれぞれ単射とするとき x から y への上単射が存在することを示す．まず，x と $y' = f''x$ を同一視することにより，$x \subseteq y$ で $f = id_x$ としてよい．$y'' = g''y$ とすると，g は y から y'' への上単射で，$y'' \subseteq x \subseteq y$ である．$n \in \omega$ に関する帰納法で，$z_0 = y \setminus x$, $z_{n+1} = g''z_n$ とする．このとき， $y \setminus \bigcup_{n\in\omega} z_n \subseteq y \setminus z_0 \subseteq x$ で，$n > 0$ なら，z_n は y の部分集合の g による像であるから，$z_n \subseteq x$ である．したがって，$z = \bigcup_{n\in\omega} z_n$, $z' = \bigcup_{n\in\omega\setminus 1} z_n$ とすれば，$y \setminus z \subseteq x$, $z' \subseteq x$ で，$g \restriction z$ は z から z' への上単射である．このことに注意すると，

(12.9) $\quad h = (g \restriction z) \cup id_{y\setminus z}$

は y から x への上単射となることがわかる．したがって h^{-1} は求めるようなものである．

❑ (補題 12.4, (2))

演習問題 12.5 上の証明での Z_n, $n \in \omega$ は互いに素である． ❑

cantor-bernstein-0

補題 12.6 (1) ZF 上で以下は同値である:

(a) AC;

(b) すべての，$\emptyset$ を要素として含まない，互いに素な x に対し[42]，選択関数 $f : x \to \bigcup x$ が存在する．

(c) すべての集合 x と y に対し，$f : x \to y$ が上射なら， $g : y \to x$ で，$f \circ g = id_y$ となるようなものが存在する．

(d) すべての空でない集合 x, y に対し，x から y への上射が存在するか，または y から x への上射が存在するかの，少なくとも片方が成り立つ．

(2) 次の各命題は (ZFC での定理だが) ZF では証明できない:

[42] x が**互いに素**とは，任意の $u, v \in x$, $u \neq v$ に対し，$u \cap v = \emptyset$ となることである．

(e) すべての集合 x と y に対し，x から y への上射が存在するなら，y から x への単射が存在する;

(f) Dual Cantor-Bernstein Theorem (DCB, 補題 12.4, (2) の主張).

x が整列可能 (つまり x 上の整列順序が存在する) なら，x から y へ上射が存在することと，y から x への単射が存在することの同値性は，選択公理を用いずに示せる．したがって，補題 12.4,(2) (の選択公理を用いない証明の存在) から定義 (12.5) は，

(12.5)’ すべての $\alpha < \kappa$ に対し，α から κ への上単射は存在しない

と (ZF 上で) 同値である **(演習)**.

補題 12.6, (1) の証明には，次の補題を用いる:

補題 12.7 (ZF) 任意の集合 x に対し，x から β への上射の存在しないような順序数 $\beta > 0$ が存在する． cantor-bernstein-1

証明． x を任意の集合として，

(12.10) $w = \{\sqsubset \subseteq x^2 : \sqsubset$ は x 上の擬順序で $\sqsubset / \approx_{\sqsubset}$ は整列順序 $\}$

とする．

(12.11) $f : w \to \mathrm{On};\ \sqsubset \mapsto otp(\sqsubset / \approx_{\sqsubset})$

とすると，$s = \{f(\sqsubset) : \sqsubset \in w\}$ は置換公理により集合となるから，

(12.12) $\beta = (\sup(s)) + 1 \in \mathrm{On}$ cb-0

がとれる．この β は求めるようなものになっている: もし，上射 $f : x \to \beta$ が存在したとすると，$\sqsubset = \{\langle u, v\rangle \in x^2 : f(u) \leq f(v)\}$ は w の要素となるが，$otp(\sqsubset / \approx_{\sqsubset}) = \beta$ だから，これは β の定義 (12.12) に矛盾である． $\square$ (補題 12.7)

補題 12.6 の証明． (1): (a) $\Rightarrow$ (b) は明らかである．

(b) $\Rightarrow$ (a): x を $\emptyset \notin x$ となる任意の集合とするとき，$\tilde{x} = \{u \times \{u\} : u \in x\}$ とすると，$\tilde{x}$ は互いに素で $\emptyset \notin \tilde{x}$ なので，仮定から $\tilde{x}$ 上の選択関数 $\tilde{f}$ が存在する．ここで，

(12.13) $f = \{\langle u, y\rangle \in x \times (\bigcup x) : \langle u \times \{u\}, \langle y, u\rangle\rangle \in \tilde{f}\}$

とすると，f は x 上の選択関数となる．

(a) $\Rightarrow$ (c): 定理 12.1 により x 上の整列順序 $\sqsubset$ が存在する．f は上射だから，各 $v \in y$ に対し，$x_v = \{u \in x : f(u) - v\} \subseteq x$ は空でないので，x_v の $\sqsubset$ に関する最小元 u_v が存在する．v に u_v を対応させる関数 $g : y \to x;\ v \mapsto u_v$ は求めるようなものである．

(c) $\Rightarrow$ (b): x を $\emptyset$ を要素として含まず，x の要素は互いに素であるような集合 (族) とする．このとき

(12.14) $f : \bigcup x \to x;\ a \mapsto u \in x$ で $a \in u$ となるもの

とすると，f は well-defined な上射だから，$f \circ g = id_x$ となるような単射 g が存在する．各 $u \in x$ に対し，$g(f(u)) = u$ だから $f(u) \in u$ となり，f は x 上の選択関数である．

(a) ⇒ (d): 定理 12.1 により，x と y 上にそれぞれ整列順序 $\sqsubset_x, \sqsubset_y$ が存在する．定理 9.8 により，それらのそれぞれと順序同型な順序数 α, β が存在する．$f_x : \langle x, \sqsubset_x \rangle \overset{\cong}{\to} \langle \alpha, \in \rangle$, $f_y : \langle y, \sqsubset_y \rangle \overset{\cong}{\to} \langle \beta, \in \rangle$ とする．定理 9.2,(1)により，$\alpha \leq \beta$ か $\beta \leq \alpha$ のいずれかが成り立つが，たとえば，$\alpha \leq \beta$ なら，β から α への上射 f が存在するから，$f_x^{-1} \circ f \circ f_y$ は y から x への上射となる．

(d) ⇒ (a): 系 12.2 により，任意の集合 x 上に整列順序が存在することを示せばよい．$x = \emptyset$ に対してはこれは明らかである．$x \neq \emptyset$ なら，$\beta \in \mathrm{On}$ を補題 12.7 でのようなものとすると，$\beta \neq \emptyset$ だから，(d) により β から x への上射 f が存在するが，$u, v \in x$ に対し，

(12.15) $u \mathrel{R} v \;\Leftrightarrow\; \min\{\xi \in \beta : f(\xi) = u\} < \min\{\xi \in \beta : f(\xi) = v\}$

として x 上の二項関係 R を定義すれば，R は x 上の整列順序である．

(2): (e), (f) が ZFC で証明できることは演習とする．

Cantor-Bernstein Theorem (定理 12.4, (1)) から，(e) ⇒ (f) が (ZF で証明できることが) わかる **(演習)**．したがって，(f) が ZFC から証明できないことを示せば十分である．

以下の補題での主張 (12.16) は ZF からは証明できないことが知られているので[43]，次の補題 12.8 から，(f) が ZFC から証明できないことがわかる． □ (補題 12.6)

cantor-bernstein-2

補題 12.8 Dual Cantor-Bernstein Theorem (DCB, 補題 12.4, (2) の主張) から，次の命題が証明できる．

(12.16) すべての無限集合 x に対し[44]，ω から x への単射が存在する． infinity-0

証明． x を任意の無限集合とする．

(12.17) $u = \{f \in {}^{\omega>}x : f \text{ は単射}\}$

として，∞ を $\infty \notin u$ となるような集合とする (系 5.3)．$f : u \to u \cup \{\infty\}$ を，$t \in u$ に対し，

(12.18) $f(t) = \begin{cases} \infty, & t = \emptyset \text{ のとき;} \\ t \restriction n & t \neq \emptyset \text{ で,}\quad \mathrm{dom}(t) = n+1 \text{ のとき} \end{cases}$

とすれば，f は u から $u \cup \{\infty\}$ への上射である — ここで，x が無限集合であることが用いられている **(演習)**．$u \cup \{\infty\}$ から u への上射の存在は明らかだから，DCB から，$u \cup \{\infty\}$ から u への上単射 g が存在する．

このとき，$h : \omega \to u$; $n \mapsto g^n(\infty)$ は ω から u への単射となる．ここで，$h_0 : \omega \to \omega$ を，$n \in \omega$ に対して

[43] “ZFC が無矛盾なら，ZFC に (12.21) の否定を加えたものも無矛盾である”．更に明確に確定的立場での主張として表現するなら，“ZFC から (12.21) の命題の証明が与えられたとすると，(その証明から出発して) ZFC からの矛盾の証明を作るアルゴリズムが (具体的に) 与えられている” という主張が，ここでの “… ことが知られている” という表明の，より正確な内容である．

[44] ここで，x が**無限集合**であるとは，どの $n \in \omega$ に対しても n から x への上射が存在しないことである．

(12.19) $h_0(n) = \min\{k \in \omega : \mathrm{range}(h(k)) \not\subseteq \bigcup\{\mathrm{range}(t) : t \in \mathrm{range}(h \circ (h_0 \restriction n))\}\}$

と定義する．上の定義での，$\{k \in \omega : \mathrm{range}(h(k)) \not\subseteq \cdots\}$ は常に空でないので **(演習)**，$n \in \omega$ に対して

(12.20) $h_1(n) = h(h_0(n))(\min\{i \in \mathrm{dom}(h(h_0(n))) : h(h_0(n))(i) \notin \mathrm{range}(h_1 \restriction n)\})$

として $h_1 : \omega \to x$ が定義できるが，定義の仕方から h_1 は ω から x への単射である．

❏ (補題 12.8)

演習問題 12.9 (1) Z 上 AC から次の主張が証明できる:

(12.21) (Axiom of Dependent Choice, DC) すべての無限集合 x と x 上の 2 項関係 r に対し，x が r に関する極大元[45] を持たないなら，r に関する無限列上昇列 $\langle u_n : n \in \omega\rangle$ が存在する[46]． cb-1

(2) Z 上で，(1) での DC から次の公理が証明できる:

(12.22) **(可算選択公理，**AC_ω**)** すべての可算な x で $\emptyset \notin x$ となるものに対し，x 上の選択関数が存在する．

(3) Z 上で， 上の AC_ω から (12.16) が証明できる． ❏

13 基数算術

card-arinth

$\kappa \in \mathrm{On}$ が基数であるとは，どの $\alpha < \kappa$ に対しても α から κ への上射が存在しないことだった (12.5)．Card で基数全体のクラスをあらわした (12.6)．実際 Card は真のクラスである (補題 13.2)．

T-card-0

補題 13.1 (1) $\omega \subseteq \mathrm{Card}$.

(2) $\omega \in \mathrm{Card}$.

(3) $\kappa \in \mathrm{Card} \setminus \omega$ なら κ は極限順序数である．特に，$\omega + 1 \notin \mathrm{Card}$ である．

証明． (1): $n \in \omega$ に関する帰納法で，$n \in \mathrm{Card}$ を示す．$0 \in \mathrm{Card}$ は自明である．$n \in \mathrm{Card}$ として $n+1 \in \mathrm{Card}$ を示す．もし $n+1 \notin \mathrm{Card}$ だったとすると，ある $m \leq n$ から $n+1$ への上射 f が存在する．$m \neq 0$ だから，$m = k+1$ となる $k \in \omega$ がとれる．$k < m$ である．$f(k) = n$ なら，$f \restriction k$ は k から m への上射となり，$n \in \mathrm{Card}$ の仮定に矛盾である．$f(k) \neq n$ なら，f が上射であることから $\ell^* < k$ で $f(\ell^*) = n$ となるものがあるが，$f_0 : k \to n$ を，$\ell \in k$ に対し，

(13.1) $f_0(\ell) = \begin{cases} f(\ell), & \ell \neq \ell^* \text{ のとき;} \\ f(k), & \ell = \ell^* \text{ のとき} \end{cases}$ card-4

---

[45] $u \in x$ が r に関する**極大元**であるとは，$u\ r\ v$ となる u と異なる $r \in x$ が存在しないことである．

[46] $\langle u_n : n \in \omega\rangle$ が r に関する**無限上昇列**であるとは，$u_n \in x$ かつ $u_n\ r\ u_{n+1}$ がすべての $n \in \omega$ に対し成り立つことである．

として定義すると，f は上射となるが，これは $n \in \mathrm{Card}$ の仮定に矛盾である．

(2): $\omega \notin \mathrm{Card}$ だったとすると，ある $n \in \omega$ から ω への上射 f が存在する．このとき $f_0 : n \to n+1$ を，$\ell \in n$ に対し，

$$(13.2) \quad f_0(\ell) = \begin{cases} f(\ell), & f(\ell) \in n+1 \text{ のとき;} \\ 0, & \text{それ以外のとき} \end{cases}$$ card-5

として定義すると，f_0 は n から $n+1$ への上射となるが，これは，$n+1 \in \mathrm{Card}$ であること (((1) による) に矛盾である．

(3): $\alpha \in \mathrm{On} \setminus \omega$ とするとき，$\alpha+1$ が基数でないことを示す．$\alpha < \alpha+1$ だが，$f : \alpha \to \alpha+1$ を $\beta \in \alpha+1$ に対し

$$(13.3) \quad f(\beta) = \begin{cases} \alpha, & \beta = 0 \text{ のとき;} \\ k, & k \in \omega \text{ で } \beta = k+1 \text{ のとき;} \\ \beta, & \text{それ以外のとき} \end{cases}$$ card-6

と定義すると，f は α から $\alpha+1$ への上単射 (特に全射) である．

❏ (補題 13.1)

T-card-1

補題 13.2 すべての $\alpha \in \mathrm{On}$ に対し，$\kappa \in \mathrm{Card}$ で $\alpha < \kappa$ となるものが存在する．特に，系 9.9, (2) により，Card は真のクラスである．

証明． $\alpha \in \mathrm{On}$ に対し，補題 12.7 により，$\beta \in \mathrm{On}$ で，α から β への上射の存在しないものが存在する．したがって，

$$(13.4) \quad \kappa = \min\{\beta \in \mathrm{On} : \alpha \text{ から } \beta \text{ への上射は存在しない}\}$$

