構造の数理

2011 年 12 月 01 日　第 7 回目の講義

Sakaé Fuchino (渕野 昌)

Dept. of Computer Sciences
Kobe University
(神戸大学大学院 システム情報学研究科)

http://kurt.scitec.kobe-u.ac.jp/~fuchino/

平面グラフ
— オイラーの公式とクラトフスキーの定理 (3)

(2. Dezember 2011 (14:53 JST) version)

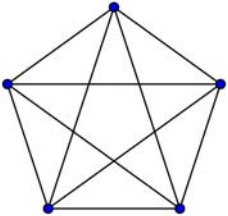
神戸大学 2011 年度後期の講義

This presentation is typeset by pLaTeX with beamer class.

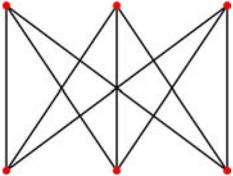
前回の復習: オイラーの公式，K_5，$K_{3,3}$

定理 (オイラーの公式). 任意の連結な平面グラフ G について，$v - e + f = 2$ が成り立つ.

ただし，**v**: G の頂点の数　**e**: G の辺の数　**f**: G の作る面の数



K_5



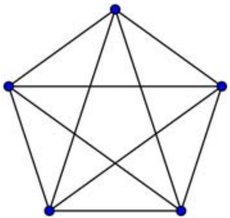
$K_{3,3}$

- K_5 は頂点を 5 つ持つ完全グラフで，$K_{3,3}$ は，3 つの頂点からなる 2 つのグループ上の完全 2 部グラフである.

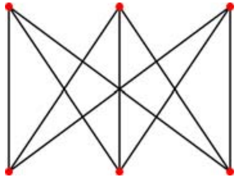
前回の復習: オイラーの公式，K_5，$K_{3,3}$

定理 (オイラーの公式). 任意の連結な平面グラフ G について，$v - e + f = 2$ が成り立つ．

ただし，**v**: G の頂点の数 **e**: G の辺の数 **f**: G の作る面の数



K_5



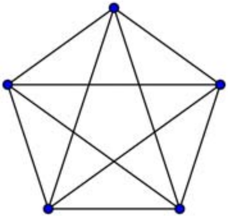
$K_{3,3}$

▶ K_5 は頂点を 5 つ持つ完全グラフで，$K_{3,3}$ は，3 つの頂点からなる 2 つのグループ上の完全 2 部グラフである．

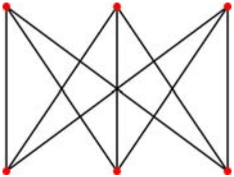
前回の復習: オイラーの公式，K_5，$K_{3,3}$

定理 (オイラーの公式). 任意の連結な平面グラフ G について，$v - e + f = 2$ が成り立つ.

ただし，**v**: G の頂点の数　**e**: G の辺の数　**f**: G の作る面の数



K_5



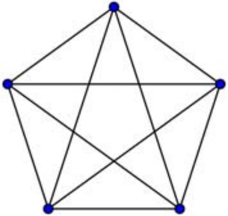
$K_{3,3}$

- K_5 は頂点を 5 つ持つ完全グラフで，$K_{3,3}$ は，3 つの頂点からなる 2 つのグループ上の完全 2 部グラフである.

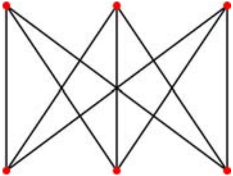
前回の復習: オイラーの公式，K_5，$K_{3,3}$

定理 (オイラーの公式). 任意の連結な平面グラフ G について，$v - e + f = 2$ が成り立つ．

ただし，**v**: G の頂点の数　**e**: G の辺の数　**f**: G の作る面の数



K_5



$K_{3,3}$

- K_5 は頂点を 5 つ持つ完全グラフで，$K_{3,3}$ は，3 つの頂点からなる 2 つのグループ上の完全 2 部グラフである．

前回の復習と証明の補足

定理. (1) K_5 は平面グラフではない.
(2) $K_{3,3,}$ は平面グラフではない.

証明. (1) は前回示した. (2) を示す. ▶ 背理法で証明する: $G = K_{3,3}$ の平面への良い埋め込みが存在したとして矛盾を示す.

▷ v と e をそれぞれ G の頂点の数と辺の数とすると, $v = 6$ で $e = 3 \times 3 = 9$ である. したがって, G の平面への良い埋め込みでの面の数はオイラーの公式から, $f = e - v + 2 = 9 - 6 + 2 = 5$ 個でなくてはならない. F をこの埋め込みでの面の全体として, $x \in F$ に対し, n_x で, この面を囲んでいる G の辺の数とする.

▷ 各 $x \in F$ に対し, $n_x \geq 4$ である, したがって, $\sum_{x \in F} n_x \geq f \times 4$ である.

▷ 一方各辺はちょうど 2 つの面の境界となっているから, $\sum_{x \in F} n_x = 2e$ である.

▷ したがって, $e = \frac{1}{2} \cdot \sum_{x \in F} n_x \geq f \times \frac{4}{2} = 5 \times 2 = 10$ となり, $e = 9$ に矛盾である. □

前回の復習と証明の補足

定理. (1) K_5 は平面グラフではない.
(2) $K_{3,3,}$ は平面グラフではない.

証明. (1) は前回示した. (2) を示す. ▶ 背理法で証明する: $G = K_{3,3}$ の平面への良い埋め込みが存在したとして矛盾を示す.

▷ v と e をそれぞれ G の頂点の数と辺の数とすると, $v = 6$ で $e = 3 \times 3 = 9$ である. したがって, G の平面への良い埋め込みでの面の数はオイラーの公式から, $f = e - v + 2 = 9 - 6 + 2 = 5$ 個でなくてはならない. F をこの埋め込みでの面の全体として, $x \in F$ に対し, n_x で, この面を囲んでいる G の辺の数とする.

▷ 各 $x \in F$ に対し, $n_x \geq 4$ である, したがって, $\sum_{x \in F} n_x \geq f \times 4$ である.

▷ 一方各辺はちょうど 2 つの面の境界となっているから, $\sum_{x \in F} n_x = 2e$ である.

▷ したがって, $e = \frac{1}{2} \cdot \sum_{x \in F} n_x \geq f \times \frac{4}{2} = 5 \times 2 = 10$ となり, $e = 9$ に矛盾である. □

前回の復習と証明の補足

定理. (1) K_5 は平面グラフではない.
(2) $K_{3,3,}$ は平面グラフではない.

証明. (1) は前回示した. (2) を示す. ▶ 背理法で証明する:
$G = K_{3,3}$ の平面への良い埋め込みが存在したとして矛盾を示す.

