構造の数理

2011 年 10 月 13 日　第 2 回目の講義

Sakaé Fuchino (渕野 昌)

Dept. of Computer Sciences
Kobe University
(神戸大学大学院 システム情報学研究科)

http://kurt.scitec.kobe-u.ac.jp/~fuchino/

一筆書きのできる多重グラフの特徴付け
— オイラーの定理とその逆 (1)

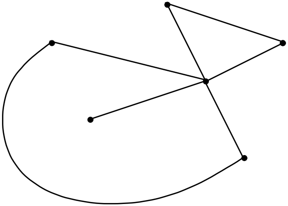
(17. Oktober 2011 (04:32 JST) version)

神戸大学 2011 年度後期の講義

This presentation is typeset by pLATEX with beamer class.

前回の復習と補足: グラフ

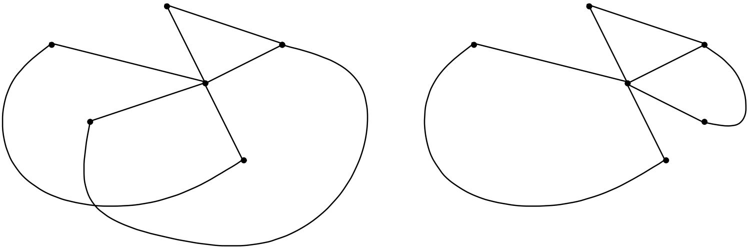
- **注意:** ここで言うグラフは，高校の数学などで習う,「関数のグラフ」とは別の概念である．
- **グラフ** とは，**頂点** (vertex, (複数: vertices)) の集まりと，それらのうちのいくつかの 2 頂点のペアを **辺** (edges) でつなげた構造物のこととする．たとえば，次のようなものはグラフとみなせる:



- 後で，無限個の頂点や辺を持つグラフも考えることにするが，そのようなものは **無限グラフ** と呼ぶことにして，ただグラフと言ったときには，頂点の数も辺の数も有限とすることにする．

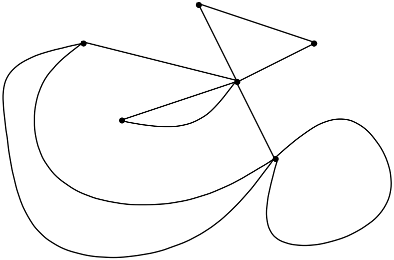
グラフ (2/4)

- 以下では，グラフを考えるときには頂点の辺によるつながり具合だけを問題とする．たとえば，次の 2 つのグラフは同じものとみなす:



グラフ (3/4)

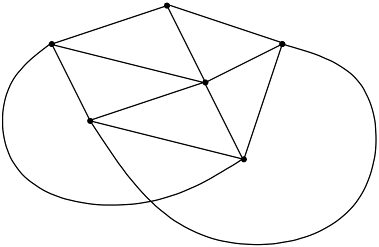
- 2 頂点の間に複数の辺があったり，1 頂点にループとして辺がつながっていたりするグラフを考察することが必要になることもある．このようなグラフのことを **多重グラフ (multigraph)** ということにする．たとえば次のものは多重グラフである:



- ループを含まず，どの異なる 2 頂点も 1 つの辺だけでつながっているか，辺でつながっていないか，のどちらかであるようなグラフは **一重グラフ** あるいは単に **グラフ** と呼ぶことにする．ただし一重グラフも多重グラフの特別な場合と考える．

グラフ (4/4)

- 平面上に辺が交錯しないように書くことのできないようなグラフや多重グラフも考えることにする．たとえば，



は平面上では辺が交錯しないように実現することは不可能である．

- どのようなグラフ (あるいは多重グラフ) が平面上で実現できるか，という問題は応用上も重要だが，これについても後で考察することにする．

多重グラフの一筆書き

- 多重グラフ G が与えられたとき，G が一筆書きできるかどうか，という問題を考える．まず，次の概念を導入する (ただし一筆書きは必ずしも平面上で行なわれるとはかぎらない):

- p を G の頂点の 1 つとするとき，p につながっている辺の数を p の **次数 (degree)** とよぶことにする．ただしループは二重に数えることにする．

- G が **連結 (connected)** であるとは G のどの頂点からどの頂点へも辺をたどって到達することができること，とする．多重グラフが連結でなければ，一筆書きできないことは明らかだから，一筆書ができることの考察では連結なグラフだけを考えればよい．

今回の講義と次回の講義での目標は次の定理の証明である:

定理． 任意の連結な多重グラフ G が一筆書きできるのは，次の (a), (b) のうちの 1 つが成り立つちょうどそのときである:

(a) G のすべての頂点の次数は偶数である．
(b) G の頂点で次数が奇数になるものがちょうど 2 つある．

多重グラフの一筆書き (2/3)

定理. 任意の連結な多重グラフ G が一筆書きできるのは，次の (a), (b) のうちの 1 つが成り立つちょうどそのときである:

(a) G のすべての頂点の次数は偶数である．

(b) G の頂点で次数が奇数になるものがちょうど 2 つある．

- この定理の主張は,

  C が成り立つのは，A か B のどちらかが成り立つちょうどそのときである

という論理構造を持っている．これは,

  C が成り立つなら，A か B のどちらかが成り立つ．また，A か B のどちらかが成り立つなら C が成り立つ．

ということと同値である．

多重グラフの一筆書き (3/3)

- 上に述べたことから，この定理の主張は，次の 2 つの主張に分解できることがわかる:

定理 (オイラーの定理，1735 (享保（きょうほう）20 年)). 任意の連結な多重グラフ G が一筆書きできるなら，次の (a), (b) のうちの 1 つが成り立つ:

(a) G のすべての頂点の次数は偶数である．
(b) G の頂点で次数が奇数になるものがちょうど 2 つある．

定理 (オイラーの定理の逆). 任意の連結な多重グラフ G について，次の (a), (b) のうちの 1 つが成り立つなら G は一筆書きが可能である:

(a) G のすべての頂点の次数は偶数である．
(b) G の頂点で次数が奇数になるものがちょうど 2 つある．

オイラーの定理の証明

定理 (オイラーの定理，1735 (享保（きょうほう）20 年)). 任意の連結な多重グラフ G が一筆書きできるなら，次の (a), (b) のうちの 1 つが成り立つ:

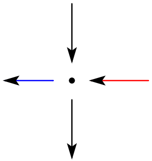
(a) G のすべての頂点の次数は偶数である．
(b) G の頂点で次数が奇数になるものがちょうど 2 つある．

証明． G の一筆書きで，始点と終点となっている頂点が同じ場合と，異なる場合にわけて考える．

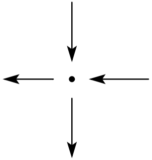
オイラーの定理の証明 (2/3)

- G の一筆書きで始点と終点となっている頂点が同じ場合.

始点 と 終点 になっている頂点:



その他の通過点となっている頂点:



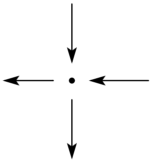
この場合には, (a) が成り立つ.

オイラーの定理の証明 (3/3)

- G の一筆書きで始点と終点となっている頂点が異なる場合.

始点 と 終点 になっている頂点:

その他の通過点となっている頂点:



この場合には, (b) が成り立つ.

歴史に関するリマーク

- オイラー (Leonhard Euler, 1707 (宝永 4 年) – 1783 (天明 3 年)) は，上の定理を証明して,「クーニヒスベルクの橋の問題」 に解がないことを示した（これについては次回話す予定）.

注意．来週は休講にします．