がとれる．$\alpha < \kappa$ である．κ が基数であることを示す: もし κ が基数でないとすると，$\delta < \kappa$ で，δ から κ への上射 f の存在するようなものがとれる．κ の最小性から，上射 $g : \alpha \to \delta$ が存在する．このとき $g \circ f : \alpha \to \kappa$ は上射になるが，これは κ のとり方に矛盾である．

❏ (補題 13.2)

補題 13.2 により，任意の $\alpha \in \mathrm{On}$ に対し，$\alpha^+ = \min(\mathrm{Card} \setminus \alpha+1)$ がとれる．補題 13.1, (1) により，$n \in \omega$ に対し，$n^+ = n+1$ である．一方，補題 13.1, (3) により，任意の $\alpha \in \mathrm{On} \setminus \omega$ に対し $\alpha+1 < \alpha^+$ である[47]．

T-card-2

補題 13.3 $S \subseteq \mathrm{Card}$ を集合とするとき，$\sup(S) \in \mathrm{Card}$ である．

証明． $\kappa = \sup(S)$ とする．κ が基数でなかったとすると，$\alpha < \kappa$ で，α から κ への上射 f が存在するものがとれる．$\lambda \in S$ で，$\alpha < \lambda \leq \kappa$ となるものがとれるが，$f_0 : \alpha \to \lambda$ を $\beta \in \alpha$ に対し

$$(13.5) \quad f_0(\beta) = \begin{cases} f(\beta), & f(\beta) < \lambda \text{ のとき;} \\ 0 & \text{そうでないとき} \end{cases}$$

[47] もちろん，ここでの $n+1$ や $\alpha+1$ は順序数の意味での足し算である．

として定義すると，f_0 は α から λ への上射となるが，これは $\lambda \in \mathrm{Card}$ であることに矛盾である． ❏ (補題 13.3)

系 9.9, (1)により，$\mathrm{Card} \setminus \omega$ の要素は，On の元を添字として小さい順に枚挙できる．この枚挙を，

$$(13.6) \quad \aleph_\alpha,\ \alpha \in \mathrm{On}$$ card-6-0

とあらわす．補題 13.1, (2) により，$\aleph_0 = \omega$ である．すべての $\alpha \in \mathrm{On}$ に対し，$\aleph_{\alpha+1} = (\aleph_\alpha)^+$ で， $\gamma \in \mathrm{On}$ が極限順序数のときには補題 13.3 により， $\aleph_\gamma = \sup_{\alpha<\gamma} \aleph_\alpha$ である (このことは，ここでの枚挙 $\aleph_\alpha$, $\alpha \in \mathrm{On}$ が連続的な上昇列になっている，と表現できる)．ある極限順序数 γ に対して $\aleph_\gamma$ とあらわされる基数を極限基数とよぶ．λ が極限基数であるとは，λ が λ より小さな基数の極限になっていることである．λ が極限基数でないとき，つまり λ より一つ前の基数 κ が存在して $\lambda = \kappa^+$ となっているとき，λ は非極限基数である，という．

$\aleph_\alpha$ が順序数でもあることを強調したいときには，$\aleph_\alpha$ と書くかわりに，ω_α と書くことも多い．この書き方では $\omega_0 = \omega$ である．

任意の集合に x に対し，x の濃度 $|\,x\,| \in \mathrm{Card}$ を，

$$|\,x\,| = \min\{\alpha : \alpha \text{ は，ある } x \text{ 上の整列順序の順序型である }\}$$

と定義したのだった ((12.4), 補題 12.3 を参照)．

T-card-3

演習問題 13.4 集合 x, y に対し，

(1) x から y への単射が存在することと，$|\,x\,| \le |\,y\,|$ は同値である．

(2) x から y への全射が存在することと，$|\,y\,| \le |\,x\,|$ は同値である．

(3) x から y への上単射が存在することと $|\,x\,| = |\,y\,|$ は同値である． ❏

$\kappa, \lambda \in \mathrm{Card}$ に対し，

$$(13.7) \quad \kappa + \lambda = |\,\kappa \times \{0\} \cup \lambda \times \{1\}\,|,$$ card-7

$$(13.8) \quad \kappa \cdot \lambda = |\,\kappa \times \lambda\,|,$$ card-8

$$(13.9) \quad \kappa^\lambda = |\,{}^\lambda\kappa\,|$$ card-9

とする．基数に関する，加法，乗法，冪も順序数に対する加法，乗法，冪も同じ記号であらわされるが，それぞれ異なる演算になっていることに注意する．

T-card-4

演習問題 13.5 (1) $\lambda \in \mathrm{Card}$ に対し，λ^2 で $\lambda \cdot \lambda$ をあらわすことにすると，$\lambda^2 = |\,{}^2\lambda\,|$ である．

(2) $\lambda \in \mathrm{Card}$ に対し，$2^\lambda = |\,{}^\lambda 2\,| = |\,\mathcal{P}(\lambda)\,|$ である． ❏

T-card-4-0

補題 13.6 関数 $\kappa + \lambda$, $\kappa \cdot \lambda$, κ^λ はすべて，κ と λ に関して単調増加である．

証明． $\kappa_0, \kappa_1, \lambda_0, \lambda_1 \in \mathrm{Card}$ で，$\kappa_0 \le \kappa_1$, $\lambda_0 \le \lambda_1$ とすると，

$$(\kappa_0 \times \{0\}) \cup (\lambda_0 \times \{1\}) \subseteq (\kappa_1 \times \{0\}) \cup (\lambda_1 \times \{1\}),$$
$$\kappa_0 \times \lambda_0 \subseteq \kappa_1 \times \lambda_1$$

で，

$$\varphi : {}^{\lambda_0}\kappa_0 \to {}^{\lambda_1}\kappa_1;\ f \mapsto f \cup \{\langle \alpha, 0\rangle : \alpha \in \lambda_1 \setminus \lambda_0\}$$

は単射だから，演習問題 13.4, (1) により，

$$\kappa_0 + \lambda_0 = |\,(\kappa_0 \times \{0\}) \cup (\lambda_0 \times \{1\})\,| \le |\,(\kappa_1 \times \{0\}) \cup (\lambda_1 \times \{1\})\,| = \kappa_1 + \lambda_1,$$
$$\kappa_0 \cdot \lambda_0 = |\,\kappa_0 \times \lambda_0\,| \le |\,\kappa_1 \times \lambda_1\,| = \kappa_1 \cdot \lambda_1,$$
$${\kappa_0}^{\lambda_0} = |\,{}^{\lambda_0}\kappa_0\,| \le |\,{}^{\lambda_1}\kappa_1\,| = {\kappa_1}^{\lambda_1}$$

である．　□ (補題 13.6)

T-card-5

定理 13.7　(1) $\kappa, \lambda \in \mathrm{Card}$ で，$\max\{\kappa, \lambda\} \ge \omega\ (= \aleph_0)$ なら，$\kappa + \lambda = \kappa \cdot \lambda = \max\{\kappa, \lambda\}$ である．

(2) $\lambda \in \omega \setminus 1$, $\kappa \in \mathrm{Card} \setminus \omega$ なら，$\kappa^\lambda = \kappa$ である．

上の定理の証明のために，まず，次のようにしてクラス関数 $\Phi : \mathrm{On} \to (\mathrm{On})^2$ を導入し，その基本性質を調べる．

$(\mathrm{On})^2$ 上のクラス二項関係 $\sqsubset$ を次のように定義する: $\langle \alpha, \beta\rangle, \langle \alpha', \beta'\rangle \in \mathrm{On}$ に対し，

(13.10) $\langle \alpha, \beta\rangle \sqsubset \langle \alpha', \beta'\rangle \;\Leftrightarrow\; \max\{\alpha, \beta\} < \max\{\alpha', \beta'\}$ または，
$(\max\{\alpha, \beta\} = \max\{\alpha', \beta'\}$ かつ $\alpha < \alpha')$ または，
$(\max\{\alpha, \beta\} = \max\{\alpha', \beta'\}$ かつ $\alpha = \alpha'$ かつ $\beta < \beta')$　card-10

とする．

T-card-6

補題 13.8 (1) $\sqsubset$ は $(\mathrm{On})^2$ 上の全順序である．

(2) すべての $\alpha \in \mathrm{On}$ に対し，$I_\sqsubset(\langle 0, \alpha\rangle) = \alpha \times \alpha$ である．

(3) $\sqsubset$ は $(\mathrm{On})^2$ 上の集合的な整列順序である．

証明． (1): $\langle \alpha, \beta\rangle \sqsubset \langle \alpha', \beta'\rangle$ なら，$\langle \alpha, \beta\rangle \ne \langle \alpha', \beta'\rangle$ となることは $\sqsubset$ の定義 (13.10) から明らかである．

$\sqsubset$ が推移性を満たすことを確かめるために，$\langle \alpha, \beta\rangle \sqsubset \langle \alpha', \beta'\rangle$ かつ $\langle \alpha', \beta'\rangle \sqsubset \langle \alpha'', \beta''\rangle$ とすると，$\max\{\alpha, \beta\} \le \max\{\alpha', \beta'\} \le \max\{\alpha'', \beta''\}$ である．$\max\{\alpha, \beta\} < \max\{\alpha', \beta'\}$ または $\max\{\alpha', \beta'\} < \max\{\alpha'', \beta''\}$ なら，$\max\{\alpha, \beta\} < \max\{\alpha'', \beta''\}$ だから，$\langle \alpha, \beta\rangle \sqsubset \langle \alpha'', \beta''\rangle$ となる．

$\max\{\alpha, \beta\} = \max\{\alpha', \beta'\} = \max\{\alpha'', \beta''\}$ とすると，$\alpha \le \alpha' \le \alpha''$ となるが，ここで $\alpha < \alpha'$ または $\alpha' < \alpha''$ なら，$\alpha < \alpha''$ だから，再び $\langle \alpha, \beta\rangle \sqsubset \langle \alpha'', \beta''\rangle$ が成り立つ．

最後に，$\max\{\alpha, \beta\} = \max\{\alpha', \beta'\} = \max\{\alpha'', \beta''\}$ かつ $\alpha = \alpha' = \alpha''$ とすると，$\beta < \beta' < \beta''$ でなくてはならないから，$\beta < \beta''$ となり，この場合にも $\langle \alpha, \beta\rangle \sqsubset \langle \alpha'', \beta''\rangle$ が成り立つ．

$\sqsubset$ が線形であることを確かめるために $\langle\alpha,\beta\rangle$, $\langle\alpha',\beta'\rangle \in (\mathrm{On})^2$ を互いに異なるものとする． $\max\{\alpha,\beta\} \neq \max\{\alpha',\beta'\}$ なら，$\max\{\alpha,\beta\} < \max\{\alpha',\beta'\}$ または $\max\{\alpha,\beta\} > \max\{\alpha',\beta'\}$ だから，それぞれの場合に $\langle\alpha,\beta\rangle \sqsubset \langle\alpha',\beta'\rangle$ または $\langle\alpha',\beta'\rangle \sqsubset \langle\alpha,\beta\rangle$ が成り立つ．

$\max\{\alpha,\beta\} = \max\{\alpha',\beta'\}$ で，$\alpha \neq \alpha'$ なら，$\alpha < \alpha'$ または $\alpha > \alpha'$ だから，それぞれの場合に $\langle\alpha,\beta\rangle \sqsubset \langle\alpha',\beta'\rangle$ または $\langle\alpha',\beta'\rangle \sqsubset \langle\alpha,\beta\rangle$ が成り立つ．

$\max\{\alpha,\beta\} = \max\{\alpha',\beta'\}$ で，$\alpha = \alpha'$ なら，$\langle\alpha,\beta\rangle$ と $\langle\alpha',\beta'\rangle$ が異なることから，$\beta \neq \beta'$ である．したがって $\beta < \beta'$ または $\beta > \beta'$ だが，それぞれの場合に $\langle\alpha,\beta\rangle \sqsubset \langle\alpha',\beta'\rangle$ または $\langle\alpha',\beta'\rangle \sqsubset \langle\alpha,\beta\rangle$ が成り立つ．

(2): $\alpha \in \mathrm{On}$ とする．すべての β, $\beta' < \alpha$ に対し， $\max\{\beta,\beta'\} < \max\{0,\beta\}$ だから，$\langle\beta,\beta'\rangle \sqsubset \langle 0,\alpha\rangle$ である．したがって，$\alpha\times\alpha \subseteq I_{\sqsubset}(\langle 0,\alpha\rangle)$ である．逆に， $\langle\beta,\beta'\rangle \sqsubset \langle 0,\alpha\rangle$ なら， $\max\{\beta,\beta'\} < \max\{0,\alpha\}$ か $\max\{\beta,\beta'\} = \max\{0,\alpha\}$ となるが，前者の場合には，$\langle\beta,\beta'\rangle \in \alpha\times\alpha$ である．一方，後者が成り立つとすると，$\langle\beta,\beta'\rangle \sqsubseteq \langle 0,\alpha\rangle$ だから，$\beta = 0$ とならなくてはならないが，このときは $\beta' = \max\beta,\beta' = \alpha$ だから，$\langle\beta,\beta'\rangle = \langle 0,\alpha\rangle$ となり矛盾である．

(3): $\sqsubset$ が集合的であることは，任意の α, $\beta \in \mathrm{On}$ に対し，$\gamma = \max\{\alpha,\beta\}+1$ とすると，(2) から，$I_{\sqsubset}(\langle\alpha,\beta\rangle) \subseteq I_{\sqsubset}(\langle 0,\gamma\rangle) = \gamma\times\gamma$ となることからよい．

$\sqsubset$ が整列順序であることを示すために，$A \subseteq (\mathrm{On})^2$ を空でない集合とする．$\alpha_0 = \min\{\max\alpha,\beta : \langle\alpha,\beta\rangle \in A\}$ として，$A_1 = \{\langle\alpha,\beta\rangle \in A : \max\{\alpha,\beta\} = \alpha_0\}$ とする．$\alpha_1 = \min\{\alpha \in \mathrm{On} :$ ある $\beta \in \mathrm{On}$ に対し $\langle\alpha,\beta\rangle \in A_1\}$ として，$\beta_1 = \min\{\beta \in \mathrm{On} : \langle\alpha_1,\beta\rangle \in A\}$ とする．このとき $\langle\alpha_1,\beta_1\rangle$ は A の $\sqsubset$ に関する最小元である． □ (補題 13.8)

