

構造の数理

2011 年 12 月 01 日 第 7 回目の講義

Sakaé Fuchino (渕野 昌)

Dept. of Computer Sciences
Kobe University

(神戸大学大学院 システム情報学研究科)

<http://kurt.scitec.kobe-u.ac.jp/~fuchino/>

平面グラフ

— オイラーの公式とクラトフスキーの定理 (3)

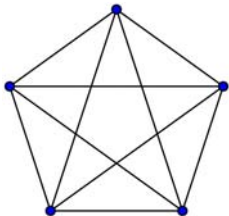
(2. Dezember 2011 (14:54 JST) version)

神戸大学 2011 年度後期の講義

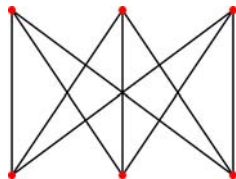
This presentation is typeset by p^LA_TE_X with beamer class.

定理 (オイラーの公式). 任意の連結な平面グラフ G について,
 $v - e + f = 2$ が成り立つ.

ただし, v : G の頂点の数 e : G の辺の数 f : G の作る面の数



K_5



$K_{3,3}$

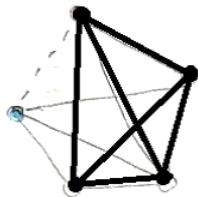
▶ K_5 は頂点を 5 つ持つ完全グラフで, $K_{3,3}$ は, 3 つの頂点からなる 2 つのグループ上の完全 2 部グラフである.

定理 . (1) K_5 は平面グラフではない .
 (2) $K_{3,3}$ は平面グラフではない .

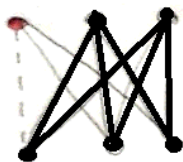
証明 . (1) は前回示した . (2) を示す . ▶ 背理法で証明する :
 $G = K_{3,3}$ の平面への良い埋め込みが存在したとして矛盾を示す .
 ▷ v と e をそれぞれ G の頂点の数と辺の数とすると , $v = 6$ で
 $e = 3 \times 3 = 9$ である . したがって , G の平面への良い埋め込みで
 の面の数はオイラーの公式から , $f = e - v + 2 = 9 - 6 + 2 = 5$ 個
 でなくてはならない . F をこの埋め込みでの面の全体として ,
 $x \in F$ に対し , n_x で , この面を囲んでいる G の辺の数とする .
 ▷ 各 $x \in F$ に対し , $n_x \geq 4$ である , したがって ,
 $\sum_{x \in F} n_x \geq f \times 4$ である .
 ▷ 一方各辺はちょうど 2 つの面の境界となっているから ,
 $\sum_{x \in F} n_x = 2e$ である .
 ▷ したがって , $e = \frac{1}{2} \cdot \sum_{x \in F} n_x \geq f \times \frac{4}{2} = 5 \times 2 = 10$ となり ,
 $e = 9$ に矛盾である . ◻

系. K_4 も $K_{3,2}$ も平面グラフである.

(別) 証明. K_4 は K_5^- の部分グラフである.



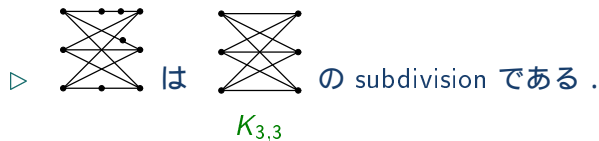
$K_{3,2}$ は $K_{3,3}^-$ の部分グラフである.



▶ グラフ H がグラフ G の **部分グラフ (subgraph)** である, とは, G の頂点のいくつかと辺のいくつかからなるグラフが H と一致することである.

▶ グラフ H がグラフ G の **subdivision** であるとは, H が, G から出発して, 辺の上に新しい頂点を挿入する操作を 0 回以上繰り返すことで得られるグラフとなっていること.

例. ▶ 任意のグラフ G は自分自身の subdivision である.



定理 . (K. Kuratowski, 1930 (昭和 5 年))
有限グラフ G が平面グラフとなるのは, G が完全グラフ K_5 の subdivision も, 完全 2 部グラフ $K_{3,3}$ の subdivision も部分グラフとして含まない, ちょうどそのときである .



Kazimierz Kuratowski

Born: 2 Feb 1896 (明治 29 年) in Warsaw, Russian Empire

Died: 18 June 1980 (昭和 55 年) in Warsaw, Poland

[MacTutor: Kuratowski biography より](#)

定理 . (K. Kuratowski, 1930 (昭和 5 年))

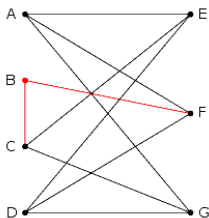
有限グラフ G が平面グラフとなるのは, G が完全グラフ K_5 の subdivision も, 完全 2 部グラフ $K_{3,3}$ の subdivision も部分グラフとして含まない, ちょうどそのときである .

