数理の世界 (数学の考え方) — ゲーデルの不完全性定理

不完全性定理と数学，計算機科学，哲学／数学と証明，（第 II 回の講義)

Sakaé Fuchino (渕野 昌)

Dept. of Computer Sciences
Kobe University
(神戸大学大学院 システム情報学研究科)

http://kurt.scitec.kobe-u.ac.jp/~fuchino/

(22. Oktober 2012 (22:36 JST) version)

神戸大学 2012 年後期の講義
於 K302 教室，月曜 8:50 – 10:20

October 15, 2012

This presentation is typeset by pLATEX with beamer class.

前回の復習と補足

定理 1. (第１不完全性定理) 自然数論を含み矛盾しないような，どのような (具体的に与えられた，数学の) 公理系 T に対しても，その T から証明できないし，その否定も証明できないような数学的な命題 φ が必ず存在する．

定理 2. (第２不完全性定理) 自然数論を含む具体的に与えられた理論 T が矛盾しないなら，T で使える論法で，この理論が矛盾を含まないことを証明することはできない．

- 上の２つの定理で,「自然数論」,「矛盾しない」,「具体的に与えられた」,「公理系」… はすべて厳密な定義が与えられた数学の用語である (後で，どう定義されているかをきちんと見ることになる).
- 上の２つの定理ともに数学の定理である．特に，定理 1.,2. の主張は両方とも数学的に証明できる．
- 定理 1.,2. の主張の中にある「証明」とこれらの定理が証明できる，というときの「証明」は “レベル” の違う「証明」である．これについても後で詳しく見る．

前回の復習と補足

定理 1. (第１不完全性定理) 自然数論を含み矛盾しないような，どのような (具体的に与えられた，数学の) 公理系 T に対しても，その T から証明できないし，その否定も証明できないような数学的な命題 φ が必ず存在する.

定理 2. (第２不完全性定理) 自然数論を含む具体的に与えられた理論 T が矛盾しないなら，T で使える論法で，この理論が矛盾を含まないことを証明することはできない.

- 上の２つの定理で,「自然数論」,「矛盾しない」,「具体的に与えられた」,「公理系」… はすべて厳密な定義が与えられた数学の用語である (後で，どう定義されているかをきちんと見ることになる).
- 上の２つの定理ともに数学の定理である．特に，定理 1.,2. の主張は両方とも数学的に証明できる.
- 定理 1.,2. の主張の中にある「証明」とこれらの定理が証明できる，というときの「証明」は “レベル” の違う「証明」である．これについても後で詳しく見る.

前回の復習と補足

定理 1.（第１不完全性定理） 自然数論を含み矛盾しないような，どのような（具体的に与えられた，数学の）公理系 T に対しても，その T から証明できないし，その否定も証明できないような数学的な命題 φ が必ず存在する．

定理 2.（第２不完全性定理） 自然数論を含む具体的に与えられた理論 T が矛盾しないなら，T で使える論法で，この理論が矛盾を含まないことを証明することはできない．

- 上の２つの定理で,「自然数論」,「矛盾しない」,「具体的に与えられた」,「公理系」… はすべて厳密な定義が与えられた数学の用語である（後で，どう定義されているかをきちんと見ることになる）．
- 上の２つの定理ともに数学の定理である．特に，定理 1.,2. の主張は両方とも数学的に証明できる．
- 定理 1.,2. の主張の中にある「証明」とこれらの定理が証明できる，というときの「証明」は “レベル” の違う「証明」である．これについても後で詳しく見る．

前回の復習と補足

定理 1. (第1不完全性定理) 自然数論を含み矛盾しないような，どのような (具体的に与えられた，数学の) 公理系 T に対しても，その T から証明できないし，その否定も証明できないような数学的な命題 φ が必ず存在する.

定理 2. (第2不完全性定理) 自然数論を含む具体的に与えられた理論 T が矛盾しないなら， T で使える論法で，この理論が矛盾を含まないことを証明することはできない.

- 上の２つの定理で,「自然数論」,「矛盾しない」,「具体的に与えられた」,「公理系」… はすべて厳密な定義が与えられた数学の用語である (後で，どう定義されているかをきちんと見ることになる).
- 上の２つの定理ともに数学の定理である．特に，定理 1.,2. の主張は両方とも数学的に証明できる.
- 定理 1.,2. の主張の中にある「証明」とこれらの定理が証明できる，というときの「証明」は“レベル”の違う「証明」である．これについても後で詳しく見る.