補題 13.2 により，$(\mathrm{On})^2$ は真のクラスである．したがって，上の補題と，定理 9.8 により，$(\mathrm{On},\in)$ から $((\mathrm{On})^2,\sqsubset)$ への順序同型クラス写像 Φ が存在する．

$$\Phi : (\mathrm{On},\in) \overset{\cong}{\to} ((\mathrm{On})^2,\sqsubset) \tag{13.11}$$ card-10-0

である．

$\langle\alpha,\beta\rangle, \langle\alpha',\beta'\rangle \in (\mathrm{On})^2$ に対し，$\langle\alpha,\beta\rangle \sqsubseteq \langle\alpha',\beta'\rangle$ で，($\langle\alpha,\beta\rangle = \langle\alpha',\beta'\rangle$ または $\langle\alpha,\beta\rangle \sqsubset \langle\alpha',\beta'\rangle$) となることをあらわすことにする．

T-card-7

補題 13.9 （1） すべての $\alpha \in \mathrm{On}$ に対し，$\Phi(\alpha) \sqsubseteq \langle 0,\alpha\rangle$ が成り立つ．

（2） すべての $\kappa \in \mathrm{Card}$ に対し，

$$\Phi(\kappa) = \langle 0,\kappa\rangle \tag{13.12}$$ card-11

が成り立つ．したがって，$\kappa = \kappa\cdot\kappa$ である．

証明． (1): 補題 13.8, (1) から，$I_{\sqsubset}(\langle 0,\alpha\rangle) \supseteq \{\langle 0,\beta\rangle : \beta < \alpha\}$ だが，この包含関係の右辺の $\sqsubset$ に関する順序型は α だから，演習問題 9.10 により，$otp(\langle I_{\sqsubset}(\langle 0,\alpha\rangle,\sqsubset)\rangle) \geq \alpha$ となる．したがって，$\Phi(\alpha) \sqsubseteq \langle 0,\alpha\rangle$ である．

(2): $\kappa \in \mathrm{Card}$ に対し，(13.12) が成り立つとすると，補題 13.8, (2) により， $\Phi''\kappa = I_{\sqsubseteq}(\langle 0,\kappa\rangle) = \kappa\times\kappa$ だから，$\Phi\restriction\kappa$ は κ から $\kappa\times\kappa$ への上単射となり，$\kappa\cdot\kappa = |\,\kappa\times\kappa\,| = \kappa$ である．

$\kappa\in\mathrm{Card}\setminus\omega$ に関する帰納法で，(13.12) がすべての κ に対し成り立つことを示す．

$\kappa = \omega$ のときには，$\langle\alpha,\beta\rangle \in \langle 0,\omega\rangle$ なら補題 13.8, (2) により，$\alpha,\ \beta\in\omega$ だから，$n = \max\{\alpha,\beta\}+1$ とすると $n\in\omega$ で，$I_{\sqsubset}(\langle\alpha,\beta\rangle) \subseteq I_{\sqsubseteq}(\langle 0,n\rangle) = n\times n$ だから，$I_{\sqsubset}(\langle\alpha,\beta\rangle)$ は有限となる．したがって，$\Phi(\omega)$ は $\langle\alpha,\beta\rangle$ ではない．このことと (1) から，$\Phi(\omega) = \langle 0,\omega\rangle$ であることがわかる．

$\kappa\in\mathrm{On}\setminus\omega$ に対し (13.12) が成り立つとする．このとき，上で示したように，$\kappa=\kappa\cdot\kappa$ が成り立つ．(1) により $\Phi(\kappa^+)\sqsubseteq\langle 0,\kappa^+\rangle$ だが，任意の $\langle\alpha,\beta\rangle\sqsubset\langle 0,\kappa^+\rangle$ に対し，補題 13.8, (2) により，

$$\langle\alpha,\beta\rangle\in\kappa^+\times\kappa^+ \tag{13.13}$$ card-12

だから， $\gamma=\max\{\alpha,\beta\}$ として，$\gamma<\kappa^+$ で， $I_{\sqsubset}(\langle\alpha,\beta\rangle)\subseteq\gamma\times\gamma$ により，$|\,I_{\sqsubset}(\langle\alpha,\beta\rangle)\,| \le |\,\gamma\times\gamma\,| \le \kappa\cdot\kappa = \kappa$ である．したがって，$\Phi(\kappa^+)\ne\langle\alpha, beta\rangle$ である．このことと (13.13) から，$\Phi(\kappa^+) = \langle 0,\kappa^+\rangle$ である．

$\lambda\in\mathrm{Card}\setminus\omega+1$ が極限基数で，すべての $\kappa<\lambda$ に対し (13.12) が成りつとき，

$$\begin{aligned}\Phi(\lambda) &= \lim_{\sqsubset}\{\Phi(\kappa)\,:\,\kappa\in\lambda\cap\mathrm{Card}\}\\ &= \lim_{\sqsubset}\{\langle 0,\kappa\rangle\,:\,\kappa\in\lambda\cap\mathrm{Card}\}\\ &= \langle 0,\lambda\rangle\end{aligned} \tag{13.14}$$

である．ただし，$\lim_{\sqsubset}$ で $((\mathrm{On})^2,\sqsubset)$ での $\sqsubset$ に関する極限をあらわす． ❏ (補題 13.9)

定理 13.7 の証明. (1): $\mu=\max\{\kappa,\lambda\}$ とする．

$$\varphi_0:\kappa\to(\kappa\times\{0\})\cup(\lambda\times\{1\});\ \alpha\mapsto\langle\alpha,0\rangle,$$
$$\varphi_1:\lambda\to(\kappa\times\{0\})\cup(\lambda\times\{1\});\ \alpha\mapsto\langle\alpha,1\rangle,$$
$$\varphi_2:(\kappa\times\{0\})\cup(\lambda\times\{1\})\to\kappa\times\lambda;\ \langle\alpha,i\rangle\mapsto\begin{cases}\langle\alpha,0\rangle & i=0 \text{ のとき}\\ \langle 0,\alpha+1\rangle & i=1 \text{ のとき}\end{cases}$$

とすると[48]，φ_0, φ_1, φ_2, はすべて単射だから，補題 13.6 と補題 13.8 により，

$$\mu=\max\{\kappa,\lambda\}\le\kappa+\lambda\le\kappa\cdot\lambda=\mu\cdot\mu\le\mu \tag{13.15}$$

により，

$$\mu=\max\{\kappa,\lambda\}=\kappa+\lambda=\kappa\cdot\lambda \tag{13.16}$$

である．

(2): $\lambda\in\omega\setminus 1$ に関する帰納法で示す．$\lambda=n+1$ で $\kappa^n=\kappa$ が成り立っているとすると，

[48] φ_2 の定義では，補題 13.1, (3) により，$\lambda\in\mathrm{Card}\setminus\omega$ が極限順序数になっているので，$+1$ に関して閉じていることが用いられていることに注意する．

$$\varphi : {}^{n+1}\kappa \to {}^{n}\kappa \times \kappa;\ f \mapsto \langle f \restriction n, f(n)\rangle$$

は上単射だから，(1) により，

(13.17) $\kappa^\lambda = \kappa^{n+1} = \kappa^n \cdot \kappa = \kappa \cdot \kappa = \kappa$

である． □ (定理 13.7)

T-card-7-0

補題 13.10 $\kappa, \lambda \in \mathrm{Card}$ を $\max\{\kappa, \lambda\} \geq \omega$ となるものとする．x を $|x| \leq \kappa$ ですべての $a \in x$ に対し $|a| \leq \lambda$ となるものとするとき，$|\bigcup x| \leq \max\{\kappa, \lambda\}$ である．

証明． $x \neq \emptyset$ で，$a \in x$ なら $a \neq \emptyset$ としてよい．各 $a \in x$ を $\{u_{a,\beta} : \beta < \lambda\}$ として (必要なら重複を許して) 枚挙する．また x を $\{a_\alpha : \alpha < \kappa\}$ として (これも必要なら重複を許して) 毎夜する．

(13.18) $\varphi : \kappa \times \lambda \to \bigcup x;\ \langle \alpha, \beta\rangle \mapsto u_{a_\alpha,\beta}$ card-12-a

は全射だから，定理 13.7 と演習問題 13.4, (2) により，$\max\{\kappa, \lambda\} = \kappa \cdot \lambda = |\kappa \times \lambda| \geq |\bigcup x|$ である． □ (補題 13.10)

$\alpha, \beta \in \mathrm{Lim}$ として，$f : \beta \to \alpha$ が α で**共終な上昇列**であるとは，f は単調増加で，

(13.19) すべての $\alpha' < \alpha$ に対し，$\beta' < \beta$ で $f(\beta') \geq \alpha'$ となるものが存在する card-12-0

こととする ((13.19) は $\sup(f''\beta) = \alpha$ と同値である．これは，$\bigcup f''\beta = \alpha$ とも同値になることに注意する．**(演習)**)．関数 $f : \beta \to \alpha$ は β-列ととらえて $\langle f(\xi) : \xi < \beta\rangle$ とも表されるのだったことに注意しておく．

$\alpha \in \mathrm{Lim}$ に対し，α の**共終数** $cf(\alpha)$ を

(13.20) $\min\{\beta \in \mathrm{Lim} : \alpha$ で共終な上昇列 $f : \beta \to \alpha$ が存在する $\}$ card-13

とする．$id_\alpha : \alpha \to \alpha$ は共終な上昇列だから，

(13.21) $cf(\alpha) \leq \alpha$ card-14

である．

T-card-8

補題 13.11 (1) すべての $\alpha \in \mathrm{Lim}$ に対し，$cf(cf(\alpha)) = cf(\alpha)$ である．

(2) すべての $\alpha \in \mathrm{Lim}$ に対し，$cf(\alpha) \in \mathrm{Card}$ である．

証明． (1): (13.21) から $cf(cf(\alpha)) \leq cf(\alpha)$ である．$f : cf(\alpha) \to \alpha$ を α で共終な上昇列とする．$g : cf(cf(\alpha)) \to cf(\alpha)$ を $cf(\alpha)$ で共終な上昇列とするとき，$f \circ g : cf\ cf(\alpha) \to \alpha$ は，α で共終な上昇列となるから，$cf(\alpha)$ の最小性から，$cf(\alpha) \leq cf(cf(\alpha))$ である．

(2): $f : cf(\alpha) \to \alpha$ を α で共終な上昇列とする．$cf(\alpha) \in \mathrm{Card}$ でなければ，ある $\beta < cf(\alpha)$ から $cf(\alpha)$ への上射 g が存在する．$\beta_0 = \min\{\beta' \leq \beta : f''\beta' = cf(\alpha)\}$ として，$g_0 : \beta_0 \to cf(\alpha);\ \xi \mapsto \sup(g''\xi)$ とすれば，g_0 は β_0 から $cf(\alpha)$ への共終な上昇列と

なるから，$f \circ g_0$ は β_0 から α への共終な上昇列である．これは，$cf(\alpha)$ の最小性に矛盾する． ❏ (補題 13.11)

$\alpha \in \mathrm{On}$ に対し，$cf(\alpha) = \alpha$ が成り立つなら，補題 13.11 により，α は基数である．このような基数を正則基数とよぶ．正則でない基数，つまり $cf(\kappa) < \kappa$ が成り立つような基数を特異基数とよぶ.

T-card-9

補題 13.12 すべての非極限基数は正則である.

証明. κ を非極限基数として，$\kappa = \lambda^+$ とする．$\delta = cf(\kappa) < \kappa$ だったとして，$f : \delta \to \kappa$ を κ で共終な上昇列とすると， $x = \{f(\xi) : \xi < \delta\}$ として，$\bigcup x = \kappa$ となるが，補題 13.10 により，$|\bigcup x| \leq \lambda \cdot \lambda = \lambda < \kappa$ となるから，これは矛盾である． ❏ (補題 13.12)

後で示すように，正規な極限基数の存在は ZFC から証明できない．実際，$\aleph_\omega$, $\aleph_{\omega+\omega}$, $\aleph_{\omega\cdot\omega}$, $\aleph_{\omega_1}$ など，すべて特異基数である.

$\alpha \in \mathrm{On}$ として，$f \in {}^{\alpha}(\mathrm{Card} \setminus 1)$ に対し，

(13.22) $\prod f = \{h \in {}^{\alpha}(\mathrm{Card} \setminus 1) : \text{すべての } \xi < \alpha \text{ に対し } h(\xi) \in f(\xi)\}$, card-15

(13.23) $\dot{\sum} f = \{\langle \xi, \eta \rangle : \xi \in \alpha, \eta \in f(\xi)\}$ card-16

とする[49].

T-card-10

補題 13.13 任意の $f, g \in {}^{\alpha}(\mathrm{On} \setminus 1)$ に対し，$f \leq g$ なら，$|\dot{\sum} f| \leq |\prod g|$ である.

証明. $\varphi : \dot{\sum} f \to \prod g$ を $\varphi\langle \xi, \eta \rangle = \delta^g_{\xi,\eta}$ として定義すると φ は単射である．ただし，$\delta^g_{\xi,\eta} \in \prod g$ で，

(13.24) $\delta^g_{\xi,\eta}(\iota) = \begin{cases} \eta & \iota = \xi \text{ のとき} \\ 0 & \text{それ以外のとき} \end{cases}$

とする. ❏ (補題 13.13)

T-card-11

定理 13.14 (Gyula (Julius) Kőnig, 1904) $f, g \in {}^{\alpha}(\mathrm{Card} \setminus 1)$ で，$f < g$ とする (つまり，すべての $\xi < \alpha$ に対し $f(\xi) < g(\xi)$ となるものとする)．このとき，$|\dot{\sum} f| < |\prod g|$ である.

証明. 演習問題 13.4, (2) により，任意の写像 $\varphi : \dot{\sum} f \to \prod g$ が全射でないこが示せればよい．$h^* \in \prod g$ を，すべての $\xi \in \alpha$ に対し，

(13.25) $h^*(\xi) \in g(\xi) \setminus \{h(\xi) : h \in \varphi''(\{\xi\} \times f(\xi))\}$

となるようにとる．$f(\xi) < g(\xi)$ だからこれは可能である．定義から h^* はどの $h \in \varphi''(\dot{\sum} f)$ とも異なる. ❏ (定理 13.14)

T-card-12

系 13.15 すべての $\kappa \in \mathrm{Card}$ に対し，$\kappa < 2^\kappa$ である.