▷ v と e をそれぞれ G の頂点の数と辺の数とすると, $v = 6$ で $e = 3 \times 3 = 9$ である. したがって, G の平面への良い埋め込みでの面の数はオイラーの公式から, $f = e - v + 2 = 9 - 6 + 2 = 5$ 個でなくてはならない. F をこの埋め込みでの面の全体として, $x \in F$ に対し, n_x で, この面を囲んでいる G の辺の数とする.

▷ 各 $x \in F$ に対し, $n_x \geq 4$ である, したがって,
$\sum_{x \in F} n_x \geq f \times 4$ である.

▷ 一方各辺はちょうど 2 つの面の境界となっているから,
$\sum_{x \in F} n_x = 2e$ である.

▷ したがって, $e = \frac{1}{2} \cdot \sum_{x \in F} n_x \geq f \times \frac{4}{2} = 5 \times 2 = 10$ となり,
$e = 9$ に矛盾である. □

前回の復習と証明の補足

定理. (1) K_5 は平面グラフではない.
(2) $K_{3,3}$, は平面グラフではない.

証明. (1) は前回示した. (2) を示す. ▶ 背理法で証明する:
$G = K_{3,3}$ の平面への良い埋め込みが存在したとして矛盾を示す.

▷ v と e をそれぞれ G の頂点の数と辺の数とすると, $v = 6$ で $e = 3 \times 3 = 9$ である. したがって, G の平面への良い埋め込みでの面の数はオイラーの公式から, $f = e - v + 2 = 9 - 6 + 2 = 5$ 個でなくてはならない. F をこの埋め込みでの面の全体として, $x \in F$ に対し, n_x で, この面を囲んでいる G の辺の数とする.

▷ 各 $x \in F$ に対し, $n_x \geq 4$ である, したがって, $\sum_{x \in F} n_x \geq f \times 4$ である.

▷ 一方各辺はちょうど 2 つの面の境界となっているから, $\sum_{x \in F} n_x = 2e$ である.

▷ したがって, $e = \frac{1}{2} \cdot \sum_{x \in F} n_x \geq f \times \frac{4}{2} = 5 \times 2 = 10$ となり, $e = 9$ に矛盾である. □

前回の復習と証明の補足

定理. (1) K_5 は平面グラフではない.
(2) $K_{3,3,}$ は平面グラフではない.

証明. (1) は前回示した. (2) を示す. ▶ 背理法で証明する:
$G = K_{3,3}$ の平面への良い埋め込みが存在したとして矛盾を示す.

▷ v と e をそれぞれ G の頂点の数と辺の数とすると, $v = 6$ で $e = 3 \times 3 = 9$ である. したがって, G の平面への良い埋め込みでの面の数はオイラーの公式から, $f = e - v + 2 = 9 - 6 + 2 = 5$ 個でなくてはならない. F をこの埋め込みでの面の全体として, $x \in F$ に対し, n_x で, この面を囲んでいる G の辺の数とする.

▷ 各 $x \in F$ に対し, $n_x \geq 4$ である, したがって,
$\sum_{x \in F} n_x \geq f \times 4$ である.

▷ 一方各辺はちょうど 2 つの面の境界となっているから,
$\sum_{x \in F} n_x = 2e$ である.

▷ したがって, $e = \frac{1}{2} \cdot \sum_{x \in F} n_x \geq f \times \frac{4}{2} = 5 \times 2 = 10$ となり,
$e = 9$ に矛盾である. □

前回の復習と証明の補足

定理. (1) K_5 は平面グラフではない.
(2) $K_{3,3}$ は平面グラフではない.

証明. (1) は前回示した. (2) を示す. ▶ 背理法で証明する:
$G = K_{3,3}$ の平面への良い埋め込みが存在したとして矛盾を示す.

▷ v と e をそれぞれ G の頂点の数と辺の数とすると, $v = 6$ で $e = 3 \times 3 = 9$ である. したがって, G の平面への良い埋め込みでの面の数はオイラーの公式から, $f = e - v + 2 = 9 - 6 + 2 = 5$ 個でなくてはならない. F をこの埋め込みでの面の全体として, $x \in F$ に対し, n_x で, この面を囲んでいる G の辺の数とする.

▷ 各 $x \in F$ に対し, $n_x \geq 4$ である, したがって, $\sum_{x \in F} n_x \geq f \times 4$ である.

▷ 一方各辺はちょうど 2 つの面の境界となっているから, $\sum_{x \in F} n_x = 2e$ である.

▷ したがって, $e = \frac{1}{2} \cdot \sum_{x \in F} n_x \geq f \times \frac{4}{2} = 5 \times 2 = 10$ となり, $e = 9$ に矛盾である. □

前回の復習と証明の補足

定理. (1) K_5 は平面グラフではない.
(2) $K_{3,3,}$ は平面グラフではない.

証明. (1) は前回示した. (2) を示す. ▶ 背理法で証明する:
$G = K_{3,3}$ の平面への良い埋め込みが存在したとして矛盾を示す.

▷ v と e をそれぞれ G の頂点の数と辺の数とすると, $v = 6$ で $e = 3 \times 3 = 9$ である. したがって, G の平面への良い埋め込みでの面の数はオイラーの公式から, $f = e - v + 2 = 9 - 6 + 2 = 5$ 個でなくてはならない. F をこの埋め込みでの面の全体として, $x \in F$ に対し, n_x で, この面を囲んでいる G の辺の数とする.

▷ 各 $x \in F$ に対し, $n_x \geq 4$ である, したがって,
$\sum_{x \in F} n_x \geq f \times 4$ である.

▷ 一方各辺はちょうど 2 つの面の境界となっているから,
$\sum_{x \in F} n_x = 2e$ である.

▷ したがって, $e = \frac{1}{2} \cdot \sum_{x \in F} n_x \geq f \times \frac{4}{2} = 5 \times 2 = 10$ となり,
$e = 9$ に矛盾である. □

前回の復習と証明の補足

定理． (1) K_5 は平面グラフではない．
(2) $K_{3,3,}$ は平面グラフではない．

証明． (1) は前回示した．(2) を示す．▶ 背理法で証明する:
$G = K_{3,3}$ の平面への良い埋め込みが存在したとして矛盾を示す．

▷ v と e をそれぞれ G の頂点の数と辺の数とすると，$v = 6$ で $e = 3 \times 3 = 9$ である．したがって，G の平面への良い埋め込みでの面の数はオイラーの公式から，$f = e - v + 2 = 9 - 6 + 2 = 5$ 個でなくてはならない．F をこの埋め込みでの面の全体として，$x \in F$ に対し，n_x で，この面を囲んでいる G の辺の数とする．

▷ 各 $x \in F$ に対し，$n_x \geq 4$ である，したがって，
$\sum_{x \in F} n_x \geq f \times 4$ である．

▷ 一方各辺はちょうど 2 つの面の境界となっているから，
$\sum_{x \in F} n_x = 2e$ である．

▷ したがって，$e = \frac{1}{2} \cdot \sum_{x \in F} n_x \geq f \times \frac{4}{2} = 5 \times 2 = 10$ となり，
$e = 9$ に矛盾である．□