前回の復習と補足

定理 1. (第 1 不完全性定理) 自然数論を含み矛盾しないような，どのような (具体的に与えられた，数学の) 公理系 T に対しても，その T から証明できないし，その否定も証明できないような数学的な命題 φ が必ず存在する.

定理 2. (第 2 不完全性定理) 自然数論を含む具体的に与えられた理論 T が矛盾しないなら，T で使える論法で，この理論が矛盾を含まないことを証明することはできない.

- 上の 2 つの定理で,「自然数論」,「矛盾しない」,「具体的に与えられた」,「公理系」… はすべて厳密な定義が与えられた数学の用語である (後で，どう定義されているかをきちんと見ることになる).
- 上の 2 つの定理ともに数学の定理である．特に，定理 1.,2. の主張は両方とも数学的に証明できる.
- 定理 1.,2. の主張の中にある「証明」とこれらの定理が証明できる，というときの「証明」は "レベル" の違う「証明」である．これについても後で詳しく見る.

前回の復習と補足

定理 1. (第 1 不完全性定理) 自然数論を含み矛盾しないような，どのような (具体的に与えられた，数学の) 公理系 T に対しても，その T から証明できないし，その否定も証明できないような数学的な命題 φ が必ず存在する．

定理 2. (第 2 不完全性定理) 自然数論を含む具体的に与えられた理論 T が矛盾しないなら，T で使える論法で，この理論が矛盾を含まないことを証明することはできない．

- 上の 2 つの定理で,「自然数論」,「矛盾しない」,「具体的に与えられた」,「公理系」… はすべて厳密な定義が与えられた数学の用語である (後で，どう定義されているかをきちんと見ることになる).
- 上の 2 つの定理ともに数学の定理である．特に，定理 1.,2. の主張は両方とも数学的に証明できる．
- 定理 1.,2. の主張の中にある「証明」とこれらの定理が証明できる，というときの「証明」は "レベル" の違う「証明」である．これについても後で詳しく見る．

前回の復習と補足

定理 1. (第 1 不完全性定理) 自然数論を含み矛盾しないような，どのような (具体的に与えられた，数学の) 公理系 T に対しても，その T から証明できないし，その否定も証明できないような数学的な命題 φ が必ず存在する.

定理 2. (第 2 不完全性定理) 自然数論を含む具体的に与えられた理論 T が矛盾しないなら，T で使える論法で，この理論が矛盾を含まないことを証明することはできない.

- 上の 2 つの定理で,「自然数論」,「矛盾しない」,「具体的に与えられた」,「公理系」… はすべて厳密な定義が与えられた数学の用語である (後で，どう定義されているかをきちんと見ることになる).
- 上の 2 つの定理ともに数学の定理である．特に，定理 1.,2. の主張は両方とも数学的に証明できる.
- 定理 1.,2. の主張の中にある「証明」とこれらの定理が証明できる，というときの「証明」は "レベル" の違う「証明」である．これについても後で詳しく見る.

不完全性定理は数学の定理か？

定理 1.（第１不完全性定理） 自然数論を含み矛盾しないような，どのような（具体的に与えられた，数学の）公理系 T に対しても，その T から証明できないし，その否定も証明できないような数学的な命題 φ が必ず存在する．

定理 2.（第２不完全性定理） 自然数論を含む具体的に与えられた理論 T が矛盾しないなら，T で使える論法で，この理論が矛盾を含まないことを証明することはできない．

- ２つの不完全性定理は，厳密に証明のできる数学の定理である．
- 不完全性定理の主張は，数学の証明の性質に関するものと解釈できるので，その証明は，「数学の証明の持つある性質」について証明する，という入れ子の構造になっている．
- 数学の性質について，数学の体系を外からながめて，これを数学的に分析する，という研究の視点は，超数学 (metamathematics) とよばれることもある．

不完全性定理は数学の定理か？

定理 1. (第１不完全性定理) 自然数論を含み矛盾しないような，どのような (具体的に与えられた，数学の) 公理系 T に対しても，その T から証明できないし，その否定も証明できないような数学的な命題 φ が必ず存在する．

定理 2. (第２不完全性定理) 自然数論を含む具体的に与えられた理論 T が矛盾しないなら，T で使える論法で，この理論が矛盾を含まないことを証明することはできない．