(49) より一般的に，任意の $\alpha \in \mathrm{On}$ と α 上の関数に対し，$\dot{\sum} f, \prod f$ が定義できる.

証明.

$$f : \kappa \to (\mathrm{Card} \setminus 1);\ \alpha \mapsto 1;$$
$$g : \kappa \to (\mathrm{Card} \setminus 1);\ \alpha \mapsto 2$$

とすれば，$f < g$ だが，

(13.26) $\varphi : \kappa \to \dot{\sum} f;\ \alpha \mapsto \langle \alpha, 0 \rangle$ card-17

は全単射で，$\prod g = {}^{\kappa}2$ だから，定理 13.14 により，

(13.27) $\kappa = |\dot{\sum} f| < |\prod g| = |{}^{\kappa}2| = 2^{\kappa}$

である． ❑ (系 13.15)

系 13.16 すべての $\kappa \in \mathrm{Card} \setminus 2$ と $\lambda \in \mathrm{Card} \setminus \omega$ に対し，$cf(\kappa^{\lambda}) > \lambda$ である．

証明. すべての $f : \lambda \to \kappa^{\lambda}$ に対し，$|\bigcup f''\lambda| < \kappa^{\lambda}$ となることが示せればよい．

$f : \lambda \to \kappa^{\lambda}$ とする．$f^* : \lambda \to \kappa^{\lambda} \cap \mathrm{Card}$ を，各 $\alpha \in \lambda$ に対し，$f^*(\alpha) = |f(\alpha)|$ として定義する．

$$g : \lambda \to (\mathrm{Card} \setminus 1);\ \alpha \mapsto \kappa^{\lambda}$$

とすると，系 13.15 により，すべての $\alpha < \lambda$ に対し，$f^*(\alpha) < \lambda < 2^{\lambda} \leq \kappa^{\lambda}$ となるから，$f^* < g$ である．定理 13.14 により，

(13.28) $|\bigcup f''\lambda| \leq |\dot{\sum} f^*| < |\prod g| = |{}^{\lambda}({}^{\lambda}\kappa)| = |{}^{\lambda\cdot\lambda}\kappa| = |{}^{\lambda}\kappa| = \kappa^{\lambda}$

である． ❑ (系 13.16)

系 13.16 により，特に $cf(2^{\kappa}) > \kappa$ がすべての $\kappa \in \mathrm{Card} \setminus 1$ に対し，成り立つ．たとえば，このことから，$2^{\aleph_0} \neq \aleph_\omega$ が成り立つことがわかる．

Part III
ZFC のフラグメントのモデル

14 スコーレム閉包とレーベンハイム・スコーレム定理

skolem-hull

以下の議論は，超数学での述語論理に対するものではなく，第 6 節の意味での，集合論の中での述語論理に対するものである．特に，以下で言及する言語 $\mathcal{L}$, $\mathcal{L}$-論理式の全体 $\mathsf{Fml}_{\mathcal{L}}$ etc. は，$\mathcal{L}_{\varepsilon}$ の拡大での (集合を表す) 変数記号や項として表されているものである．

任意の言語 $\mathcal{L}$ と $\mathcal{L}$-構造 $\mathfrak{A} = \langle A, ... \rangle$ に対し，$\mathcal{L}$-構造 $\mathfrak{B} = \langle B, ... \rangle$ が $\mathfrak{A}$ の**部分構造**であるとは，$B \subseteq A$ で B は

(14.1) $\mathcal{L}$ のすべての定数記号 c に対し，$c^{\mathfrak{A}} \in B$ が成り立つ; substr-0

(14.2) $\mathcal{L}$ のすべての関数記号 $f(x_0,...,x_{n-1})$ と $b_0,...,b_{n-1]\in B}$ に対し，$f^{\mathfrak{A}}(b_0,...,b_{n-1}) \in B$ が成り立ち substr-1

(このことを B は $\mathfrak{A}$ で閉じている，と言うことにする)，

(14.3) $\mathcal{L}$ のすべての定数記号 c に対し，$c^{\mathfrak{B}} = c^{\mathfrak{A}}$ で， substr-2

(14.4) $\mathcal{L}$ のすべての関数記号 $f(x_0,...,x_{n-1})$ に対し，$f^{\mathfrak{B}} = f^{\mathfrak{A}} \restriction B^n$ substr-3

(14.5) $\mathcal{L}$ のすべての関係記号 m 変数 r に対し，$r^{\mathfrak{B}} = r^{\mathfrak{A}} \cap B^m$ substr-4

となっていることとする．

逆に $B \subseteq A$ が $\mathfrak{A}$ で閉じているとき，$\mathfrak{A} \restriction B$ を B を台集合として，(14.4), (14.5), (**??**) により定義される構造とすることができ，このとき $\mathfrak{A} \restriction B$ は $\mathfrak{A}$ の部分構造となる．$\mathfrak{B}$ が $\mathfrak{A}$ の部分構造であることを $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{A}$ であらわす．

任意の言語 $\mathcal{L}$ と $\mathcal{L}$-構造 $\mathfrak{A} = \langle A, ...\rangle$ に対し，$\sqsubset^{\mathfrak{A}}$ を A の任意の整列順序とする．$\mathcal{L}^{\sqsubset}$ を，2 項関係 $\sqsubset^{\mathfrak{A}}$ に対応する新しい 2 変数関係記号 $\sqsubset$ を $\mathcal{L}$ に付け加えて得られる言語とし，$\mathfrak{A}_{\sqsubset^{\mathfrak{A}}}$ で，$\mathfrak{A}$ に $\sqsubset^{\mathfrak{A}}$ を付加して得られる $\mathcal{L}^{\sqsubset}$-構造をあらわすことにする．また $\emptyset^{\sqsubset^{\mathfrak{A}}}$ で A の $\sqsubset^{\mathfrak{A}}$ に関する最小元をあらわす．

$n \in \omega$ に対し，$f : A^n \to A$ が $\mathfrak{A}_{\sqsubset^{\mathfrak{A}}}$ で**定義可能な関数**であるとは，ある $\mathcal{L}^{\sqsubset}$-論理式 $\varphi = \varphi(x_0,...,x_{n-1},y)$ に対し，

(14.6) $f = \{\langle\langle a_0,...,a_{n-1}\rangle, b\rangle \in A^n \times A : \mathfrak{A}_{\sqsubset^{\mathfrak{A}}} \models \varphi(a_0,...,a_{n-1},b)\}$

となること，とする．このとき，f は $\mathfrak{A}$ で φ により**定義される**とも言うことにする．

$\sqsubset^{\mathfrak{A}}$ が整列順序であることから，各 $\mathcal{L}^{\sqsubset}$-論理式 $\psi = \psi(x, x_0,...,x_{n-1})$ に対し，y が $\psi(x, x_0,...,x_{n-1})$ を満たす x のうちで $\sqsubset$ に関する最小元であるか，あるいは，そのようなものがなければ，$\emptyset^{\sqsubset^{\mathfrak{A}}}$ であることを主張する，次の論理式 η により，関数 $f_\psi : A^n \to A$ が $\mathfrak{A}$ で定義される:

(14.7) $\eta(x_0,...,x_{n-1},y) =$ sk-2

$$
\begin{aligned}
&(\exists x\psi(x, x_0,...,x_{n-1}) \ \to \\
&\quad (\psi(y, x_0,...,x_{n-1}) \ \land \ \forall z\,((z \sqsubset y \land z \not\equiv y) \to \neg\psi(z, x_0,...,x_{n-1})))\\
&\land (\neg\exists x\psi(x, x_0,...,x_{n-1}) \ \to \ y \equiv \emptyset^{\sqsubset}).
\end{aligned}
$$

ただし，ここで “$y \equiv \emptyset^{\sqsubset}$” は y が $\sqsubset$ に関する最小元であることを主張する $L^{\sqsubset}$-論理式とする．

この f_ψ に対し，次が成り立つ (演習):

(14.8) $\mathfrak{A}_{\sqsubset^{\mathfrak{A}}} \models \forall x_0 \cdots \forall x_{n-1} \left(\exists x\psi(x, x_0,...,x_{n-1}) \ \leftrightarrow \ \psi(f_\psi(x_0,...,x_{n-1}), x_0,...,x_{n-1})\right).$ sk-3

$\mathcal{L}^{\sqsubset}$-論理式 ψ に対し，上のような $\mathfrak{A}_{\sqsubset^{\mathfrak{A}}}$ で定義可能な関数 f_ψ を ψ の**スコーレム関数**とよぶ．

$X \subseteq A$ に対し，X の ($\mathfrak{A}_{\sqsubset^{\mathfrak{A}}}$ での) **スコーレム閉包** $sk_{\sqsubset^{\mathfrak{A}}}(X)$ を，

(14.9)　$sk_{\sqsubset^{\mathfrak{A}}}(X) = \bigcap\{B \in \mathcal{P}(A) : X \subseteq B,\ \ B$ は,$\mathfrak{A}_{\sqsubset^{\mathfrak{A}}}$ で定義可能な すべての関数に関して閉じている[50]$\}$　skolem-hull-0

とする．この定義から，特に $sk_{\sqsubset^{\mathfrak{A}}}(X)$ は $\mathfrak{A}$ での $\mathcal{L}$ の関数記号の解釈のすべてに関して閉じているので **(演習)**， $\mathfrak{A} \restriction sk_{\sqsubset^{\mathfrak{A}}}(X)$ または $\mathfrak{A}_{\sqsubset^{\mathfrak{A}}} \restriction sk_{\sqsubset^{\mathfrak{A}}}(X)$ は，それぞれ $\mathfrak{A}$ または $\mathfrak{A}_{\sqsubset^{\mathfrak{A}}}$ の部分構造となるが，これらの部分構造も $sk_{\sqsubset^{\mathfrak{A}}}(X)$ で表わすことにする．

$\mathcal{L}$-構造 $\mathfrak{A} = \langle A, ...\rangle$, と $\mathfrak{A}$ の部分構造 $\mathfrak{B} = \langle B, ...\rangle$ に対し，$\mathfrak{B}$ が $\mathfrak{A}$ の**初等的部分構造**である (記号: $\mathfrak{B} \prec \mathfrak{A}$) とは，すべての $\mathcal{L}$-論理式 $\varphi = \varphi(x_0, ..., x_{n-1})$ と $b_0, ..., b_{n-1} \in B$ に対し

(14.10)　$\mathfrak{B} \models \varphi(b_0, ..., b_{n-1})\ \Leftrightarrow\ \mathfrak{A} \models \varphi(b_0, ..., b_{n-1})$　sk-0

が成り立つこと，とする．

言語 $\mathcal{L}$ に対し，$\|\mathcal{L}\|$ で $\max(\mathcal{L}$ の濃度$, \aleph_0)$ を表わすことにする．$\|\mathcal{L}\|$ は $\mathsf{Fml}_{\mathcal{L}}$ の濃度と一致することに注意する．

T-skolem

定理 14.1 $\mathcal{L}$ を言語として， $\mathfrak{A} = \langle A, ...\rangle$ を $\mathcal{L}$-構造とし， $\sqsubset^{\mathfrak{A}}$ を A 上の整列順序とする．このとき，任意の $X \subseteq A$ に対し，次が成り立つ:

（1）$|\, sk_{\sqsubset^{\mathfrak{A}}}(X) \,| \leq \max\{\|\mathcal{L}\|, |\, X \,|\}$.

（2）$sk_{\sqsubset^{\mathfrak{A}}}(X) \prec \mathfrak{A}_{\sqsubset^{\mathfrak{A}}}$, したがって，特に，$sk_{\sqsubset^{\mathfrak{A}}}(X) \prec \mathfrak{A}$ である．

証明． (1):

(14.11)　$sk_{\sqsubset^{\mathfrak{A}}}(X) = \bigcup\{cl^n(X) : n \in \omega\}$

と書ける．ここに，

(14.12)　$cl^0(X) = X;$

(14.13)　$cl^{n+1}(X) = \bigcup\{f''cl^n(X) : f$ は $\mathfrak{A}_{\sqsubset^{\mathfrak{A}}}$ で定義可能な関数$\}$

とする．$n \in \omega$ に関する帰納法で，$|\, cl^n(X) \,| \leq \max\{\|\mathcal{L}\|, |\, X \,|\}$ が示せるから，$|\, sk_{\sqsubset^{\mathfrak{A}}}(X) \,| \leq \max\{\|\mathcal{L}\|, |\, X \,|\}$ が帰結できる．

(2): すべての $\varphi = \varphi(x_0, ..., x_{n-1}) \in \mathsf{Fml}_{\mathcal{L}^{\sqsubseteq}}$ に対し，

(14.14)　すべての $a_0, ..., a_{n-1} \in sk_{\sqsubset^{\mathfrak{A}}}(X)$ に対し，　sk-1

$$\mathfrak{A} \models \varphi(a_0, ..., a_{n-1})\ \Leftrightarrow\ sk_{\sqsubset^{\mathfrak{A}}}(X) \models \varphi(a_0, ..., a_{n-1})$$

となることを，φ の構成に関する帰納法で示す．φ が量化子を含まないなら (14.14) は明らかである．$\tau \in \mathsf{Fml}_{\mathcal{L}^{\sqsubset}}$ と $\eta \in \mathsf{Fml}_{\mathcal{L}^{\sqsubset}}$ に対し，(14.14) が成り立つなら，$\neg\tau$, $\tau \wedge \eta$ に対しても (14.14) が成り立つことも明らかである．

---

[50] B が $\mathfrak{A}_{\sqsubset^{\mathfrak{A}}}$ で定義可能なすべての関数に関して閉じている，とは，任意の $n \in \omega$ と任意の定義可能な $f : A^n \to A$ に対し，$f''B^n \subseteq B$ となることである．

したがって，$\psi = \psi(x, x_0, ..., x_{n-1}) \in \mathsf{Fml}_{\mathcal{L}^{\sqsubset}}$ に対して (14.14) が成り立つとき，$\varphi = \exists x\psi(x, x_0, ..., x_{n-1})$ に対しても (14.14) が成り立つことが示せればよい．