▶ グラフ H の subdivision がグラフ G の部分グラフになっているとき, H は G の **topological minor** であるという表現を用いることがある . この用語を使うと, クラトフスキーの定理は次のように言い換えることができる:

定理 . (K. Kuratowski, 1930 (昭和 5 年))

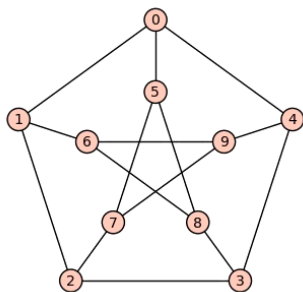
有限グラフ G が平面グラフとなるのは, K_5 も, 完全 2 部グラフ $K_{3,3}$ も G の topological minor でない, ちょうどそのときである .

▷ 次のスライドの例が示すように, クラトフスキーの定理の上の記述で, “topological minor” という条件は, 「部分グラフ」で置き換えることはできない .



[Wikipedia の planar graph の項目](#) から引用

- ▷ 上のグラフは、 K_5 を部分グラフとして含まない (K_5 の各頂点の次数は 4 だが、このグラフの頂点の次数は ≤ 3 である)。
- ▷ 上のグラフは $K_{3,3}$ の部分グラフも含まない ($K_{3,3}$ の頂点の次数はすべて 3 だが、このグラフの部分グラフは、次数が ≤ 2 の頂点を含むか、そうでなければ $K_{3,3}$ の部分グラフになっている)。
- ▷ 上のグラフは、 $K_{3,3}$ の subdivision である。したがって、 $K_{3,3}$ が平面グラフでないことから、このグラフも平面グラフではない。



▶ Wikipedia の planar graph の項目 にリンクされている 動画 の引用

定理 . (K. Kuratowski, 1930 (昭和 5 年))

有限グラフ G が平面グラフとなるのは, G が完全グラフ K_5 の subdivision も, 完全 2 部グラフ $K_{3,3}$ の subdivision も部分グラフとして含まない, ちょうどそのときである .

▶ この定理の証明には, 次の 2 つを示す必要がある:

(1) 有限グラフ G が平面グラフなら, G は K_5 の subdivision も $K_{3,3}$ の subdivision も部分グラフとして含まない .

(2) 有限グラフ G が K_5 の subdivision も $K_{3,3}$ の subdivision も部分グラフとして含まないなら, G は平面グラフである .

ここでは (1) のみ示す (これは今までの考察からすぐに導ける) .
 (2) の証明は, (1) より複雑である (この証明は講義のページにテキストとしてリンクする予定) .

(1) 有限グラフ G が平面グラフなら, G は K_5 の subdivision も $K_{3,3}$ の subdivision も部分グラフとして含まない.

証明. (1) の次の対偶命題を示せばよい:

(1') G が K_5 の subdivision または $K_{3,3}$ の subdivision を部分グラフ含めば G は平面グラフではない.

▶ G が K_5 の subdivision を部分グラフとして含めば, G は平面グラフではない: もし, G が平面グラフだとすれば, G の部分グラフである K_5 の subdivision (の 1 つ) も平面グラフである. したがって, K_5 も平面グラフとなってしまうが, 前に示したように, K_5 は平面グラフでないから矛盾である.

▶ 同様に G が $K_{3,3}$ の subdivision を部分グラフとして含めば, G は平面グラフではない. □

- (1) グラフ H がグラフ G の subdivision となっている, G が平面グラフであることと H が平面グラフであることは同値である (中級問題).
- (2) グラフ G が n 個の連結な部分グラフ G_1, \dots, G_n を合せたものになっているとき, これらの G_1, \dots, G_n の各々を G の **連結成分 (connected components)** とよぶ.
- (2.a) G の部分グラフ H が G の連結成分であることと, H を含む G の部分グラフで連結なものは H に限ることが同値になる (中級問題).
- G の連結成分の数 (上では n) を c であらわすことにする. このとき:
- (2.b) G が連結であることと $c = 1$ となることは同値である (初級問題).
- (2.c) (必ずしも連結でない) 任意の平面グラフに対し, $v - e + f - c = 1$ が成り立つ (中-上級問題).

- (3) G をグラフとするとき, G からループをすべて取り除き, G の頂点の組の各々に対し, それらを結ぶ辺が複数あるときには, 1つの辺を除いてその他の辺をすべて取り除いて得られるグラフ H は単一グラフになるが, このグラフ H を G に随伴する単一グラフとよぶことにする.

任意のグラフ G に対し, G が平面グラフであることと, G に随伴する単一グラフが平面グラフであることは同値である (中-上級問題).