- ２つの不完全性定理は，厳密に証明のできる数学の定理である．
- 不完全性定理の主張は，数学の証明の性質に関するものと解釈できるので，その証明は,「数学の証明の持つある性質」について証明する，という入れ子の構造になっている．
- 数学の性質について，数学の体系を外からながめて，これを数学的に分析する，という研究の視点は，超数学 (metamathematics) とよばれることもある．

不完全性定理は数学の定理か？

定理 1. (第１不完全性定理) 自然数論を含み矛盾しないような，どのような (具体的に与えられた，数学の) 公理系 T に対しても，その T から証明できないし，その否定も証明できないような数学的な命題 φ が必ず存在する．

定理 2. (第２不完全性定理) 自然数論を含む具体的に与えられた理論 T が矛盾しないなら，T で使える論法で，この理論が矛盾を含まないことを証明することはできない．

- ２つの不完全性定理は，厳密に証明のできる数学の定理である．
- 不完全性定理の主張は，数学の証明の性質に関するものと解釈できるので，その証明は,「数学の証明の持つある性質」について証明する，という入れ子の構造になっている．
- 数学の性質について，数学の体系を外からながめて，これを数学的に分析する，という研究の視点は，超数学 (metamathematics) とよばれることもある．

不完全性定理は数学の定理か？

定理 1. (第１不完全性定理) 自然数論を含み矛盾しないような，どのような (具体的に与えられた，数学の) 公理系 T に対しても，その T から証明できないし，その否定も証明できないような数学的な命題 φ が必ず存在する．

定理 2. (第２不完全性定理) 自然数論を含む具体的に与えられた理論 T が矛盾しないなら，T で使える論法で，この理論が矛盾を含まないことを証明することはできない．

- ２つの不完全性定理は，厳密に証明のできる数学の定理である．
- 不完全性定理の主張は，数学の証明の性質に関するものと解釈できるので，その証明は,「数学の証明の持つある性質」について証明する，という入れ子の構造になっている．
- 数学の性質について，数学の体系を外からながめて，これを数学的に分析する，という研究の視点は，超数学 (metamathematics) とよばれることもある．

自己言及と不完全性定理の証明

定理 1.（第 1 不完全性定理） 自然数論を含み矛盾しないような，どのような（具体的に与えられた，数学の）公理系 T に対しても，その T から証明できないし，その否定も証明できないような数学的な命題 φ が必ず存在する．

定理 2.（第 2 不完全性定理） 自然数論を含む具体的に与えられた理論 T が矛盾しないなら，T で使える論法で，この理論が矛盾を含まないことを証明することはできない．

- 第 1 不完全性定理の「自分は T から証明できない」ということを主張している（と解釈できる）命題 φ を作ることで，証明できる．
  - φ が T で証明できるなら，φ 主張していることに矛盾する．
  - φ の否定が T で証明できるなら，T 矛盾していないことから φ は T から証明できないから，φ の主張が成り立つことになり φ の否定が T で証明できることに矛盾である．
- 第 2 不完全性定理の証明は,「T は矛盾しない」ということを表明する命題に対して上と同様の議論ができることを示せばよい．

自己言及と不完全性定理の証明

定理 1．(第１不完全性定理) 自然数論を含み矛盾しないような，どのような (具体的に与えられた，数学の) 公理系 T に対しても，その T から証明できないし，その否定も証明できないような数学的な命題 φ が必ず存在する．

定理 2．(第２不完全性定理) 自然数論を含む具体的に与えられた理論 T が矛盾しないなら，T で使える論法で，この理論が矛盾を含まないことを証明することはできない．

- 第１不完全性定理の「自分は T から証明できない」ということを主張している (と解釈できる) 命題 φ を作ることで，証明できる．
  - φ が T で証明できるなら，φ 主張していることに矛盾する．
  - φ の否定が T で証明できるなら，T 矛盾していないことから φ は T から証明できないから，φ の主張が成り立つことになり φ の否定が T で証明できることに矛盾である．
- 第２不完全性定理の証明は，「T は矛盾しない」ということを表明する命題に対して上と同様の議論ができることを示せばよい．

自己言及(じこげんきゅう)と不完全性定理の証明

定理 1. (第 1 不完全性定理) 自然数論を含み矛盾しないような，どのような (具体的に与えられた，数学の) 公理系 T に対しても，その T から証明できないし，その否定も証明できないような数学的な命題 φ が必ず存在する．