$\psi = \psi(x, x_0, ..., x_{n-1})$ に対して (14.14) が成り立つとして，$a_0, ..., a_{n-1} \in sk_{\sqsubset\mathfrak{A}}(X)$ を任意にとる．

$\mathfrak{A} \models \varphi(a_0, ..., a_{n-1})$, つまり，$\mathfrak{A} \models \exists x\psi(x, a_0, ..., a_{n-1})$ が成り立つとすると，f_ψ を ψ のスコーレム関数として，(14.7) により，$\mathfrak{A} \models \psi(f_\psi(a_0, ..., a_{n-1}), a_0, ..., a_{n-1})$ が成り立つ．$f_\psi(a_0, ..., a_{n-1}) \in sk_{\sqsubset\mathfrak{A}}(X)$ だから，帰納法の仮定から，$sk_{\sqsubset\mathfrak{A}}(X) \models \psi(a, a_0, ..., a_{n-1})$ である．したがって，$sk_{\sqsubset\mathfrak{A}}(X) \models \exists x\, \psi(a, a_0, ..., a_{n-1})$, つまり $sk_{\sqsubset\mathfrak{A}}(X) \models \varphi(a_0, ..., a_{n-1})$ である．

逆に $sk_{\sqsubset\mathfrak{A}}(X) \models \varphi(a_0, ..., a_{n-1})$, つまり $sk_{\sqsubset\mathfrak{A}}(X) \models \exists x\psi(x, a_0, ..., a_{n-1})$ とすると，$a \in \mathfrak{A}$ で $sk_{\sqsubset\mathfrak{A}}(X) \models \psi(a, a_0, ..., a_{n-1})$ となるものが存在する．したがって，帰納法の仮定から $\mathfrak{A} \models \psi(a, a_0, ..., a_{n-1})$ となるから，$\mathfrak{A} \models \exists\psi(x, a_0, ..., a_{n-1})$ つまり $\mathfrak{A} \models \varphi(a_0, ..., a_{n-1})$ である． □ (定理 14.1)

$\mathcal{L}$-構造 $\mathfrak{A}$ の部分構造の $\subseteq$ (部分構造関係) に関する上昇列 $\langle \mathfrak{B}_\alpha : \alpha < \delta \rangle$ に対して，$\mathfrak{B}_\alpha = \langle B_\alpha, ... \rangle, \alpha < \delta$ として，$B = \bigcup_{\alpha<\delta} B_\alpha$ とすると，B は $\mathfrak{A}$ の定数と関数に関して閉じている．したがって，$\mathfrak{A}$ の部分構造 $\mathfrak{A} \restriction B$ が考えられるが，この部分構造を $\bigcup_{\alpha<\delta} \mathfrak{B}_\alpha$ とあらわすことにする．

T-sk-0

補題 14.2 任意の言語 $\mathcal{L}$ に対し，$\langle \mathfrak{B}_\alpha : \alpha < \delta \rangle$ を $\mathcal{L}$-構造 $\mathfrak{A}$ の初等的部分構造の $\subseteq$ (部分構造関係) に関する上昇列とするとき，$\bigcup_{\alpha<\delta} \mathfrak{B}_\alpha \prec \mathfrak{A}$ である．

集合 A の部分集合列 $\langle A_\alpha : \alpha < \kappa \rangle$ が連続的に上昇的であるとは，$\langle A_\alpha : \alpha < \kappa \rangle$ は $\subseteq$ に関して上昇的，つまり，すべての $\alpha < \beta < \kappa$ に対し，$A_\alpha \subseteq A_\beta$ が成り立ち，すべての $\gamma \in \mathrm{Lim} \cap \kappa$ に対し $A_\gamma = \bigcup_{\alpha<\gamma} A_\alpha$ が成り立つこととする．

集合 A の部分集合列 $\langle A_\alpha : \alpha < \kappa \rangle$ が A の filtration であるとは，$\langle A_\alpha : \alpha < \kappa \rangle$ は連続的に上昇的で，すべての $\alpha < kappa$ に対し $|\, A_\alpha \,| < |\, A \,|$ で，$A = \bigcup_{\alpha<\kappa} A_\alpha$ となることとする．言語 $\mathcal{L}$ お対する $\mathcal{L}$-構造 $\mathfrak{A} = \langle A, ... \rangle$ と，$\mathfrak{A}$ の部分構造の $\subseteq$ (部分構造関係) に関する上昇列 $\langle \mathfrak{A}_\alpha : \alpha < \kappa \rangle$ に対し，$\langle \mathfrak{A}_\alpha : \alpha < \kappa \rangle$ が $\mathfrak{A}$ の filtration であるとは，$\mathfrak{A}_\alpha = \langle A_\alpha, ... \rangle, \alpha < \kappa$ として，$\langle A_\alpha : \alpha < \kappa \rangle$ が A の filtration であることとする．

$\alpha \in \mathrm{On}$ に対し，$C \subseteq \alpha$ が α の club 部分集合であるとは，すべての $\gamma < \alpha$ に対し，$\sup(C \cap \gamma) = \gamma$ なら，$\gamma \in C$ で (<u>cl</u>osed)，$\sup C = \alpha$ (<u>u</u>n<u>b</u>ounded) が成り立つこととする．

T-sk-1

系 14.3 (1) 任意の言語 $\mathcal{L}$ に対し，$\mathfrak{A} = \langle A, ... \rangle$ を $\mathcal{L}$-構造として，$X \subseteq A$ とするとき，$\mathfrak{A}$ の初等的部分構造 $\mathfrak{B} = \langle B, ... \rangle$ で，$X \subseteq B$, $|\, B \,| \leq \max\{\| L \|, X\}$ となるものが存在する．

(2) $\mathcal{L}$-構造 $\mathfrak{A} = \langle A, ... \rangle$ が，$\kappa = |\, A \,| > \| \mathcal{L} \|$ を満たし，κ は正則基数であるとする．このとき，任意の $\mathfrak{A}$ の filtration $\langle \mathfrak{A}_\alpha : \alpha < \kappa \rangle$ に対し，$\{\alpha < \kappa : \mathfrak{A}_\alpha \prec \mathfrak{A}\}$ は κ の club 部分集合である．

15 累積的階層と集合論の有限片の推移的モデル

cumulative

定理 9.7, (2) を用いると，以下のような性質で特徴付けされる，順序数で添字付けされた集合の列が定義できる:

(15.1) $V_0 = \emptyset$; cuml-1

(15.2) $\alpha \in \mathrm{On}$ に対し，$V_{\alpha+1} = \mathcal{P}(V_\alpha)$; cuml-2

(15.3) $\gamma \in \mathrm{On}$ が極限順序数のとき，$V_\gamma = \bigcup\{V_\alpha : \alpha < \gamma\}$. cuml-3

演習問題 15.1

$$
\begin{aligned}
(15.4)\quad \mathcal{G} = \{\langle\emptyset,\emptyset\rangle\} &\cup \{\langle f, \mathcal{P}(f(\alpha))\rangle : \alpha \in \mathrm{On},\, f \in D,\, \mathrm{dom}(f) = \alpha + 1\} \\
&\cup \{\langle f, \textstyle\bigcup\{f(\alpha) : \alpha \in \mathrm{dom}(f)\}\rangle : f \in D,\, \mathrm{dom}(f) \text{ は極限順序数 }\}
\end{aligned}
$$

とすると，このクラス $\mathcal{G}$ を用いて 定理 9.7, (2) でのように定義された $\mathcal{F}$ に対し，$\mathcal{F}(\alpha)$, $\alpha \in \mathrm{On}$ は，(15.1), (15.2), (15.3) を満たすものになる．

V_α, $\alpha \in \mathrm{On}$ は，**累積的階層**，または**フォン・ノイマン階層**とよばれる．これが実際にクラス $V = \{x : x = x\}$ に階層構造を導入していることは，次の補題からわかる:

L-3

補題 15.2 (1) すべての $\alpha \in \mathrm{On}$ に対し V_α は推移的である．

(2) すべての $\beta < \alpha$ に対し，$V_\beta \subseteq V_\alpha$ が成り立つ．

(3) すべての $\alpha \in \mathrm{On}$ に対し，$V_\alpha \cap \mathrm{On} = \alpha$ である．

(4) すべての集合 x に対し，$x \in V_\alpha$ となる $\alpha \in \mathrm{On}$ が存在する．

証明． (1): α に関する帰納法で示す．$\alpha = 0$ に対しては，(15.1) により $V_0 = \emptyset$ だから主張は明らかに成り立つ．

次に，すべての $\beta \le \alpha$ に対して，V_β は推移的として，$V_{\alpha+1}$ も推移的であることを示す．$y \in x \in V_{\alpha+1}$ として $y \in V_{\alpha+1}$ が示せればよい．$x \in V_{\alpha+1} = \mathcal{P}(V_\alpha)$ だから，$y \in x \subseteq V_\alpha$ となり，$y \in V_\alpha$ である．したがって，帰納法の仮定から V_α は推移的だから，$y \subseteq V_\alpha$ となり，$y \in \mathcal{P}(V_\alpha) = V_{\alpha+1}$ である．

γ を極限順序数として，すべての $\alpha < \gamma$ に対し V_α は推移的とする．このとき，V_γ も推移的であることを示す．$y \in x \in V_\gamma$ とすると，(15.3) により，ある $\alpha < \gamma$ に対し，$y \in x \in V_\alpha$ となるから，帰納法の仮定より，$y \in V_\alpha$ である．(15.3) により $V_\alpha \subseteq V_\gamma$ だから，$y \in V_\gamma$ である．

(2): $\alpha = 0$ なら主張は自明に成り立つ．α が極限順序数のときも，(15.3) により主張は自明に成り立つ．したがって，もし $V_\beta \not\subseteq V_\alpha$ となる $\beta < \alpha$ が存在するとして，α をそのようなもので最小のものとするとき，(15.3) により，α は非極限順序数となるから，$\alpha = \alpha_0 + 1$ する．このとき，すべての $\beta < \alpha$ に対し，$\beta \le \alpha_0$ となるから，α の最小性から，

(15.5) $V_\beta \subseteq V_{\alpha_0}$ cuml-4

となる．(1) により V_α は推移的で，$V_{\alpha_0} \in \mathcal{P}(V_{\alpha_0}) = V_\alpha$ だから，

(15.6) $V_{\alpha_0} \subseteq V_\alpha$ cuml-5

である．したがって (15.5), (15.6) により，$V_\beta \subseteq V_\alpha$ がすべての $\beta < \alpha$ に対し成り立つことがわかるが，これは，α の選び方に矛盾である．

(3): α に関する帰納法で示す．$\alpha = 0$ のときには，$V_0 \cap \mathrm{On} = \emptyset\,(= 0)$ だから主張は成り立つ．主張がすべての $\beta \leq \alpha$ に対して成り立つとすると，

(15.7)
$$\begin{aligned} \xi \in V_{\alpha+1} \cap \mathrm{On} \quad &\Leftrightarrow \quad \xi \subseteq V_\alpha \text{ かつ } \xi \in \mathrm{On} \\ &\Leftrightarrow \quad \xi \subseteq \alpha \text{ かつ } \xi \in \mathrm{On} \\ &\Leftrightarrow \quad \xi \leq \alpha \\ &\Leftrightarrow \quad \xi \in \alpha + 1 \end{aligned}$$

により，主張は $\alpha + 1$ に対しても成り立つ．

γ が極限順序数で，すべての $\alpha < \gamma$ に対して主張が成り立つときには，(15.3) から，

(15.8)
$$\begin{aligned} \xi \in V_\gamma \cap \mathrm{On} \quad &\Leftrightarrow \quad \xi \in \bigcup\{V_\alpha \cap \mathrm{On} : \alpha \in \gamma\} \\ &\Leftrightarrow \quad \xi \in \bigcup\{\alpha : \alpha \in \gamma\} \\ &\Leftrightarrow \quad \xi \in \gamma \end{aligned}$$

により，γ に対しても主張が成り立つ．

(4): 集合 x ですべての $\alpha \in \mathrm{On}$ に対し，$x \notin V_\alpha$ となるようなものが存在するとして矛盾を導く．一般性を失なうことなく x はそのようなもののうち $\in$ に関して極小であるとしてよい[51]．transitive closure x の極小性から，すべての $y \in x$ に対し $\alpha \in \mathrm{On}$ で !!!!
$y \in V_\alpha$ となるようなものが存在するから，各 $y \in x$ に対し，そのようなもののうち最小のものを α_y とよぶことにする．このとき $\{\alpha_y : y \in x\}$ は置換公理により集合だから，補題 9.4 により，順序数 $\beta = \sup(\{\alpha_y : y \in x\})$ がとれる．このとき $x \subseteq V_\beta$ である．したがって $x \in V_{\beta+1}$ となるが，これは，x の選び方に矛盾である． ❑ (補題 15.2)

集合 x に対し，$o(x) = \min\{\alpha \in \mathrm{On} : x \in V_\alpha\}$ とする．(15.2), (4) により $o(x)$ はうまく定義でき，(15.1), (15.3) により $o(x)$ は非極限順序数となる．そこで，$\alpha + 1 = o(x)$ となるような α を $\mathit{rank}(x)$ と表わすことにする．$\mathit{rank}(x)$ は $x \in V_{\alpha+1}$ となるような最小の順序数 α である．

L-3-0

補題 15.3 (1) すべての集合 x, y に対し，$y \in \mathit{trcl}(x)$ なら $\mathit{rank}(y) < \mathit{rank}(x)$ である．

(2) すべての集合 x に対し，$\mathit{rank}(x) = \sup\{\mathit{rank}(y) + 1 : y \in x\}$ である．

証明． (a): $x \in V_{\mathit{rank}(x)+1}$ だから，(15.2) により，$x \subseteq V_{\mathit{rank}(x)}$ である．したがって $V_{\mathit{rank}(x)}$ は推移的だから (補題 15.2, (1))，$\mathit{trcl}(x) \subseteq V_{\mathit{rank}(x)}$ となる．特に $y \in V_{\mathit{rank}(x)}$ となるから，$\mathit{rank}(y) < \mathit{rank}(x)$ である．

---

[51] 必要なら，x を集合 $\{u \in \mathit{trcl}(x \cup \{x\}) :$ すべての $\alpha \in \mathrm{On}$ に対し $u \notin V_\alpha\}$ の $\in$ に関する極小元として取り直せばよい．

(2):

❏ (補題 15.3)

$\mathcal{L}_\varepsilon$-論理式 $\varphi = \varphi(x_0, ..., x_{n-1})$ と空でない推移的な集合 M に対し，φ が M 上で絶対的である，とは，

(15.9) すべての $a_0, ..., a_{n-1} \in M$ に対し， abs-0

$$\langle M, \in \rangle \models \varphi(a_0, ..., a_{n-1}) \;\Leftrightarrow\; \varphi(a_0, ..., a_{n-1})$$

が成り立つ

こととする．次は $\models$ の定義から直ちに明らかである．

L-4

補題 15.4 φ, ψ を $\mathcal{L}_\varepsilon$-論理式 として，M を空でない推移的な集合とする．

(1) φ が M 上絶対的となることと，$\neg\varphi$ が M 上絶対的となることは同値である．

(2) φ と ψ が M 上絶対的なら，$(\varphi \vee \psi)$ も M 上絶対的である． ❏

クラス $\mathcal{X} \subseteq \mathrm{On}$ が club であるとは，次の (15.10), (15.11) が成り立つことである: Lim !!!!

