

# 数理の世界 (数学の考え方) — ゲーデルの不完全性定理

講義に関する注意と概要の説明, (第 I 回の講義)

Sakaé Fuchino (湊野 昌)

Dept. of Computer Sciences  
Kobe University

(神戸大学大学院 システム情報学研究科)

<http://kurt.scitec.kobe-u.ac.jp/~fuchino/>

(22. Oktober 2012 (22:30 JST) version)

神戸大学 2012 年後期の講義  
於 K302 教室, 月曜 8:50 – 10:20

October 1, 2012

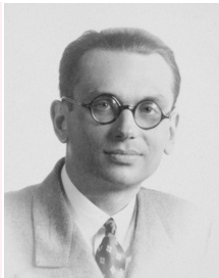
This presentation is typeset by p<sup>L</sup>A<sub>T</sub>E<sub>X</sub> with beamer class.

- ▶ この講義では，ゲーデルの不完全性定理とそれに関連する事柄について考察します．
- ▶ 特別な予備知識は特に何も仮定しません．
- ▶ ただし，受講者の皆さんが，講義で話すことを足掛りにして，色々自分で考えてみることを想定しています．上で「考察します」と書いたときの主語は受講生の皆さんのことです．
- ▶ 講義では，皆さんが「考えてみる」ことを促すためと，皆さんの理解の度合を把握するために，何回かに一度の割合いで reaction papers を書いてもらうことにします．
- ▶ 講義のスライドで“(演習)”という注意書きが現れることがありますが，これは「細部の説明をはぶくので，それについては自分で考えてみてください」というような意味です．これは，レポートの提出の指示のようなものではありませんが，考えたことが妥当なものになっているかどうかを見てほしいときには言ってください．

- ▶ 成績評価は主に期末テストの結果に基づいて行ないます。
- ▶ 期末テストの前には予想問題を配付するなどして、対策がとれるような工夫をするつもりです。
- ▶ 最初の何回かとりアクションペーパーでのチェックを除くと、出席はとりません。
- ▶ この講義のスライドを含めて関連資料を、講義の web ページ:  
<http://kurt.scitec.kobe-u.ac.jp/~fuchino/kobe/>  
にリンクします。

- ▶ ゲーデルの不完全性定理 (Gödel's Incompleteness Theorems) の「ゲーデル」はこの定理 (複数!) を証明した人の名前である。

- ▶ K. ゲーデル(Kurt Gödel),  
1906(明治 39) 年 - 1978(昭和 53) 年  
オーストリア (当時のオーストリア=ハンガリー帝国) で生れ, 第 2 次世界大戦でナチス・ドイツに併合されたオーストリアを去って, アメリカに移住. プリンストン高等研究所教授となり, アメリカで亡くなった。



- ▶ 不完全性定理は, 1931(昭和 6) 年, ゲーデルがウィーン大学で博士号を取得した翌年の 25 才のときに発表された論文の主定理である (上の写真はゲーデルが 20 才頃のもの)。

- ▶ 不完全性定理の主張を正確に述べるには、いくつかの概念を正確に定義する必要があるが直観的には次のように述べることができる。

定理 1. (第 1 不完全性定理) 自然数論を含み矛盾しないような、どのような (具体的に与えられた, 数学の) 公理系  $S$  に対しても, その公理系から証明できないし, その否定も証明できないような数学的な命題が必ず存在する。

- ▶ 後で見るように上のような  $S$  のひとつとして, これまでに知られているすべての数学の理論がそこで展開できるようなものが作れることが知られているが, そのような公理系からでも, 証明も否定の証明もできないものが存在することが上の定理から言える。つまり, 通常の数学的議論ではその真偽が決定できないような数学的命題が存在する。
- ▶ 第 1 不完全性定理は, 根拠のない“哲学的”な主張のようなものではなく, 厳密に記述できて, 厳密に証明できる定理である。

定理 2 . (第 2 不完全性定理) 自然数論を含む具体的に与えられた理論が矛盾しないなら , この理論の中で , その理論が矛盾を含まないことを証明することはできない .

- ▶ 一つ前のスライドで述べたことと , 第 2 不完全性定理から , 数学が矛盾しないことの究極の証明は理論的に不可能であることがわかる .
- ▶ ただし , 「矛盾しないことの証明が不可能だ」ということは , 「矛盾する」ということではない .
- ▶ また数学が矛盾しないことの部分的な証明や , 数学が矛盾しないことを示唆する結果も多く得られている .

- ▶ 20世紀初めから中頃にかけて、我々の知性の限界や、認識の限界を示す、というようにも巷では解釈されることのある、いくつかの発見がなされている。たとえば:
  - ▷ 相対性理論 (1905(明治38)年, アインシュタイン)
  - ▷ 不確定性原理 (1927(昭和2)年, ハイゼンベルク)
  - ▷ ゲーデルの不完全性定理 (1931(昭和6)年, ゲーデル) 等々.
- ▶ この講義では、少なくとも不完全性定理に関しては、「我々の知性の限界や、認識の限界を示す」という解釈は妥当でないことを示すことになる — ここであげた二つの物理法則についてもこの解釈が妥当でないことを論証できる.
- ▶ なお、プリンストン高等研究所での晩年のアインシュタインとゲーデル(親子くらいの年がはなれている)は大変に親しい友人だったことが知られている.



- ▶ 講義では，順次，参考文献やネット上で見ることのできる文献へのリンクを示す．
- ▶ 今回はとりあえず，私が今年の1月に「数学セミナー」に執筆した不完全性定理に関する 記事の原稿 の URL

<http://kurt.scitec.kobe-u.ac.jp/~fuchino/tmp/susemi2012-01.pdf>

をあげておく．この記事の文献表にも，参考にできる文献がくつかあげられている．