前回の復習と証明の補足

定理． (1) K_5 は平面グラフではない．
(2) $K_{3,3}$, は平面グラフではない．

証明． (1) は前回示した．(2) を示す． ▶ 背理法で証明する:
$G = K_{3,3}$ の平面への良い埋め込みが存在したとして矛盾を示す．

▷ v と e をそれぞれ G の頂点の数と辺の数とすると，$v = 6$ で $e = 3 \times 3 = 9$ である．したがって，G の平面への良い埋め込みでの面の数はオイラーの公式から，$f = e - v + 2 = 9 - 6 + 2 = 5$ 個でなくてはならない．F をこの埋め込みでの面の全体として，$x \in F$ に対し，n_x で，この面を囲んでいる G の辺の数とする．

▷ 各 $x \in F$ に対し，$n_x \geq 4$ である，したがって，$\sum_{x \in F} n_x \geq f \times 4$ である．

▷ 一方各辺はちょうど 2 つの面の境界となっているから，$\sum_{x \in F} n_x = 2e$ である．

▷ したがって，$e = \frac{1}{2} \cdot \sum_{x \in F} n_x \geq f \times \frac{4}{2} = 5 \times 2 = 10$ となり，$e = 9$ に矛盾である．□

前回の復習と証明の補足

定理． (1) K_5 は平面グラフではない．
(2) $K_{3,3,}$ は平面グラフではない．

証明． (1) は前回示した．(2) を示す． ▶ 背理法で証明する:
$G = K_{3,3}$ の平面への良い埋め込みが存在したとして矛盾を示す．

▷ v と e をそれぞれ G の頂点の数と辺の数とすると，$v = 6$ で $e = 3 \times 3 = 9$ である．したがって，G の平面への良い埋め込みでの面の数はオイラーの公式から，$f = e - v + 2 = 9 - 6 + 2 = 5$ 個でなくてはならない．F をこの埋め込みでの面の全体として，$x \in F$ に対し，n_x で，この面を囲んでいる G の辺の数とする．

▷ 各 $x \in F$ に対し，$n_x \geq 4$ である，したがって，
$\sum_{x \in F} n_x \geq f \times 4$ である．

▷ 一方各辺はちょうど 2 つの面の境界となっているから，
$\sum_{x \in F} n_x = 2e$ である．

▷ したがって，$e = \frac{1}{2} \cdot \sum_{x \in F} n_x \geq f \times \frac{4}{2} = 5 \times 2 = 10$ となり，
$e = 9$ に矛盾である．□

K_5 と $K_{3,3}$ の極小性

- K_5 と $K_{3,3}$ は平面グラフでないグラフのうち極小 (minimal) なものになっている.
  - K_5 も $K_{3,3}$ も，それから一辺を取り除いて得られるグラフは平面グラフである (ここではこれらをそれぞれ K_5^-, $K_{3,3}^-$ と表わすことにする).

K_5 と $K_{3,3}$ の極小性

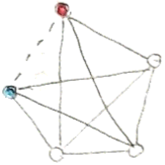
- K_5 と $K_{3,3}$ は平面グラフでないグラフのうち極小 (minimal) なものになっている．
- K_5 も $K_{3,3}$ も，それから一辺を取り除いて得られるグラフは平面グラフである (ここではこれらをそれぞれ $\mathbf{K}_5^-$, $\mathbf{K}_{3,3}^-$ と表わすことにする).

K_5 と $K_{3,3}$ の極小性

- K_5 と $K_{3,3}$ は平面グラフでないグラフのうち極小 (minimal) なものになっている.
- K_5 も $K_{3,3}$ も，それから一辺を取り除いて得られるグラフは平面グラフである (ここではこれらをそれぞれ $\mathbf{K_5^-}$, $\mathbf{K_{3,3}^-}$ と表わすことにする).

K_5 と $K_{3,3}$ の極小性

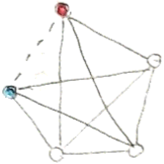
- K_5 と $K_{3,3}$ は平面グラフでないグラフのうち極小 (minimal) なものになっている．
- K_5 も $K_{3,3}$ も，それから一辺を取り除いて得られるグラフは平面グラフである (ここではこれらをそれぞれ $\mathbf{K_5^-}$, $\mathbf{K_{3,3}^-}$ と表わすことにする).



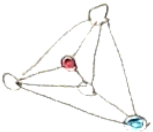
K_5^-

K_5 と $K_{3,3}$ の極小性

- K_5 と $K_{3,3}$ は平面グラフでないグラフのうち極小 (minimal) なものになっている.
- K_5 も $K_{3,3}$ も，それから一辺を取り除いて得られるグラフは平面グラフである (ここではこれらをそれぞれ $\mathbf{K_5^-}$, $\mathbf{K_{3,3}^-}$ と表わすことにする).



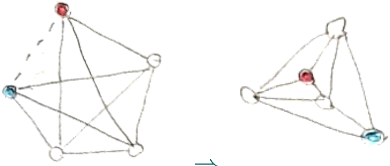
$\Rightarrow$



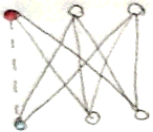
K_5^-

K_5 と $K_{3,3}$ の極小性

- K_5 と $K_{3,3}$ は平面グラフでないグラフのうち極小 (minimal) なものになっている．
- K_5 も $K_{3,3}$ も，それから一辺を取り除いて得られるグラフは平面グラフである (ここではこれらをそれぞれ $\mathbf{K_5^-}$，$\mathbf{K_{3,3}^-}$ と表わすことにする).



$\Rightarrow$



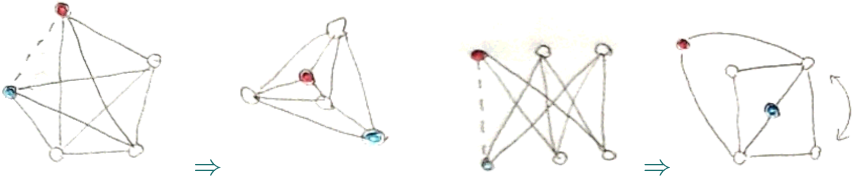
K_5^-

$K_{3,3}^-$

K_5 と $K_{3,3}$ の極小性

- K_5 と $K_{3,3}$ は平面グラフでないグラフのうち極小 (minimal) なものになっている.

▷ K_5 も $K_{3,3}$ も，それから一辺を取り除いて得られるグラフは平面グラフである (ここではこれらをそれぞれ $\mathbf{K_5^-}$, $\mathbf{K_{3,3}^-}$ と表わすことにする).



K_5^- $K_{3,3}^-$

K_4 と $K_{3,2}$

系. K_4 も $K_{3,2}$ も平面グラフである.