定理 2. (第 2 不完全性定理) 自然数論を含む具体的に与えられた理論 T が矛盾しないなら，T で使える論法で，この理論が矛盾を含まないことを証明することはできない．

- 第 1 不完全性定理の「自分は T から証明できない」ということを主張している (と解釈できる) 命題 φ を作ることで，証明できる．
  - φ が T で証明できるなら，φ 主張していることに矛盾する．
  - φ の否定が T で証明できるなら，T 矛盾していないことから φ は T から証明できないから，φ の主張が成り立つことになり φ の否定が T で証明できることに矛盾である．
- 第 2 不完全性定理の証明は，「T は矛盾しない」ということを表明する命題に対して上と同様の議論ができることを示せばよい．

自己言及と不完全性定理の証明

定理 1.（第1不完全性定理） 自然数論を含み矛盾しないような，どのような（具体的に与えられた，数学の）公理系 T に対しても，その T から証明できないし，その否定も証明できないような数学的な命題 φ が必ず存在する．

定理 2.（第2不完全性定理） 自然数論を含む具体的に与えられた理論 T が矛盾しないなら，T で使える論法で，この理論が矛盾を含まないことを証明することはできない．

- 第1不完全性定理の「自分は T から証明できない」ということを主張している（と解釈できる）命題 φ を作ることで，証明できる．
  - φ が T で証明できるなら，φ 主張していることに矛盾する．
  - φ の否定が T で証明できるなら，T 矛盾していないことから φ は T から証明できないから，φ の主張が成り立つことになり φ の否定が T で証明できることに矛盾である．
- 第2不完全性定理の証明は,「T は矛盾しない」ということを表明する命題に対して上と同様の議論ができることを示せばよい．

自己言及(じこげんきゅう)と不完全性定理の証明

定理 1. (第 1 不完全性定理) 自然数論を含み矛盾しないような，どのような (具体的に与えられた，数学の) 公理系 T に対しても，その T から証明できないし，その否定も証明できないような数学的な命題 φ が必ず存在する.

定理 2. (第 2 不完全性定理) 自然数論を含む具体的に与えられた理論 T が矛盾しないなら，T で使える論法で，この理論が矛盾を含まないことを証明することはできない.

- 第 1 不完全性定理の「自分は T から証明できない」ということを主張している (と解釈できる) 命題 φ を作ることで，証明できる.
  - φ が T で証明できるなら，φ 主張していることに矛盾する.
  - φ の否定が T で証明できるなら，T 矛盾していないことから φ は T から証明できないから，φ の主張が成り立つことになり φ の否定が T で証明できることに矛盾である.
- 第 2 不完全性定理の証明は,「T は矛盾しない」ということを表明する命題に対して上と同様の議論ができることを示せばよい.

不完全性定理と計算機

- ゲーデルは不完全性定理について書いた論文を発表する前年の 1930(昭和 5) 年に Königsberg で開かれた学会の公開討論で不完全性定理について述べている．
- このときこの学会に参加していた フォン・ノイマン(1903(明治 36) 年 – 1957(昭和 32) 年) はこのときのゲーデルとのディスカッションを通じて，ゲーデル以外で不完全性定理を最初に理解した人となった．
- フォン・ノイマンは 1945 年に現在のコンピュータの基本原理となることになるプログラム内臓方式のコンピュータのアーキテクチャーについての 報告書を書いていている．
- フォン・ノイマンのこの報告書は，チューリング (1912(明治 45) 年 – 1954(昭和 29) 年) の仮想計算機を用いた計算の理論からの影響を受けていると考えられるが，この 2 人の計算機に関する仕事は，ゲーデルの不完全性定理の証明の影響が大きい．
- 特に，不完全性定理の証明の技術的な細部で用いられているゲーデル数化のアイデアは，プログラム内臓方式のアイデアに直結している．