(15.10) すべての $\delta \in \mathrm{Lim}$ について $\delta \cap \mathcal{X}$ が δ で共終的なら，$\delta \in \mathcal{X}$ となる (closed). club-0

(15.11) すべての $\alpha \in \mathrm{On}$ について，$\beta \in \mathcal{X}$ で $\alpha < \beta$ となるものが存在する (unbounded). club-1

$\mathcal{C} \subseteq \mathrm{On}$ が club なら，$\mathcal{C}$ は真のクラスになる．また，以下の補題 15.5 で示すように，2 つの (したがって有限個の) club なクラスの共通部分は再び club となる．この意味で，$\mathcal{C} \subseteq \mathrm{On}$ が club であることは “ほとんどすべての順序数は $\mathcal{X}$ の要素である” ということを示唆していると考えることができる (極限順序数の全体は club となるので，この言い方では，“ほとんどすべての順序数は極限順序数である” ということになることに注意する．)．そこで，任意の順序数のクラス $\{\alpha \in \mathrm{On} : \varphi(\alpha)\}$ が club な部分クラスを含むときこのことを “φ を満たす $\alpha \in \mathrm{On}$ は **club many** に存在する” とも表現することにする．

club

補題 15.5 $\mathcal{X}, \mathcal{Y} \subseteq \mathrm{On}$ を club な 2 つのクラスとするとき，$\mathcal{X} \cap \mathcal{Y}$ も club である．

証明． $\mathcal{X}$ と $\mathcal{Y}$ を club な On の部分クラスとする．次の 2 つの Claims から $\mathcal{X} \cap \mathcal{Y}$ が club であることがわかる:

Claim 15.5.1 $\mathcal{X} \cap \mathcal{Y}$ は closed である．

$\vdash$ $\delta \in \mathrm{Lim}$ で，$\delta \cap (\mathcal{X} \cap \mathcal{Y})$ が δ で共終的であるとする．このとき，$\delta \cap (\mathcal{X} \cap \mathcal{Y}) \subseteq \delta \cap \mathcal{X}$, $\delta \cap \mathcal{Y}$ により，$\delta \cap \mathcal{X}$ も $\delta \cap \mathcal{Y}$ も δ で共終的だから，$\mathcal{X}$ と $\mathcal{Y}$ が closed であることから，$\delta \in \mathcal{X}$ かつ $\delta \in \mathcal{Y}$, したがって，$\delta \in \mathcal{X} \cap \mathcal{Y}$ である． $\dashv$ (Claim 15.5.1)

Claim 15.5.2 $\mathcal{X} \cap \mathcal{Y}$ は unbounded である．

$\vdash$ $\alpha \in \mathrm{On}$ を任意にとる．$\mathcal{X}$ も $\mathcal{Y}$ も On で unbounded であることから，順序数の上昇列 $\alpha_0 < \alpha_1 < \cdots < \alpha_i < \cdots$, $i \in \omega$ を，

(15.12) $\alpha < \alpha_0$; club-1-0

(15.13) すべての $n \in \omega$ に対し，$\alpha_{2n} \in \mathcal{X}$ かつ $\alpha_{2n+1} \in \mathcal{Y}$ club-1-1

となるようにとることができる．$\delta = \lim_{i \in \omega} \alpha_i$ とすると，$\alpha < \delta$ で $\delta \in \mathrm{Lim}$ である．(15.13) により，$\delta \cap \mathcal{X}$ も $\delta \cap \mathcal{Y}$ も δ で共終的である．よって，$\mathcal{X}$ と $\mathcal{Y}$ が closed であることから，$\delta \in \mathcal{X}$ かつ $\delta \in \mathcal{Y}$ となる．したがって，$\delta \in \mathcal{X} \cap \mathcal{Y}$ である． $\dashv$ (Claim 15.5.2)

□ (補題 15.5)

定理 15.6 (Lévy-Montague Reflection Principle) すべての $\mathcal{L}_\varepsilon$-論理式 φ に対して， levy

$$\mathcal{X}_\varphi = \{\alpha \in \mathrm{On} : \varphi \text{ は } V_\alpha \text{ 上絶対的}\}$$

は On の club な部分クラス $\mathcal{C}_\varphi$ を含む．

上の定理は，実際には各 $\mathcal{L}_\varepsilon$-論理式 φ ごとに記述された無限個の主張を束ねた meta-theorem である．

定理 15.6 の証明． φ の構成に関する帰納法で示す．

φ が原子論理式のときには，$\mathcal{X}_\varphi = \mathrm{On} \setminus \{\emptyset\}$ となるから $\mathcal{C}_\varphi = \mathcal{X}_\varphi$ とすればよい．

補題 15.4 と補題 15.5 により，あとは $\varphi = \varphi(x_0, ..., x_{n-1})$ が，$\exists x\, \psi(x, x_0, ..., x_{n-1})$ という形をしていて，定理の主張が ψ に対しては成り立つ場合を考えればよいことがわかる．

この場合には，club な $\mathcal{C}_\psi \subseteq \mathcal{X}_\psi$ がとれる．このとき，

(15.14) $\mathcal{C}_\varphi = \{\alpha \in \mathcal{C}_\psi : \varphi \text{ は } V_\alpha \text{ 上絶対的}\}$ club-2

とする．つまり $\mathcal{C}_\varphi = \mathcal{X}_\varphi \cap \mathcal{C}_\psi$ である．特に $\mathcal{C}_\varphi \subseteq \mathcal{X}_\varphi$ だから，この $\mathcal{C}_\varphi$ が club であることが示せればよい．

Ydashed-closed

Claim 15.6.1 $\mathcal{C}_\varphi$ は closed である．

$\vdash$ $\delta \in \mathrm{Lim}$ で $\delta \cap \mathcal{C}_\varphi$ が δ で共終的とする．このとき，$\delta \in \mathcal{C}_\varphi$ が示せればよい．

$\mathcal{C}_\varphi \subseteq \mathcal{C}_\psi$ により，$\delta \cap \mathcal{C}_\psi$ も δ で共終的で，$\mathcal{C}_\psi$ が club であることから，$\delta \in \mathcal{C}_\psi$ である．δ は極限順序数で $\delta \cap \mathcal{C}_\varphi$ は δ で共終的だから，$a_0, ..., a_{n-1} \in V_\delta$ に対し，$\alpha \in \delta \cap \mathcal{C}_\varphi$ で，$a_0, ..., a_{n-1} \in V_\alpha$ となるものがある．

$\alpha \in \mathcal{X}_\varphi$ により，$\varphi(a_0, ..., a_{n-1})$ なら，$V_\alpha \models \varphi(a_0, ..., a_{n-1})$ となるから，$a \in V_\alpha$ で，$V_\alpha \models \psi(a, a_0, ..., a_{n-1})$ となるものが存在する．$\alpha \in \mathcal{C}_\psi$ により，$\psi(a, a_0, ..., a_{n-1})$ が成り立つが，$\delta \in \mathcal{C}_\psi$ で $a, a_0, ..., a_{n-1} \in V_\delta$ だから，$V_\delta \models \psi(a, a_0, ..., a_{n-1})$ となり，したがって，$V_\delta \models \varphi(a_0, ..., a_{n-1})$ である．

逆に，$V_\delta \models \varphi(a_0, ..., a_{n-1})$ なら $a \in V_\delta$ で，$V_\delta \models \psi(a, a_0, ..., a_{n-1})$ となるものがとれるが，$\delta \in \mathcal{C}_\psi$ だから，このことから $\psi(a, a_0, ..., a_{n-1})$ が成り立つことがわかる．したがって，$\exists x \psi(x, a_0, ..., a_{n-1})$, つまり，$\varphi(a_0, ..., a_{n-1})$ が成り立つ．

以上により，$\delta \in \mathcal{C}_\varphi$ が示せた． $\dashv$ (Claim 15.6.1)

Claim 15.6.2 $\mathcal{C}_\varphi$ は unbounded である．

$\vdash$ $\alpha \in \mathrm{On}$ を任意にとるとき，順序数の上昇列 α_i, $i \in \omega$ を，

$$(15.15)\quad \alpha_0 = \min(\mathcal{C}_\psi \setminus \alpha+1),$$ club-3

$$(15.16)\quad \alpha_{i+1} = \sup\big(\{\min\{\beta \in \mathcal{C}_\psi \setminus \alpha_i \,:\, V_\beta \models \varphi(a_0, ..., a_{n-1})\} \,:\, a_0, ..., a_{n-1} \in V_{\alpha_i}\} \cup \{\alpha_i\}\big)$$ club-4

とする．ただし，ここでは $\min(\emptyset) = 0$ としている．

$\delta = \sup(\{\alpha_i \,:\, i \in \omega\})$ とすると，(15.15), (15.16) から

$$(15.17)\quad \alpha < \alpha_0 \leq \alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \cdots \leq \delta$$

で，特に $\alpha < \delta$ である．$\delta \in \mathcal{C}_\varphi$ を示す:

(15.15) と (15.16) から，$\alpha_i \in \mathcal{C}_\psi$, $i \in \omega$ だから，$\mathcal{C}_\psi$ が club であることから $\delta \in \mathcal{C}_\psi$ である．

$a_0, ..., a_{n-1} \in V_\delta$ とすると，$i \in \omega$ で $a_0, ..., a_{n-1} \in V_{\alpha_i}$ となるものがとれる．

$\varphi(a_0, ..., a_{n-1})$ が成り立つとすると，$\psi(a, a_0, ..., a_{n-1})$ となる a が存在するから，$\beta \in \mathcal{C}_\psi$ で，$a, a_0, ..., a_{n-1} \in V_\beta$ となるものがとれる．このような a と β の組のうち β が最小となるような組の一つを a^*, β^* とすると，(15.16) から，$\beta^* \leq \alpha_{i+1} < \delta$ となるから，$a^* \in V_\delta$ で，$\delta \in \mathcal{C}_\psi$ により，$V_\delta \models \psi(a^*, a_0, ..., a_{n-1})$ である．したがって，$V_\delta \models \exists x \psi(x, a_0, ..., a_{n-1})$ つまり，$V_\delta \models \varphi(a_0, ..., a_{n-1})$ である．

逆に，$V_\delta \models \varphi(a_0, ..., a_{n-1})$ なら，$a \in V_\delta$ で，$V_\delta \models \psi(a, a_0, ..., a_{n-1})$ となるものがとれるが，$\delta \in \mathcal{C}_\psi$ だから，このことから $\psi(a, a_0, ..., a_{n-1})$ が成り立つことが帰結される．したがって $\exists x\, \psi(x, a_0, ..., a_{n-1})$ つまり $\varphi(a_0, ..., a_{n-1})$ が成り立つ． $\dashv$ (Claim 15.6.2)

❑ (定理 15.6)

levy-0

系 15.7 φ_0,...,φ_{n-1} を $\mathcal{L}_\varepsilon$-論理式とすると，club なクラス $\mathcal{C} \subseteq \mathrm{On}$ で，

$\alpha \in \mathcal{C}$ なら，すべての φ_i, $i < n$ は V_α 上で絶対的

となるようなものが存在する．

特に，φ_0,...,φ_{n-1} を ZFC の公理とするとき，$V_\alpha \models \varphi_0 \wedge \cdots \wedge \varphi_{n-1}$ となるような $\alpha \in \mathrm{On}$ が club many に存在する[(52)]．

証明． 各 $i < n$ に対し，$\mathcal{C}_{\varphi_i}$ を定理 15.6 でのようにとる．このとき補題 15.5 により，$\mathcal{C} = \bigcap_{i<n} \mathcal{C}_{\varphi_i}$ は club になるから，この $\mathcal{C}$ が求めるようなものである． ❑ (系 15.7)

levy-1

定理 15.8 $\varphi_0, ..., \varphi_{n-1}$ を ZFC の有限個の公理の集まりとする．このとき，推移的な可算集合 M で，$\langle M, \in\rangle \models \varphi_0 \wedge \cdots \wedge \varphi_{n-1}$ となるものが存在する．

[(52)] この系も次の定理 15.8 も，実際には超数学で具体的に与えられた一つ一つの有限個の公理の集まり $\varphi_0, ...,$ φ_{n-1} に対する命題を束ねた meta-theorem である．実際，ここでの主張を，ZFC の中での “ZFC のすべての有限部分集合 T に対し…” というものだと解釈すると，述語論理のコンパクト性 (???) から，*consis*(ZFC) が証明できてしまい，このことから ZFC が矛盾することが帰結されてしまう．

証明. 系 15.7 により，$V_\alpha \models \varphi_0 \wedge \cdots \wedge \varphi_{n-1}$ となる $\alpha \in \mathrm{On}$ が存在する．$\sqsubseteq$ を V_α 上の任意の整列順序として $M^* = sk_{\sqsubseteq}(\emptyset)$ とすると(53)，定理 14.1 により M^* は可算で，$\langle M^*, \in\rangle \prec \langle V_\alpha, \in\rangle$ である．特に，このことから $\langle M^*, \in\rangle \models T$ で，(補題 15.2, (1) により，V_α が推移的であることから，補題 11.4 により) V_α は外延的なので，$\langle M^*, \in\rangle$ も外延的である．したがって，定理 11.5 により，推移的な集合 M と同型写像 $f : \langle M, \in\rangle \overset{\cong}{\to} \langle M^*, \in\rangle$ が存在する．この M は求めるようなものになっている． ❏ (定理 15.8)