(別) 証明. K_4 は K_5^- の部分グラフである.

K_4 と $K_{3,2}$

系. K_4 も $K_{3,2}$ も平面グラフである.

(別) 証明. K_4 は K_5^- の部分グラフである.

K_4 と $K_{3,2}$

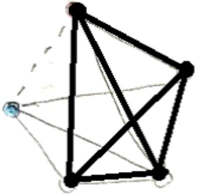
系. K_4 も $K_{3,2}$ も平面グラフである.

(別) 証明. K_4 は K_5^- の部分グラフである.

K_4 と $K_{3,2}$

系. K_4 も $K_{3,2}$ も平面グラフである.

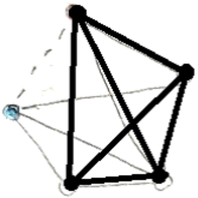
(別) 証明. K_4 は K_5^- の部分グラフである.



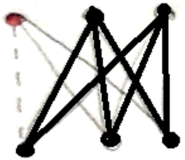
K_4 と $K_{3,2}$

系. K_4 も $K_{3,2}$ も平面グラフである.

（別）証明. K_4 は K_5^- の部分グラフである.



$K_{3,2}$ は $K_{3,3}^-$ の部分グラフである.



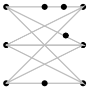
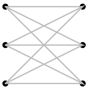
□

前々回の復習: 部分グラフと subdivision

- グラフ H がグラフ G の **部分グラフ** (**subgraph**) である，とは，G の頂点のいくつかと辺のいくつかからなるグラフが H と一致することである．

- グラフ H がグラフ G の **subdivision** であるとは，H が，G から出発して，辺の上に新しい頂点を挿入する操作を 0 回以上繰り返すことで得られるグラフとなっていること．

例． ▷ 任意のグラフ G は自分自身の subdivision である．

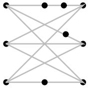
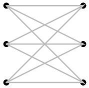
▷  は  の subdivision である．

$K_{3,3}$

- グラフ H がグラフ G の **部分グラフ (subgraph)** である，とは，G の頂点のいくつかと辺のいくつかからなるグラフが H と一致することである．

- グラフ H がグラフ G の **subdivision** であるとは，H が，G から出発して，辺の上に新しい頂点を挿入する操作を 0 回以上繰り返すことで得られるグラフとなっていること．

例． ▷ 任意のグラフ G は自分自身の subdivision である．

▷  は  の subdivision である．

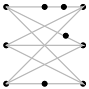
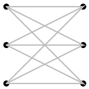
$K_{3,3}$

前々回の復習: 部分グラフと subdivision

- グラフ H がグラフ G の **部分グラフ (subgraph)** である，とは，G の頂点のいくつかと辺のいくつかからなるグラフが H と一致することである．

- グラフ H がグラフ G の **subdivision** であるとは，H が，G から出発して，辺の上に新しい頂点を挿入する操作を 0 回以上繰り返すことで得られるグラフとなっていること．

例． ▷ 任意のグラフ G は自分自身の subdivision である．

▷  は  の subdivision である．

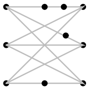
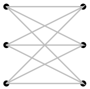
$K_{3,3}$

前々回の復習: 部分グラフと subdivision

- グラフ H がグラフ G の **部分グラフ (subgraph)** である，とは，G の頂点のいくつかと辺のいくつかからなるグラフが H と一致することである．

- グラフ H がグラフ G の **subdivision** であるとは，H が，G から出発して，辺の上に新しい頂点を挿入する操作を 0 回以上繰り返すことで得られるグラフとなっていること．

例． ▷ 任意のグラフ G は自分自身の subdivision である．

▷  は  の subdivision である．

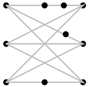
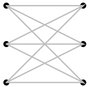
$K_{3,3}$

前々回の復習: 部分グラフと subdivision

- グラフ H がグラフ G の **部分グラフ** (**subgraph**) である，とは，G の頂点のいくつかと辺のいくつかからなるグラフが H と一致することである．

- グラフ H がグラフ G の **subdivision** であるとは，H が，G から出発して，辺の上に新しい頂点を挿入する操作を 0 回以上繰り返すことで得られるグラフとなっていること．

例． ▷ 任意のグラフ G は自分自身の subdivision である．

▷  は  の subdivision である．

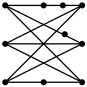
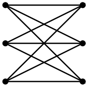
$K_{3,3}$

前々回の復習: 部分グラフと subdivision

- グラフ H がグラフ G の **部分グラフ** (**subgraph**) である，とは，G の頂点のいくつかと辺のいくつかからなるグラフが H と一致することである.

- グラフ H がグラフ G の **subdivision** であるとは，H が，G から出発して，辺の上に新しい頂点を挿入する操作を 0 回以上繰り返すことで得られるグラフとなっていること.

例. ▷ 任意のグラフ G は自分自身の subdivision である.

▷  は  の subdivision である.

$K_{3,3}$

前々回の復習: クラトフスキーの定理

定理. (K. Kuratowski, 1930 (昭和 5 年))
有限グラフ G が平面グラフとなるのは, G が完全グラフ K_5 の subdivision も, 完全 2 部グラフ $K_{3,3}$ の subdivision も部分グラフとして含まない, ちょうどそのときである.

前々回の復習: クラトフスキーの定理

定理． (K. Kuratowski, 1930 (昭和 5 年))
有限グラフ G が平面グラフとなるのは，G が完全グラフ K_5 の subdivision も，完全 2 部グラフ $K_{3,3}$ の subdivision も部分グラフとして含まない，ちょうどそのときである．

前々回の復習: クラトフスキーの定理

定理. (K. Kuratowski, 1930 (昭和 5 年))
有限グラフ G が平面グラフとなるのは, G が完全グラフ K_5 の subdivision も, 完全 2 部グラフ $K_{3,3}$ の subdivision も部分グラフとして含まない, ちょうどそのときである.