不完全性定理と計算機

- ゲーデルは不完全性定理について書いた論文を発表する前年の 1930(昭和 5) 年に Königsberg で開かれた学会の公開討論で不完全性定理について述べている．
- このときこの学会に参加していた フォン・ノイマン(1903(明治 36) 年 – 1957(昭和 32) 年) はこのときのゲーデルとのディスカッションを通じて，ゲーデル以外で不完全性定理を最初に理解した人となった．
- フォン・ノイマンは 1945 年に現在のコンピュータの基本原理となることになるプログラム内臓方式のコンピュータのアーキテクチャーについての 報告書を書いていている．
- フォン・ノイマンのこの報告書は，チューリング (1912(明治 45) 年 – 1954(昭和 29) 年) の仮想計算機を用いた計算の理論からの影響を受けていると考えられるが，この 2 人の計算機に関する仕事は，ゲーデルの不完全性定理の証明の影響が大きい．
- 特に，不完全性定理の証明の技術的な細部で用いられている ゲーデル数化のアイデアは，プログラム内臓方式のアイデアに直結している．

不完全性定理と計算機

- ゲーデルは不完全性定理について書いた論文を発表する前年の 1930(昭和 5) 年に Königsberg で開かれた学会の公開討論で不完全性定理について述べている．
- このときこの学会に参加していた フォン・ノイマン(1903(明治 36) 年 – 1957(昭和 32) 年) はこのときのゲーデルとのディスカッションを通じて，ゲーデル以外で不完全性定理を最初に理解した人となった．
- フォン・ノイマンは 1945 年に現在のコンピュータの基本原理となることになるプログラム内臓方式のコンピュータのアーキテクチャーについての 報告書を書いていている．
- フォン・ノイマンのこの報告書は，チューリング (1912(明治 45) 年 – 1954(昭和 29) 年) の仮想計算機を用いた計算の理論からの影響を受けていると考えられるが，この 2 人の計算機に関する仕事は，ゲーデルの不完全性定理の証明の影響が大きい．
- 特に，不完全性定理の証明の技術的な細部で用いられているゲーデル数化のアイデアは，プログラム内臓方式のアイデアに直結している．

不完全性定理と計算機

- ゲーデルは不完全性定理について書いた論文を発表する前年の 1930(昭和 5) 年に Königsberg で開かれた学会の公開討論で不完全性定理について述べている.
- このときこの学会に参加していた フォン・ノイマン(1903(明治 36) 年 – 1957(昭和 32) 年) はこのときのゲーデルとのディスカッションを通じて，ゲーデル以外で不完全性定理を最初に理解した人となった.
- フォン・ノイマンは 1945 年に現在のコンピュータの基本原理となることになるプログラム内臓方式のコンピュータのアーキテクチャーについての 報告書を書いていている.
- フォン・ノイマンのこの報告書は，チューリング (1912(明治 45) 年 – 1954(昭和 29) 年) の仮想計算機を用いた計算の理論からの影響を受けていると考えられるが，この 2 人の計算機に関する仕事は，ゲーデルの不完全性定理の証明の影響が大きい.
- 特に，不完全性定理の証明の技術的な細部で用いられている ゲーデル数化のアイデアは，プログラム内臓方式のアイデアに直結している.

不完全性定理と計算機

- ゲーデルは不完全性定理について書いた論文を発表する前年の 1930(昭和 5) 年に Königsberg で開かれた学会の公開討論で不完全性定理について述べている.
- このときこの学会に参加していた フォン・ノイマン(1903(明治 36) 年 – 1957(昭和 32) 年) はこのときのゲーデルとのディスカッションを通じて, ゲーデル以外で不完全性定理を最初に理解した人となった.
- フォン・ノイマンは 1945 年に現在のコンピュータの基本原理となることになるプログラム内臓方式のコンピュータのアーキテクチャーについての 報告書を書いていている.
- フォン・ノイマンのこの報告書は, チューリング (1912(明治 45) 年 – 1954(昭和 29) 年) の仮想計算機を用いた計算の理論からの影響を受けていると考えられるが, この 2 人の計算機に関する仕事は, ゲーデルの不完全性定理の証明の影響が大きい.
- 特に, 不完全性定理の証明の技術的な細部で用いられている ゲーデル数化のアイデアは, プログラム内臓方式のアイデアに直結している.