系 15.9 (Montague, 1961) ZFC と同値な有限個の公理からなる公理系は存在しない．

証明. この主張も前の多くの主張と同様に，ZFC が無矛盾だとすれば，という前提条件の下での主張である．

ZFC が有限個の ZFC の定理 $\psi_0, \ldots, \psi_{n-1}$ により公理化されると仮定して，このことから ZFC の矛盾が結論できることを示す．

ZFC の中で議論する．系 15.7 により，$\alpha \in \mathrm{On}$ で，V_α 上 $\psi_0, \ldots, \psi_{n-1}$ が絶対的となるようなものが存在するが，$\psi_0, \ldots, \psi_{n-1}$ は ZFC の定理だから，$V_\alpha \models \psi_0, \ldots, \psi_{n-1}$ である．したがって，仮定から，$V_\alpha \models$ ZFC である．

したがって ZFC $\vdash$ *consis*(ZFC) だが，不完全性定理により，このことから ZFC が矛盾を導くことが結論できてしまう． ❏ (系 15.9)

16 推移的 $\in$-構造上の絶対性と ZFC のモデル

transitive-str

集合 M が推移的である，とは，第 11 節での意味で，M が関係 $\in$ に関して (左に) 閉じていることであった．つまり M が推移的であるとは

(16.1) すての $x \in M$ と $y \in x$ に対し，$y \in M$ が成り立つ trans-0

ことである．集合 M に対し，二項関係 $E = \in \restriction M^2 = \{\langle x, y\rangle \in M^2 : x \in y\}$ をとり，$\mathcal{L}_\varepsilon$-構造 $\langle M, E\rangle$ を M による $\in$-構造とよぶ．以下では，簡単のために，このような構造を $\langle M, \in\rangle$ と表わしたり，単に M と表わしたりもする．M が外延性公理を満たすときには，モストフスキーの崩壊補題により，$\langle M, \in\rangle \cong \langle N, \in\rangle$ となる推移的な $\in$-構造 N がとれる．したがって，同型を除いて議論のできるときには，$\in$-構造を考察するには推移的な $\in$-構造を考察すれば十分である．そこで，ここでは主に M が推移的な場合について考える．

$M = \langle M, \in\rangle$ を $\in$-構造とするとき．$\mathcal{L}_\varepsilon$-論理式 $\varphi(x_0, \ldots, x_{n-1})$ が M 上**絶対的**であるとは，

(16.2) すべての $a_0, \ldots, a_{n-1} \in M$ に対し，同値 $M \models \varphi(a_0, \ldots, a_{n-1}) \Leftrightarrow \varphi(a_0, \ldots, a_{n-1})$ が成り立つ

ことである．

$\mathcal{L}_\varepsilon$ 論理式が **Δ_0-論理式** である，ということを以下のように再帰的に定義する:

(16.3) '$x \varepsilon y$', '$x \equiv y$' は Δ_0-論理式である; delta-0

(16.4) φ, ψ が Δ_0-論理式なら，$\neg\varphi$, $(\varphi \wedge \psi)$, も Δ_0-論理式である; delta-1

(16.5) φ が Δ_0-論理式なら，$(\exists x \, \varepsilon \, y) \, \varphi$ も Δ_0-論理式である; delta-2

(16.6) 以上のみ. delta-3

ただし，$\mathcal{L}_\varepsilon$-論理式 $\varphi = \varphi(x, y, ...)$ に対し，$(\exists x \, \varepsilon \, y) \, \varphi$ は,

(16.7) $\exists x \; (x \, \varepsilon \, y \wedge \varphi)$

のこととする．これの双対として $\neg(\exists x \, \varepsilon \, y) \, \neg\varphi$ を考えると，この式は,

(16.8) $\forall x \; (x \, \varepsilon \, y \rightarrow \varphi)$

と論理的に同値となるが，この論理式を $(\forall x \, \varepsilon \, y) \, \varphi$ とも表すことにする.

$(\exists x \, \varepsilon \, y)$ や $(\forall \, \varepsilon \, y)$ の形の量化子を，**限定量化子**とよぶことにする.

ある $\mathcal{L}_\varepsilon$-論理式 φ が **Δ_0^{ZF}-論理式** であるとは，ある Δ_0-論理式 ψ が存在して，$\mathrm{ZF} \vdash \varphi \leftrightarrow \psi$ が成り立つこと，とする．φ が Δ_0^{ZF}-論理式で，上のような Δ_0-論理式 ψ に対し，ZF の有限部分 T に対し，$T \vdash \varphi \leftrightarrow \psi$ が成り立つとき，T を φ が Δ_0^{ZF} であることの確証とよぶことにして，このときには φ は Δ_0^T-論理式であるとも言うことにする.

$\mathcal{L}_\varepsilon$-論理式 $\varphi = \varphi(x_0, ..., x_{m-1})$ が **Σ_1^{ZF}-論理式**であるとは，ある Δ_0-論理式 $\psi = \psi(x_0, ..., x_{m-1}, y_0, ..., y_{n-1})$ が存在して，$\mathrm{ZF} \vdash \varphi \leftrightarrow \exists y_0 \cdots \exists y_{n-1} \psi$ となることとする.

$\varphi = \varphi(x_0, ..., x_{m-1})$ が **Π_1^{ZF}-論理式**であるとは，ある Δ_0-論理式 $\eta = \eta(x_0, ..., x_{m-1}, y_0, ..., y_{\ell-1})$ が存在して，$\mathrm{ZF} \vdash \varphi \leftrightarrow \forall y_0 \cdots \forall y_{\ell-1} \eta$ が成り立つこととする.

$\mathcal{L}_\varepsilon$-論理式 φ が **Δ_1^{ZF}-論理式**であるとは，φ が Σ_1^{ZF}-論理式かつ Π_1^{ZF}-論理式であることとする.

φ が Σ_1^{ZF}-, Π_1^{ZF}-, Δ_1^{ZF}-論理式であることの確証 T も上と同様に定義し，このとき φ が Σ_1^T-, Π_1^T-, Δ_1^T-論理式であるという言い方もすることにする.

absoluteness

補題 16.1 M を推移的な集合とする．このとき,

(1) φ が Δ_0-論理式なら，φ は M 上絶対的である.

(2) φ が Δ_0^{ZF}-論理式で，φ が Δ_0^{ZF}-論理式であることの確証を M が満たすなら，φ は M 上絶対的である.

(3) $\varphi = \varphi(x_0, ..., x_{m-1})$ が Σ_1^{ZF}-論理式で，φ が Δ_0^{ZF}-論理式であることの確証を M が満たすとする．$a_0, ..., a_{m-1} \in M$ に対し，$M \models \varphi(a_0, ..., a_{m-1})$ なら，$\varphi(a_0, ..., a_{m-1})$ が成り立つ.

(4) $\varphi = \varphi(x_0, ..., x_{m-1})$ が Π_1^{ZF}-論理式で，φ が Δ_0^{ZF}-論理式であることの確証を M が満たすとする．$a_0, ..., a_{m-1} \in M$ に対し，$\varphi(a_0, ..., a_{m-1})$ なら，$M \models \varphi(a_0, ..., a_{m-1})$ が成り立つ.

(5) φ が Δ_1^{ZF}-論理式で，φ が Δ_1^{ZF}-論理式であることの確証を M が満たすなら，φ は M 上絶対的である.

---

(53) $sk_{\sqsubseteq}(x)$ で $x \subseteq V_\alpha$ の $\langle V_\alpha, \in, \sqsubseteq \rangle$ でのスコーレム閉包を表している.

証明． (1): (16.3) $\sim$ (16.6) による Δ_0-論理式 φ の構成に関する帰納法による．φ が原子論理式の場合には，φ が M 上絶対的であることは明らかである．φ, ψ が M 上絶対的なら，$(\varphi \wedge \psi)$, $\neg\varphi$ も M 上絶対的となることも明らかである．

$\varphi = \varphi(x_0, x_1, ..., x_{n-1})$ が M 上絶対的として，$(\exists x\ \varepsilon\ x_0)\varphi(x, x_1, ..., x_{n-1})$ も M 上絶対的となることを示す．$a_0, ..., a_{n-1} \in M$ とする．

$M \models (\exists x\ \varepsilon\ a_0)\varphi(x, a_0, ..., a_{n-1})$ なら，$b \in M$ で，$b \in a_0$ かつ $M \models \varphi(b, a_1, ..., a_{n-1})$ となるものが存在するが，この b に対し，仮定から，$\varphi(b, a_1, ..., a_{n-1})$ が成り立つ，したがって，$(\exists x\ \varepsilon\ a_0)\varphi(x, a_1, ..., a_{n-1})$ が成り立つ．

逆に $(\exists x\ \varepsilon\ a_0)\varphi(x, a_1, ..., a_{n-1})$ が成り立つとすると，$b \in a_0$ で，$\varphi(b, a_1, ..., a_{n-1})$ となるようなものが存在するが，M が推移的であることから，$b \in M$ である．φ が M 上絶対的であることから $M \models \varphi(b, a_1, ..., a_{n-1})$ となり，$M \models (\exists x\ \varepsilon\ a_0)\varphi(x, a_1, ..., a_{n-1})$ が成り立つ．

(2): $\varphi = \varphi(x_0, ..., x_{n-1})$ を Δ_0^{ZFC}-論理式とする．T を ZFC の部分理論で，$M \models T$ かつ，ある Δ_0-論理式 ψ に対し，$T \vdash (\varphi \leftrightarrow \psi)$ となるようなものとする．

このとき，(1) により，任意の $a_0, ..., a_{n-1}$ に対し，

$$(16.9)\quad M \models \varphi(a_0, ..., a_{n-1}) \ \Leftrightarrow\ M \models \psi(a_0, ..., a_{n-1}) \ \Leftrightarrow\ \psi(a_0, ..., a_{n-1}) \text{ が成り立つ} \ \Leftrightarrow\ \varphi(a_0, ..., a_{n-1}) \text{ が成り立つ．}$$

(3): $\varphi = \varphi(x_0, ..., x_{n-1})$ を Δ_0^{ZFC}-論理式とする．T を ZFC の部分理論で，$M \models T$ かつ，ある Δ_0-論理式 ψ に対し，$T \vdash (\varphi \leftrightarrow \psi)$ となるようなものとする．ただし，ψ は，$(\exists x\ \varepsilon\ x_0)\psi_0(x, x_1, ..., x_{n-1})$ という形をしていて，ψ_0 は Δ_0-論理式であるとする(54)．このとき，$a_0, ..., a_{n-1}\ \varepsilon\ M$ に対して，$M \models \varphi(a_0, ..., A_{n-1})$ なら，$M \models (\exists x\ \varepsilon\ a_0)\psi_0(x, a_1, ..., a_{n-1})$ だから，$b \in M$ で $M \models (b\ \varepsilon\ a_0\ \wedge\ \psi_0(x, a_1, ..., a_{n-1}))$ となるものがある．このことから，(1) により，$(b\ \varepsilon\ a_0\ \wedge\ \psi_0(x, a_1, ..., a_{n-1}))$ が成り立つから，$\varphi(a_0, ..., A_{n-1})$ である．

(4): (3) と同様に示せる **(演習)**．

(5): (3), (4) から導かれる． ❑ (補題 16.1)

演習問題 16.2 次は Δ_0 論理式であらわせる:

(0) $x \equiv \emptyset$;

(1) $x \equiv \{y, z\}$;

(2) $x \equiv \bigcup y$;

(3) “x は推移的である”

(4) $y = s(x)$

(5) x は無限公理での性質を満たす;

(6) $x \subseteq y$.

pair-delta-0

(54) 一般には，限定量化にかかわる変数が x_0 とは限らないわけだが，必要なら変数のよびかえを行なうことで一般性を失なうことなくこのように仮定してかまわない．

演習問題 16.3 "$x_0 \equiv \langle x_1, ..., x_{n-1}\rangle$" は Δ_0-論理式であらわせる．

neg-delta

演習問題 16.4 (0) φ が Σ_0^{ZF}-論理式のとき φ は Σ_1^{ZF}-論理式でも Δ_1^{ZF}-論理式でもある．したがって，このときには φ は Σ_1^{ZF}-論理式でもある．

(1) φ が Δ_0^{ZF}-論理式のとき $\neg\varphi$ は Δ_0^{ZF}-論理式である．

(2) φ が Σ_1^{ZF}-論理式のとき $\neg\varphi$ は Π_1^{ZF}-論理式である．

(3) φ が Δ_1^{ZF}-論理式のとき $\neg\varphi$ は Δ_1^{ZF}-論理式である．

(4) φ と ϕ が共に Σ_1^{ZF}-論理式のとき $(\varphi \wedge \psi)$ も Σ_1^{ZF}-論理式である．

(5) φ と ϕ が共に Π_1^{ZF}-論理式のとき $(\varphi \vee \psi)$ は Σ_1^{ZF}-論理式である．

クラス $\mathcal{A}$ が Δ_0^{ZF} (または Σ_1^{ZF}, Π_1^{ZF}, Δ_1^{ZF}) である，とは $\mathcal{A}$ が $\mathcal{A} = \{\overline{a} : \varphi(\overline{a})\}$ として導入されているとして，ここでの論理式 φ が Δ_0^{ZF}- (または Σ_1^{ZF}-, Π_1^{ZF}-, Δ_1^{ZF}-) 論理式であること，とする．

たとえば，n 変数のクラス関数 $\mathcal{F}$ が (クラスとして) Σ_1^{ZF} であるのは，"$x_0 \equiv \mathcal{F}(x_1, ..., x_n)$" を表現する論理式が Σ_1^{ZF}-論理式であるときである．

delta-1-recursive

補題 16.5 $\mathcal{X}$ を Δ_1^{ZF} なクラスとして，$\mathcal{R}$ を $\mathcal{R}$ を $\mathcal{X}$ 上の集合的で整順的，Δ_1^{ZF} なクラス二項関係とする．このとき，$\mathfrak{F}$ を定理 11.3, (2) でのように定義すると $\mathfrak{F}$ は Δ_1^{ZF} なクラスとなるが，$\mathcal{G}$ と を $\mathfrak{F} \times \mathcal{X}$ 上の Σ_1^{ZF} なクラス関数とするとき，この $\mathcal{G}$ に対する，定理 11.3, (2) でのような $\mathcal{F}$ は Δ_1^{ZF} となる．