Kazimierz Kuratowski

Born: 2 Feb 1896 (明治 29 年) in Warsaw, Russian Empire
Died: 18 June 1980 (昭和 55 年) in Warsaw, Poland
MacTutor: Kuratowski biography より

クラトフスキーの定理

定理. (K. Kuratowski, 1930 (昭和 5 年))
有限グラフ G が平面グラフとなるのは，G が完全グラフ K_5 の subdivision も，完全 2 部グラフ $K_{3,3}$ の subdivision も部分グラフとして含まない，ちょうどそのときである．

▶ グラフ H の subdivision がグラフ G の部分グラフになっているとき，H は G の **topological minor** であるという表現を用いることがある．この用語を使うと，クラトフスキーの定理は次のように言いかえることができる:

定理. (K. Kuratowski, 1930 (昭和 5 年))
有限グラフ G が平面グラフとなるのは，K_5 も，完全 2 部グラフ $K_{3,3}$ も G の topological minor でない，ちょうどそのときである．

▷ 次のスライドの例が示すように，クラトフスキーの定理の上の記述で，“topological minor” という条件は,「部分グラフ」で置き換えることはできない．

クラトフスキーの定理

定理. (K. Kuratowski, 1930 (昭和 5 年))
有限グラフ G が平面グラフとなるのは，G が完全グラフ K_5 の subdivision も，完全 2 部グラフ $K_{3,3}$ の subdivision も部分グラフとして含まない，ちょうどそのときである．

- グラフ H の subdivision がグラフ G の部分グラフになっているとき，H は G の **topological minor** であるという表現を用いることがある． この用語を使うと，クラトフスキーの定理は次のように言いかえることができる:

定理. (K. Kuratowski, 1930 (昭和 5 年))
有限グラフ G が平面グラフとなるのは，K_5 も，完全 2 部グラフ $K_{3,3}$ も G の topological minor でない，ちょうどそのときである．

- 次のスライドの例が示すように，クラトフスキーの定理の上の記述で，“topological minor” という条件は,「部分グラフ」で置き換えることはできない．

クラトフスキーの定理

定理． (K. Kuratowski, 1930 (昭和 5 年))
有限グラフ G が平面グラフとなるのは，G が完全グラフ K_5 の subdivision も，完全 2 部グラフ $K_{3,3}$ の subdivision も部分グラフとして含まない，ちょうどそのときである．

▶ グラフ H の subdivision がグラフ G の部分グラフになっているとき，H は G の **topological minor** であるという表現を用いることがある．この用語を使うと，クラトフスキーの定理は次のように言いかえることができる:

定理． (K. Kuratowski, 1930 (昭和 5 年))
有限グラフ G が平面グラフとなるのは，K_5 も，完全 2 部グラフ $K_{3,3}$ も G の topological minor でない，ちょうどそのときである．

▷ 次のスライドの例が示すように，クラトフスキーの定理の上の記述で，“topological minor” という条件は,「部分グラフ」で置き換えることはできない．

クラトフスキーの定理

定理. (K. Kuratowski, 1930 (昭和 5 年))
有限グラフ G が平面グラフとなるのは，G が完全グラフ K_5 の subdivision も，完全 2 部グラフ $K_{3,3}$ の subdivision も部分グラフとして含まない，ちょうどそのときである．

▶ グラフ H の subdivision がグラフ G の部分グラフになっているとき，H は G の **topological minor** であるという表現を用いることがある．この用語を使うと，クラトフスキーの定理は次のように言いかえることができる:

定理. (K. Kuratowski, 1930 (昭和 5 年))
有限グラフ G が平面グラフとなるのは，K_5 も，完全 2 部グラフ $K_{3,3}$ も G の topological minor でない，ちょうどそのときである．

▷ 次のスライドの例が示すように，クラトフスキーの定理の上の記述で，“topological minor” という条件は,「部分グラフ」で置き換えることはできない．

クラトフスキーの定理

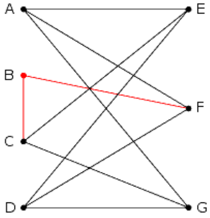
定理． (K. Kuratowski, 1930 (昭和 5 年))
有限グラフ G が平面グラフとなるのは，G が完全グラフ K_5 の subdivision も，完全 2 部グラフ $K_{3,3}$ の subdivision も部分グラフとして含まない，ちょうどそのときである．

▶ グラフ H の subdivision がグラフ G の部分グラフになっているとき，H は G の **topological minor** であるという表現を用いることがある．この用語を使うと，クラトフスキーの定理は次のように言いかえることができる:

定理． (K. Kuratowski, 1930 (昭和 5 年))
有限グラフ G が平面グラフとなるのは，K_5 も，完全 2 部グラフ $K_{3,3}$ も G の topological minor でない，ちょうどそのときである．

▷ 次のスライドの例が示すように，クラトフスキーの定理の上の記述で，“topological minor” という条件は,「部分グラフ」で置き換えることはできない．

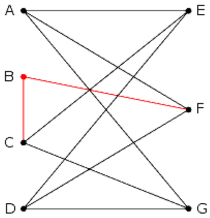
K_5 も $K_{3,3}$ も部分グラフとして含まないが平面グラフでない例



Wikipedia の planar graph の項目 から引用

- ▷ 上のグラフは，K_5 を部分グラフとして含まない (K_5 の各頂点の次数は 4 だが，このグラフの頂点の次数は ≤ 3 である).
- ▷ 上のグラフは $K_{3,3}$ の部分グラフも含まない ($K_{3,3}$ の頂点の次数はすべて 3 だが，このグラフの部分グラフは，次数が ≤ 2 の頂点を含むか，そうでなければ $K_{3,3}^{-}$ の部分グラフになっている).
- ▷ 上のグラフは，$K_{3,3}$ の subdivision である．したがって，$K_{3,3}$ が平面グラフでないことから，このグラフも平面グラフではない.

K_5 も $K_{3,3}$ も部分グラフとして含まないが平面グラフでない例



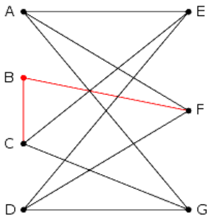
Wikipedia の planar graph の項目 から引用

▷ 上のグラフは，K_5 を部分グラフとして含まない (K_5 の各頂点の次数は 4 だが，このグラフの頂点の次数は ≤ 3 である).

▷ 上のグラフは $K_{3,3}$ の部分グラフも含まない ($K_{3,3}$ の頂点の次数はすべて 3 だが，このグラフの部分グラフは，次数が ≤ 2 の頂点を含むか，そうでなければ $K_{3,3}^-$ の部分グラフになっている).

▷ 上のグラフは，$K_{3,3}$ の subdivision である．したがって，$K_{3,3}$ が平面グラフでないことから，このグラフも平面グラフではない．

K_5 も $K_{3,3}$ も部分グラフとして含まないが平面グラフでない例



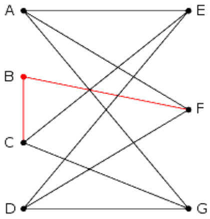
Wikipedia の planar graph の項目 から引用

▷ 上のグラフは，K_5 を部分グラフとして含まない (K_5 の各頂点の次数は 4 だが，このグラフの頂点の次数は ≤ 3 である).

▷ 上のグラフは $K_{3,3}$ の部分グラフも含まない ($K_{3,3}$ の頂点の次数はすべて 3 だが，このグラフの部分グラフは，次数が ≤ 2 の頂点を含むか，そうでなければ $K_{3,3}^-$ の部分グラフになっている).