不完全性定理と計算機

- ゲーデルは不完全性定理について書いた論文を発表する前年の 1930(昭和 5) 年に Königsberg で開かれた学会の公開討論で不完全性定理について述べている．
- このときこの学会に参加していた フォン・ノイマン(1903(明治 36) 年 – 1957(昭和 32) 年) はこのときのゲーデルとのディスカッションを通じて，ゲーデル以外で不完全性定理を最初に理解した人となった．
- フォン・ノイマンは 1945 年に現在のコンピュータの基本原理となることになるプログラム内臓方式のコンピュータのアーキテクチャーについての 報告書を書いていている．
- フォン・ノイマンのこの報告書は，チューリング (1912(明治 45) 年 – 1954(昭和 29) 年) の仮想計算機を用いた計算の理論からの影響を受けていると考えられるが，この 2 人の計算機に関する仕事は，ゲーデルの不完全性定理の証明の影響が大きい．
- 特に，不完全性定理の証明の技術的な細部で用いられている ゲーデル数化のアイデアは，プログラム内臓方式のアイデアに直結している．

不完全性定理と哲学

- 不完全性定理は哲学にも大きな影響を与えている.
- 特に, 不完全性定理の影響が想定されるのは, 認識論, 科学哲学, 数学の哲学などであろう.
- ただし, "哲学的な議論" の中には, 不完全性定理の間違った理解に基いたものが含まれていることもあるので, 注意が必要である.

不完全性定理と哲学

- 不完全性定理は哲学にも大きな影響を与えている．
- 特に，不完全性定理の影響が想定されるのは，認識論，科学哲学，数学の哲学などであろう．
- ただし，“哲学的な議論”の中には，不完全性定理の間違った理解に基いたものが含まれていることもあるので，注意が必要である．

不完全性定理と哲学

- 不完全性定理は哲学にも大きな影響を与えている．
- 特に，不完全性定理の影響が想定されるのは，認識論，科学哲学，数学の哲学などであろう．
- ただし，“哲学的な議論” の中には，不完全性定理の間違った理解に基いたものが含まれていることもあるので，注意が必要である．

不完全性定理と哲学

- 不完全性定理は哲学にも大きな影響を与えている.
- 特に，不完全性定理の影響が想定されるのは，認識論，科学哲学，数学の哲学などであろう.
- ただし，"哲学的な議論" の中には，不完全性定理の間違った理解に基いたものが含まれていることもあるので，注意が必要である.

数学での証明の例 (1)

- 不完全性定理は，数学での証明に関する定理である．この定理の理解のためには数学の証明とは何かをはっきりさせる必要がある．

- まず具体的な簡単な証明の例をいくつか見てみることにする:

定理 3. (ピタゴラスの定理) 任意の直角三角形の斜辺の長さの二乗は他の 2 辺のそれぞれの長さの二乗の和に等しい．

ピタゴラスの定理の証明

数学での証明の例 (1)

- 不完全性定理は，数学での証明に関する定理である．この定理の理解のためには数学の証明とは何かをはっきりさせる必要がある．

- まず具体的な簡単な証明の例をいくつか見てみることにする:

定理 3. (ピタゴラスの定理) 任意の直角三角形の斜辺の長さの二乗は他の 2 辺のそれぞれの長さの二乗の和に等しい．

ピタゴラスの定理の証明

数学での証明の例 (1)

- 不完全性定理は, 数学での証明に関する定理である. この定理の理解のためには数学の証明とは何かをはっきりさせる必要がある.

- まず具体的な簡単な証明の例をいくつか見てみることにする:

定理 3. (ピタゴラスの定理) 任意の直角三角形の斜辺の長さの二乗は他の 2 辺のそれぞれの長さの二乗の和に等しい.

ピタゴラスの定理の証明

数学での証明の例 (1)

- 不完全性定理は，数学での証明に関する定理である．この定理の理解のためには数学の証明とは何かをはっきりさせる必要がある．

- まず具体的な簡単な証明の例をいくつか見てみることにする:

定理 3. (ピタゴラスの定理) 任意の直角三角形の斜辺の長さの二乗は他の 2 辺のそれぞれの長さの二乗の和に等しい．

ピタゴラスの定理の証明

数学での証明の例 (1)

- 不完全性定理は，数学での証明に関する定理である．この定理の理解のためには数学の証明とは何かをはっきりさせる必要がある．

- まず具体的な簡単な証明の例をいくつか見てみることにする:

定理 3. (ピタゴラスの定理) 任意の直角三角形の斜辺の長さの二乗は他の 2 辺のそれぞれの長さの二乗の和に等しい．

ピタゴラスの定理の証明

数学での証明の例 (2)

定理 4. (Hippasusu 紀元前 6 世紀ごろ) $\sqrt{2}$ は有理数ではない.