証明． "$\mathcal{F}(a) \equiv b$" は，

$$(16.10)\quad \exists f \underbrace{\Big(\mathrm{dom}(f) \subseteq \mathcal{X} \ \wedge \ \text{“}\mathrm{dom}(f) \text{ は } \mathcal{R} \text{ に関して閉じている”} \wedge (\forall x \,\varepsilon\, \mathrm{dom}(f))\,(f(x) \equiv \mathcal{G}(f \restriction \mathit{trcl}^-_{\mathcal{R}}(x), x)) \wedge a \,\varepsilon\, \mathrm{dom}(f) \ \wedge \ b \equiv f(a)\Big)}_{(*)}$$

delta-1-rec-0

と ZF で同値になる．(16.10) の (*) の部分は Σ_1^{ZF}-論理式として書けることが確かめられるから，"$\mathcal{F}(a) \equiv b$" も Σ_1^{ZF} である．

一方，"$\mathcal{F}(a) \equiv b$" は，

$$(16.11)\quad \forall f \underbrace{\Big(\big(\mathrm{dom}(f) \subseteq \mathcal{X} \ \wedge \ \text{“}\mathrm{dom}(f) \text{ は } \mathcal{R} \text{ に関して閉じている”} \wedge (\forall x \,\varepsilon\, \mathrm{dom}(f))\,(f(x) \equiv \mathcal{G}(f \restriction \mathit{trcl}^-_{\mathcal{R}}(x), x)) \wedge a \,\varepsilon\, \mathrm{dom}(f)\big) \ \rightarrow \ b \equiv f(a)\Big)}_{(**)}$$

delta-1-rec-1

とも ZF で同値になる．(16.11) の (**) の部分は Π_1^{ZF}-論理式として書けることが確かめられるから (演習問題 16.4 に注意する)，"$\mathcal{F}(a) \equiv b$" も Π_1^{ZF} である．

以上から，"$\mathcal{F}(a) \equiv b$" は Σ_1^{ZF} かつ Π_1^{ZF} であることが確かめられたので，"$\mathcal{F}(a) \equiv b$" は Δ_1^{ZF} 論理式である． ❑ (補題 16.5)

演習問題 16.6 上の証明の細部を埋めよ．

delta-1-rec-2

補題 16.7 モデル関係 $\models$ は Δ_1^{Z} である．

trans-model-0

補題 16.8 M を推移的な空でない集合とするとき，以下が成り立つ:

(1) M は外延性公理を満たす．

(2) M は空集合の公理を満たす．

(3) M が対の公理を満たすのは，すべての $a, b \in M$ に対し，$\{a, b\} \in M$ となるちょうどそのときである．

(4) M が和の公理を満たすのは，すべての $a \in M$ に対し，$\bigcup a \in M$ となるちょうどそのときである．

(5) $\omega \in M$ なら，M は無限公理を満たす．

(6) M が冪集合の公理を満たすのは，すべての $a \in M$ に対し，$\mathcal{P}(a) \cap M \in M$ となるときである．

trans-model-1

定理 16.9 (1) すべての $\alpha \in \mathrm{On} \setminus \omega + 1$ に対し，$V_\alpha \models \mathsf{Z} \;\Leftrightarrow\; \alpha \in \mathrm{Lim}$ である．さらに AC を仮定するときには，$V_\alpha \models \mathsf{ZC} \;\Leftrightarrow\; \alpha \in \mathrm{Lim}$ である．

(2) ZF $\vdash$ *consis*(Z), ZFC $\vdash$ *consis*(ZC) である．

(3) Z が無矛盾なら，置換公理は Z で証明できない．同様に ZC が無矛盾なら，置換公理は ZC で証明できない．

補題 16.10 (ZF) 任意の $\alpha, \beta \in \mathrm{On}, \alpha < \beta$ に対し，$V_\alpha \prec V_\beta$ なら，$V_\alpha \models \mathsf{ZF}$ である．さらに AC を仮定するときには，$V_\alpha \models \mathsf{ZFC}$ である． trans-model-3

証明． α と β を上のようなものとする．ことのき，まず，α が極限順序数であることが，次のようにしてわかる: もし $\alpha = \delta + 1$ となるような $\delta \in \mathrm{On}$ があったとすると，

(16.12) $V_\alpha \models$ “δ は最大の順序数である”

となるから，$V_\alpha \prec V_\beta$ から

(16.13) $V_\beta \models$ “δ は最大の順序数である”

でなくてはならないが，$\delta < \alpha$ で，$\alpha \in \beta = \mathrm{On} \cap \beta$ だから，これは矛盾である．したがって，命題 16.9,(1) により，$V_\alpha \models \mathsf{Z}$ (AC を仮定するときには $V_\alpha \models \mathsf{ZC}$) である．

V_α が置換公理を満たすことを示すために，ある $\mathcal{L}_\varepsilon$-論理式 $\varphi = \varphi(x, y, z_0, \dots, z_{m-1})$ と a, $a_0, \dots, a_{m-1} \in V_\alpha$ に対し，

(16.14) $V_\alpha \models (\forall x \,\varepsilon\, a)\, \exists! y\; \varphi(x, y, a_0, \dots, a_{m-1})$ trans-mod-a

が成り立つとする．

(16.15) $d = \{c : \text{ある } b \in a \text{ に対し } V_\alpha \models \varphi(b, c, a_0, \dots, a_{m-1})\}$ trans-mod-0

とすると，$d \subseteq V_\alpha$ となるから，$d \in V_{\alpha+1} \subseteq V_\beta$ である．$V_\alpha \prec V_\beta$ と (16.14) から，

$$V_\beta \models d \equiv \{y : (\exists x \,\varepsilon\, a)\ \varphi(x, y, a_0, ..., a_{m-1})\}$$

である．したがって，

$$V_\beta \models \exists z\ (z \equiv \{y : (\exists x \,\varepsilon\, a)\ \varphi(x, y, a_0, ..., a_{m-1})\})$$

である．よって，再び，$V_\alpha \prec V_\beta$ から，

$$V_\alpha \models \exists z\ (z \equiv \{y : (\exists x \,\varepsilon\, a)\ \varphi(x, y, a_0, ..., a_{m-1})\})$$

である．　□ (補題 16.10)

trans-model-3-0

補題 16.11 κ を強到達不可能基数とするとき，$\{\alpha < \kappa : V_\alpha \prec V_\kappa\}$ は κ の club 部分集合である．

証明． κ が強到達不可能なら，すべての $\alpha < \kappa$ に対し $|V_\alpha| < \kappa$ となることが α に関する帰納法で容易に示せる．したがって，$\langle V_\alpha : \alpha < \kappa\rangle$ は V_κ の filtration である．したがって補題の主張は，系 14.3, (2) から従う．　□ (補題 16.11)

trans-model-4

定理 16.12 （1） κ を強到達不可能基数とするとき，$V_\kappa \models \mathsf{ZFC}$ である．

（2） ZFC + “$V_\alpha \models \mathsf{ZFC}$ となる $\alpha \in \mathrm{On}$ が On で共終的に存在する” が無矛盾なら，この公理系から強到達不可能基数の存在は証明できない．

（3） T を ZFC + “$V_\alpha \models \mathsf{ZFC}$ となる $\alpha \in \mathrm{On}$ が On で共終的に存在する” とするとき，ZFC + “強到達不可能基数が存在する” で，$consis(\mathsf{T})$ が証明できる．

（4） $V_\alpha \models \mathsf{ZF}$ となる $\alpha \in \mathrm{On}$ が存在するとき α_0 をそのようなもののうち最小のものとすると，α_0 は強到達不可能基数ではない．

証明． (1): 補題 16.11 により $V_\alpha \prec V_\kappa$ となる $\alpha < \kappa$ が存在するから，補題 16.10 により，$V_\alpha \models \mathsf{ZFC}$ となり，したがって $V_\kappa \models \mathsf{ZFC}$ である．

(2): 公理系 ZFC + “$V_\alpha \models \mathsf{ZFC}$ となる $\alpha \in \mathrm{On}$ が On で共終的に存在する” と T とよぶことにする．証明 P があって，

(16.16)　$T \vdash^P$ “$\exists x$ (x は強到達不可能基数)”　trans-mod-1

となると仮定して T が矛盾することを示す．

T の中で議論する．κ を最小の強到達不可能基数すると，(1) と補題 16.11 と補題 16.7 により，V_κ“$V_\alpha \models \mathsf{ZFC}$ となる $\alpha \in \mathrm{On}$ が On で共終的に存在する” が成り立つ．(16.16) の証明 P は，T の中での ZFC + “$V_\alpha \models \mathsf{ZFC}$ となる $\alpha \in \mathrm{On}$ が On で共終的に存在する” からの証明に翻訳できるから，このことから $V_\kappa \models$ “強到達不可能基数が存在する” が帰結できてしまい， κ の最小性に矛盾である．

(3): (1) と補題 16.11 により，V_κ は T のモデルになっている．

(4): α_0 が到達不可能基数だとすると，補題 16.11 から，$\alpha < \alpha_0$ で $V_\alpha \prec V_{\alpha_0}$ となるものがあるが，このとき $V_\alpha \models \mathsf{ZFC}$ となるから，これは α_0 の最小性に矛盾である．

□ (定理 16.12)

17 遺伝的 $<\kappa$ 集合と初等的部分モデルの手法

κ を正則基数とするとき，集合 x が**遺伝的** $<\kappa$ であるとは，$|\,trcl(x)\,|<\kappa$ となることとする． heredit-less-than-kappa

(17.1) $\mathcal{H}(\chi)=\{x : x$ は遺伝的 $<\kappa\}$ hered-0

とする．この定義からは $\mathcal{H}(\kappa)$ が集合となるかどうかは直ちには読み取れないが，実は，すべての正則基数 κ に対し，$\mathcal{H}(\kappa)$ は集合であることが次のようにして示せる:

補題 17.1 κ を正則基数とする．このとき，以下が成り立つ:

(1) $\mathcal{H}(\kappa)$ は推移的である．

(2) $\mathcal{H}(\kappa)\subseteq V(\kappa)$ である．特に $\mathcal{H}(\kappa)$ は集合である．

証明． □ (補題 17.1)

定理 17.2 κ を正則基数とする．このとき，$\mathcal{H}(\kappa)=\langle\mathcal{H}(\kappa),\in\rangle$ は冪集合公理以外のすべての ZFC の公理を満たす．$\mathcal{H}(\kappa)$ が冪集合の公理を満たすのは，κ が強到達不可能基数である丁度そのときで，このときには $\mathcal{H}(\kappa)=V(\kappa)$ となる．

証明． □ (定理 17.2)

集合 (族) F が Δ-システムであるとは，**ルート**とよばれるある集合 r があり，

(17.2) すべての $a\in F$ に対し $r\subseteq a$ で， delta-sys-0

(17.3) すべての異なる $a,b\in F$ に対し，$a\cap b=r$ となる delta-sys-1

こととする．

補題 17.3 (Δ-システム・レンマ) F を有限集合からなる非可算な無限集合とするとき，非可算な $F'\subseteq F$ で， F' は Δ-システムになっているようなものが存在する． delta-sys-L

証明． 一般性を失なうことなく，$F=\{a_\alpha : \alpha<\omega_1\}$ という形をしていて，各 a_α は ω_1 の部分集合としてよい．χ を正則基数で $F\in\mathcal{H}(\chi)$ となるものとする (たとえば $\chi=\aleph_2$ とすればよい)．可算な $M\prec\mathcal{H}(\chi)$ を $\langle a_\alpha : \alpha<\omega_1\rangle\in M$ となるようにとる．このとき初等性[55] から，$\omega_1\in M$ で，$\omega_1\cap M\in\omega_1$ である．$\alpha^*=\omega_1\cap M$ とする．

$r=a_{\alpha^*}\cap M$ とすると，$r\subseteq M$ で r は有限集合だから，$r\in M$ である．ここで，

(17.4) $M\models(\forall\alpha\in\omega_1)(\exists\beta\in\omega_1)\ (\alpha<\beta\ \wedge\ a_\beta\cap\alpha=r)$

である．したがって，初等性から，

(17.5) $\mathcal{H}(\chi)\models(\forall\alpha\in\omega_1)(\exists\beta\in\omega_1)\ (\alpha<\beta\ \wedge\ a_\beta\cap\alpha=r)$

である．このことを使うと，ω_1 での真の上昇列 $\langle\xi_\alpha : \alpha<\omega_1\rangle$ を，すべての $\alpha<\omega_1$ に対し，

(17.6) $a_{\xi_\alpha} \cap \xi_\alpha = r,\ a_{\xi_\alpha} \subseteq \xi_{\alpha+1}$

となるようにとれる．$F' = \{a_{\xi_\alpha} : \alpha < \omega_1\}$ とすれば，F' は求めるようなものとなっている．

❏ (補題 17.3)

参考文献

reference

[1] Richard Dedekind, Stetigkeit und irrationale Zahlen, Friedr. Vieweg und Sohn (1872/1927).

[2] Richard Dedekind, Was sind und was sollen die Zahlen?, Friedr. Vieweg und Sohn (1888/1930).

[3] リヒャルト・デデキント著， 渕野昌 翻訳／解説，数とは何かそして何であるべきか，([1],[2] の日本語訳を含む) ちくま学芸文庫，(2013).

[4] Halmos, Paul, Naive Set Theory. Princeton, NJ: D. Van Nostrand Company, (1960). Reprinted by Springer-Verlag, New York, (1974). Reprinted by Martino Fine Books, (2011).

[5] T. Jech, Set Theory, The Third Millennium Edition, Springer (2001/2006).

[6] J. von Neumann, Zur Einführung der transfiniten Zahlen, Acta litterarum ac scientiarum Regiae Universitatis Hungaricae Francisco-Josephinae, Sectio scientiarum mathematicarum 1, (1923), 199–208.

[7] Ernst Zermelo, Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre. I, Mathematische Annalen 65 (1908), 261–281. 日本語訳: 集合論の基礎に関する研究 I, [3] に付録 B として収録.

(55) ここで “初等性” と言っているのは，“$M \prec \mathcal{H}(\chi)$ であること”，のことである．