▷ 上のグラフは，$K_{3,3}$ の subdivision である．したがって，$K_{3,3}$ が平面グラフでないことから，このグラフも平面グラフではない．

K_5 も $K_{3,3}$ も部分グラフとして含まないが平面グラフでない例



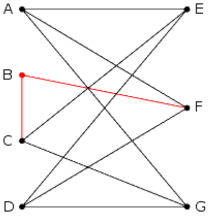
Wikipedia の planar graph の項目 から引用

▷ 上のグラフは，K_5 を部分グラフとして含まない (K_5 の各頂点の次数は 4 だが，このグラフの頂点の次数は ≤ 3 である).

▷ 上のグラフは $K_{3,3}$ の部分グラフも含まない ($K_{3,3}$ の頂点の次数はすべて 3 だが，このグラフの部分グラフは，次数が ≤ 2 の頂点を含むか，そうでなければ $K_{3,3}^{-}$ の部分グラフになっている).

▷ 上のグラフは，$K_{3,3}$ の subdivision である．したがって，$K_{3,3}$ が平面グラフでないことから，このグラフも平面グラフではない．

K_5 も $K_{3,3}$ も部分グラフとして含まないが平面グラフでない例



Wikipedia の planar graph の項目 から引用

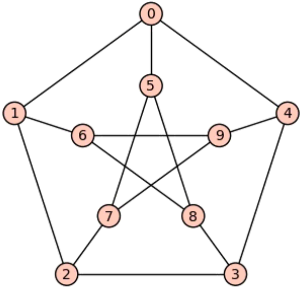
▷ 上のグラフは，K_5 を部分グラフとして含まない (K_5 の各頂点の次数は 4 だが，このグラフの頂点の次数は ≤ 3 である).

▷ 上のグラフは $K_{3,3}$ の部分グラフも含まない ($K_{3,3}$ の頂点の次数はすべて 3 だが，このグラフの部分グラフは，次数が ≤ 2 の頂点を含むか，そうでなければ $K_{3,3}^{-}$ の部分グラフになっている).

▷ 上のグラフは，$K_{3,3}$ の subdivision である．したがって，$K_{3,3}$ が平面グラフでないことから，このグラフも平面グラフではない．

$K_{3,3}$ が topological minor となっているグラフの例

$K_{3,3}$ が topological minor となっているグラフの例



- Wikipedia の planar graph の項目 にリンクされている 動画 の引用

クラトフスキーの定理の簡単な方向の証明

定理． (K. Kuratowski, 1930 (昭和 5 年))
有限グラフ G が平面グラフとなるのは，G が完全グラフ K_5 の subdivision も，完全 2 部グラフ $K_{3,3}$ の subdivision も部分グラフとして含まない，ちょうどそのときである．

- この定理の証明には，次の 2 つを示す必要がある:

(1) 有限グラフ G が平面グラフなら，G は K_5 の subdivision も $K_{3,3}$ の subdivision も部分グラフとして含まない．

(2) 有限グラフ G が K_5 の subdivision も $K_{3,3}$ の subdivision も部分グラフとして含まないなら，G は平面グラフである．

ここでは (1) のみ示す (これは今までの考察からすぐに導ける)．
(2) の証明は，(1) より複雑である (この証明は講義のページにテキストとしてリンクする予定)．

クラトフスキーの定理の簡単な方向の証明

定理. (K. Kuratowski, 1930 (昭和 5 年))
有限グラフ G が平面グラフとなるのは，G が完全グラフ K_5 の subdivision も，完全 2 部グラフ $K_{3,3}$ の subdivision も部分グラフとして含まない，ちょうどそのときである.

- この定理の証明には，次の 2 つを示す必要がある:

(1) 有限グラフ G が平面グラフなら，G は K_5 の subdivision も $K_{3,3}$ の subdivision も部分グラフとして含まない.

(2) 有限グラフ G が K_5 の subdivision も $K_{3,3}$ の subdivision も部分グラフとして含まないなら，G は平面グラフである.

ここでは (1) のみ示す (これは今までの考察からすぐに導ける).
(2) の証明は，(1) より複雑である (この証明は講義のページにテキストとしてリンクする予定).

クラトフスキーの定理の簡単な方向の証明

定理． (K. Kuratowski, 1930 (昭和 5 年))
有限グラフ G が平面グラフとなるのは，G が完全グラフ K_5 の subdivision も，完全 2 部グラフ $K_{3,3}$ の subdivision も部分グラフとして含まない，ちょうどそのときである．

- この定理の証明には，次の 2 つを示す必要がある:

(1) 有限グラフ G が平面グラフなら，G は K_5 の subdivision も $K_{3,3}$ の subdivision も部分グラフとして含まない．

(2) 有限グラフ G が K_5 の subdivision も $K_{3,3}$ の subdivision も部分グラフとして含まないなら，G は平面グラフである．

ここでは (1) のみ示す (これは今までの考察からすぐに導ける)．
(2) の証明は，(1) より複雑である (この証明は講義のページにテキストとしてリンクする予定)．

クラトフスキーの定理の簡単な方向の証明

定理． (K. Kuratowski, 1930 (昭和 5 年))
有限グラフ G が平面グラフとなるのは，G が完全グラフ K_5 の subdivision も，完全 2 部グラフ $K_{3,3}$ の subdivision も部分グラフとして含まない，ちょうどそのときである．

- この定理の証明には，次の 2 つを示す必要がある:

(1) 有限グラフ G が平面グラフなら，G は K_5 の subdivision も $K_{3,3}$ の subdivision も部分グラフとして含まない．

(2) 有限グラフ G が K_5 の subdivision も $K_{3,3}$ の subdivision も部分グラフとして含まないなら，G は平面グラフである．

ここでは (1) のみ示す (これは今までの考察からすぐに導ける)．
(2) の証明は，(1) より複雑である (この証明は講義のページにテキストとしてリンクする予定)．

クラトフスキーの定理の簡単な方向の証明

定理. (K. Kuratowski, 1930 (昭和 5 年))
有限グラフ G が平面グラフとなるのは, G が完全グラフ K_5 の subdivision も, 完全 2 部グラフ $K_{3,3}$ の subdivision も部分グラフとして含まない, ちょうどそのときである.

- この定理の証明には, 次の 2 つを示す必要がある:

(1) 有限グラフ G が平面グラフなら, G は K_5 の subdivision も $K_{3,3}$ の subdivision も部分グラフとして含まない.

(2) 有限グラフ G が K_5 の subdivision も $K_{3,3}$ の subdivision も部分グラフとして含まないなら, G は平面グラフである.

ここでは (1) のみ示す (これは今までの考察からすぐに導ける).
(2) の証明は, (1) より複雑である (この証明は講義のページにテキストとしてリンクする予定).

クラトフスキーの定理の簡単な方向の証明

定理. (K. Kuratowski, 1930 (昭和 5 年))
有限グラフ G が平面グラフとなるのは，G が完全グラフ K_5 の subdivision も，完全 2 部グラフ $K_{3,3}$ の subdivision も部分グラフとして含まない，ちょうどそのときである.

- この定理の証明には，次の 2 つを示す必要がある:

(1) 有限グラフ G が平面グラフなら，G は K_5 の subdivision も $K_{3,3}$ の subdivision も部分グラフとして含まない.

(2) 有限グラフ G が K_5 の subdivision も $K_{3,3}$ の subdivision も部分グラフとして含まないなら，G は平面グラフである.

ここでは (1) のみ示す (これは今までの考察からすぐに導ける).
(2) の証明は，(1) より複雑である (この証明は講義のページにテキストとしてリンクする予定).

クラトフスキーの定理の簡単な方向の証明 (2/2)

(1) 有限グラフ G が平面グラフなら，G は K_5 の subdivision も $K_{3,3}$ の subdivision も部分グラフとして含まない．

証明． (1) の次の対偶命題を示せばよい:

(1') G が K_5 の subdivision または $K_{3,3}$ の subdivision を部分グラフ含めば G は平面グラフではない．

- G が K_5 の subdivision を部分グラフとして含めば，G は平面グラフではない: もし，G が平面グラフだとすれば，G の部分グラフである K_5 の subdivision (の 1 つ) も平面グラフである．したがって，K_5 も平面グラフとなってしまうが，前に示したように，K_5 は平面グラフでないから矛盾である．
- 同様に G が $K_{3,3}$ の subdivision を部分グラフとして含めば，G は平面グラフではない． □

クラトフスキーの定理の簡単な方向の証明 (2/2)

(1) 有限グラフ G が平面グラフなら, G は K_5 の subdivision も $K_{3,3}$ の subdivision も部分グラフとして含まない.

証明. (1) の次の対偶命題を示せばよい:

(1') G が K_5 の subdivision または $K_{3,3}$ の subdivision を部分グラフ含めば G は平面グラフではない.

- G が K_5 の subdivision を部分グラフとして含めば, G は平面グラフではない: もし, G が平面グラフだとすれば, G の部分グラフである K_5 の subdivision (の 1 つ) も平面グラフである. したがって, K_5 も平面グラフとなってしまうが, 前に示したように, K_5 は平面グラフでないから矛盾である.
- 同様に G が $K_{3,3}$ の subdivision を部分グラフとして含めば, G は平面グラフではない. □

クラトフスキーの定理の簡単な方向の証明 (2/2)

(1) 有限グラフ G が平面グラフなら，G は K_5 の subdivision も $K_{3,3}$ の subdivision も部分グラフとして含まない．

証明. (1) の次の対偶命題を示せばよい:

(1') G が K_5 の subdivision または $K_{3,3}$ の subdivision を部分グラフ含めば G は平面グラフではない．

- G が K_5 の subdivision を部分グラフとして含めば，G は平面グラフではない: もし，G が平面グラフだとすれば，G の部分グラフである K_5 の subdivision (の 1 つ) も平面グラフである．したがって，K_5 も平面グラフとなってしまうが，前に示したように，K_5 は平面グラフでないから矛盾である．
- 同様に G が $K_{3,3}$ の subdivision を部分グラフとして含めば，G は平面グラフではない． □

(1) 有限グラフ G が平面グラフなら，G は K_5 の subdivision も $K_{3,3}$ の subdivision も部分グラフとして含まない．

証明． (1) の次の対偶命題を示せばよい:

(1') G が K_5 の subdivision または $K_{3,3}$ の subdivision を部分グラフ含めば G は平面グラフではない．

- G が K_5 の subdivision を部分グラフとして含めば，G は平面グラフではない: もし，G が平面グラフだとすれば，G の部分グラフである K_5 の subdivision (の 1 つ) も平面グラフである．したがって，K_5 も平面グラフとなってしまうが，前に示したように，K_5 は平面グラフでないから矛盾である．
- 同様に G が $K_{3,3}$ の subdivision を部分グラフとして含めば，G は平面グラフではない． □

クラトフスキーの定理の簡単な方向の証明 (2/2)

(1) 有限グラフ G が平面グラフなら，G は K_5 の subdivision も $K_{3,3}$ の subdivision も部分グラフとして含まない．

証明． (1) の次の対偶命題を示せばよい:

(1') G が K_5 の subdivision または $K_{3,3}$ の subdivision を部分グラフ含めば G は平面グラフではない．

- G が K_5 の subdivision を部分グラフとして含めば，G は平面グラフではない: もし，G が平面グラフだとすれば，G の部分グラフである K_5 の subdivision (の 1 つ) も平面グラフである．したがって，K_5 も平面グラフとなってしまうが，前に示したように，K_5 は平面グラフでないから矛盾である．
- 同様に G が $K_{3,3}$ の subdivision を部分グラフとして含めば，G は平面グラフではない． □

クラトフスキーの定理の簡単な方向の証明 (2/2)

(1) 有限グラフ G が平面グラフなら，G は K_5 の subdivision も $K_{3,3}$ の subdivision も部分グラフとして含まない．

証明. (1) の次の対偶命題を示せばよい:

(1') G が K_5 の subdivision または $K_{3,3}$ の subdivision を部分グラフ含めば G は平面グラフではない．

- G が K_5 の subdivision を部分グラフとして含めば，G は平面グラフではない: もし，G が平面グラフだとすれば，G の部分グラフである K_5 の subdivision (の 1 つ) も平面グラフである．したがって，K_5 も平面グラフとなってしまうが，前に示したように，K_5 は平面グラフでないから矛盾である．
- 同様に G が $K_{3,3}$ の subdivision を部分グラフとして含めば，G は平面グラフではない． □

クラトフスキーの定理の簡単な方向の証明 (2/2)

(1) 有限グラフ G が平面グラフなら，G は K_5 の subdivision も $K_{3,3}$ の subdivision も部分グラフとして含まない．

証明． (1) の次の対偶命題を示せばよい:

(1') G が K_5 の subdivision または $K_{3,3}$ の subdivision を部分グラフ含めば G は平面グラフではない．

- G が K_5 の subdivision を部分グラフとして含めば，G は平面グラフではない: もし，G が平面グラフだとすれば，G の部分グラフである K_5 の subdivision (の 1 つ) も平面グラフである．したがって，K_5 も平面グラフとなってしまうが，前に示したように，K_5 は平面グラフでないから矛盾である．
- 同様に G が $K_{3,3}$ の subdivision を部分グラフとして含めば，G は平面グラフではない． □

演習問題 (1/2)

(1) グラフ H がグラフ G の subdivision となっている，G が平面グラフであることと H が平面グラフであることは同値である (中級問題).

(2) グラフ G が n 個の連結な部分グラフ $G_1, \ldots, G_n$ を合せたものになっているとき，これらの $G_1, \ldots, G_n$ の各々を G の **連結成分** (**connected components**) とよぶ.

(2.a) G の部分グラフ H が G の連結成分であることと，H を含む G の部分グラフで連結なものは H に限ることが同値になる (中級問題).

G の連結成分の数 (上では n) を c であらわすことにする．このとき:

(2.b) G が連結であることと $c = 1$ となることは同値である (初級問題).

(2.c) (必ずしも連結でない) 任意の平面グラフに対し，$v - e + f - c = 1$ が成り立つ (中-上級問題).

演習問題 (1/2)

(1) グラフ H がグラフ G の subdivision となっている，G が平面グラフであることと H が平面グラフであることは同値である (中級問題).

(2) グラフ G が n 個の連結な部分グラフ $G_1, \ldots, G_n$ を合せたものになっているとき，これらの $G_1, \ldots, G_n$ の各々を G の **連結成分** (**connected components**) とよぶ.

(2.a) G の部分グラフ H が G の連結成分であることと，H を含む G の部分グラフで連結なものは H に限ることが同値になる (中級問題).

G の連結成分の数 (上では n) を c であらわすことにする．このとき:

(2.b) G が連結であることと $c = 1$ となることは同値である (初級問題).

(2.c) (必ずしも連結でない) 任意の平面グラフに対し，$v - e + f - c = 1$ が成り立つ (中-上級問題).

演習問題 (1/2)

(1) グラフ H がグラフ G の subdivision となっている，G が平面グラフであることと H が平面グラフであることは同値である (中級問題).

(2) グラフ G が n 個の連結な部分グラフ $G_1, \ldots, G_n$ を合せたものになっているとき，これらの $G_1, \ldots, G_n$ の各々を G の **連結成分** (**connected components**) とよぶ.

(2.a) G の部分グラフ H が G の連結成分であることと，H を含む G の部分グラフで連結なものは H に限ることが同値になる (中級問題).

G の連結成分の数 (上では n) を c であらわすことにする．このとき:

(2.b) G が連結であることと $c = 1$ となることは同値である (初級問題).

(2.c) (必ずしも連結でない) 任意の平面グラフに対し，$v - e + f - c = 1$ が成り立つ (中-上級問題).

演習問題 (1/2)

(1) グラフ H がグラフ G の subdivision となっている，G が平面グラフであることと H が平面グラフであることは同値である (中級問題).

(2) グラフ G が n 個の連結な部分グラフ $G_1, \ldots, G_n$ を合せたものになっているとき，これらの $G_1, \ldots, G_n$ の各々を G の **連結成分** (**connected components**) とよぶ.

(2.a) G の部分グラフ H が G の連結成分であることと，H を含む G の部分グラフで連結なものは H に限ることが同値になる (中級問題).

G の連結成分の数 (上では n) を c であらわすことにする．このとき:

(2.b) G が連結であることと $c = 1$ となることは同値である (初級問題).

(2.c) (必ずしも連結でない) 任意の平面グラフに対し，$v - e + f - c = 1$ が成り立つ (中-上級問題).

演習問題 (1/2)

(1) グラフ H がグラフ G の subdivision となっている，G が平面グラフであることと H が平面グラフであることは同値である (中級問題).

(2) グラフ G が n 個の連結な部分グラフ $G_1, \ldots, G_n$ を合せたものになっているとき，これらの $G_1, \ldots, G_n$ の各々を G の **連結成分** (**connected components**) とよぶ.

(2.a) G の部分グラフ H が G の連結成分であることと，H を含む G の部分グラフで連結なものは H に限ることが同値になる (中級問題).

G の連結成分の数 (上では n) を c であらわすことにする．このとき:

(2.b) G が連結であることと $c = 1$ となることは同値である (初級問題).

(2.c) (必ずしも連結でない) 任意の平面グラフに対し，$v - e + f - c = 1$ が成り立つ (中-上級問題).

演習問題 (1/2)

(1) グラフ H がグラフ G の subdivision となっている，G が平面グラフであることと H が平面グラフであることは同値である (中級問題).

(2) グラフ G が n 個の連結な部分グラフ $G_1, \ldots, G_n$ を合せたものになっているとき，これらの $G_1, \ldots, G_n$ の各々を G の **連結成分** (**connected components**) とよぶ.

(2.a) G の部分グラフ H が G の連結成分であることと，H を含む G の部分グラフで連結なものは H に限ることが同値になる (中級問題).

G の連結成分の数 (上では n) を c であらわすことにする．このとき:

(2.b) G が連結であることと $c = 1$ となることは同値である (初級問題).

(2.c) (必ずしも連結でない) 任意の平面グラフに対し，$v - e + f - c = 1$ が成り立つ (中-上級問題).

演習問題 (1/2)

(1) グラフ H がグラフ G の subdivision となっている，G が平面グラフであることと H が平面グラフであることは同値である (中級問題).

(2) グラフ G が n 個の連結な部分グラフ $G_1, \ldots, G_n$ を合せたものになっているとき，これらの $G_1, \ldots, G_n$ の各々を G の **連結成分** (**connected components**) とよぶ.

(2.a) G の部分グラフ H が G の連結成分であることと，H を含む G の部分グラフで連結なものは H に限ることが同値になる (中級問題).

G の連結成分の数 (上では n) を c であらわすことにする．このとき:

(2.b) G が連結であることと $c = 1$ となることは同値である (初級問題).

(2.c) (必ずしも連結でない) 任意の平面グラフに対し，$v - e + f - c = 1$ が成り立つ (中-上級問題).

演習問題 (2/2)

(3) G をグラフとするとき，G からループをすべて取り除き，G の頂点の組の各々に対し，それらを結ぶ辺が複数あるときには，1 つの辺を除いてその他の辺をすべて取り除いて得られるグラフ H は単一グラフになるが，このグラフ H を G **に随伴する単一グラフ**とよぶことにする．

任意のグラフ G に対し，G が平面グラフであることと，G に随伴する単一グラフが平面グラフであることは同値である (中-上級問題).

演習問題 (2/2)

(3) G をグラフとするとき，G からループをすべて取り除き，G の頂点の組の各々に対し，それらを結ぶ辺が複数あるときには，1 つの辺を除いてその他の辺をすべて取り除いて得られるグラフ H は単一グラフになるが，このグラフ H を G **に随伴する単一グラフ**とよぶことにする．

任意のグラフ G に対し，G が平面グラフであることと，G に随伴する単一グラフが平面グラフであることは同値である (中-上級問題).

演習問題 (2/2)

(3) G をグラフとするとき，G からループをすべて取り除き，G の頂点の組の各々に対し，それらを結ぶ辺が複数あるときには，1 つの辺を除いてその他の辺をすべて取り除いて得られるグラフ H は単一グラフになるが，このグラフ H を G **に随伴する単一グラフ**とよぶことにする．

任意のグラフ G に対し，G が平面グラフであることと，G に随伴する単一グラフが平面グラフであることは同値である (中-上級問題).