- 有理数 とは, 分母, 分子を整数とするような分数として表せる数のことである.
- $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, -\frac{7}{4} = \left(\frac{-7}{4}\right), \frac{56}{73}$ などは有理数である.
- 整数 $\cdots, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \cdots$ も, それぞれ $\cdots, \frac{-2}{1}, \frac{-1}{1}, \frac{0}{1}, \frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{3}{1}, \cdots$ とあらわせるので, 有理数である.
- すべての有理数は 循環小数 としてあらわせる. たとえば, $\frac{2}{3} = 0.6666\cdots = 0.\dot{6}$, $\frac{56}{73} = 0.7671232876712328\cdots = 0.\dot{7}\dot{6}\dot{7}\dot{1}\dot{2}\dot{3}\dot{2}\dot{8}$ である. ただし, 有限長の分数表現は末尾に 0 が続いている循環小数とみなす. たとえば, 3.7 は $3.7000\cdots = 3.7\dot{0}$ と見ることで, 循環小数と考える. 逆にすべての循環小数は有理数である.

数学での証明の例 (2)

定理 4. (Hippasusu 紀元前 6 世紀ごろ) $\sqrt{2}$ は有理数ではない.

- 有理数 とは，分母，分子を整数とするような分数として表せる数のことである.
- $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, -\frac{7}{4} = \left(\frac{-7}{4}\right), \frac{56}{73}$ などは有理数である.
- 整数 $\cdots, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \cdots$ も，それぞれ $\cdots, \frac{-2}{1}, \frac{-1}{1}, \frac{0}{1}, \frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{3}{1}, \cdots$ とあらわせるので，有理数である.
- すべての有理数は 循環小数 としてあらわせる．たとえば，$\frac{2}{3} = 0.6666\cdots = 0.\dot{6}$, $\frac{56}{73} = 0.76712328767123288\cdots = 0.\dot{7}671232\dot{8}$ である．ただし，有限長の分数表現は末尾に 0 が続いている循環小数とみなす．たとえば，3.7 は $3.7000\cdots = 3.7\dot{0}$ と見ることで，循環小数と考える．逆にすべての循環小数は有理数である.

数学での証明の例 (2)

定理 4. (Hippasusu 紀元前 6 世紀ごろ) $\sqrt{2}$ は有理数ではない.

- 有理数 とは，分母，分子を整数とするような分数として表せる数のことである.
- $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $-\frac{7}{4} = \left(\frac{-7}{4}\right)$, $\frac{56}{73}$ などは有理数である.
- 整数 $\cdots, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \cdots$ も，それぞれ $\cdots, \frac{-2}{1}, \frac{-1}{1}, \frac{0}{1}, \frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{3}{1}, \cdots$ とあらわせるので，有理数である.
- すべての有理数は 循環小数 としてあらわせる．たとえば，$\frac{2}{3} = 0.6666\cdots = 0.\dot{6}$, $\frac{56}{73} = 0.76712328767123 28\cdots = 0.\dot{7}\dot{6}\dot{7}\dot{1}\dot{2}\dot{3}\dot{2}\dot{8}$ である．ただし，有限長の分数表現は末尾に 0 が続いている循環小数とみなす．たとえば，3.7 は $3.7000\cdots = 3.7\dot{0}$ と見ることで，循環小数と考える．逆にすべての循環小数は有理数である.

数学での証明の例 (2)

定理 4. (Hippasusu 紀元前 6 世紀ごろ) $\sqrt{2}$ は有理数ではない.

- 有理数 とは，分母，分子を整数とするような分数として表せる数のことである.
- $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, -\frac{7}{4} = \left(\frac{-7}{4}\right), \frac{56}{73}$ などは有理数である.
- 整数 $\cdots, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \cdots$ も，それぞれ $\cdots, \frac{-2}{1}, \frac{-1}{1}, \frac{0}{1}, \frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{3}{1}, \cdots$ とあらわせるので，有理数である.
- すべての有理数は 循環小数 としてあらわせる．たとえば，$\frac{2}{3} = 0.6666\cdots = 0.\dot{6}$, $\frac{56}{73} = 0.767123287671232 8\cdots = 0.\dot{7}671232\dot{8}$ である．ただし，有限長の分数表現は末尾に 0 が続いている循環小数とみなす．たとえば，3.7 は $3.7000\cdots = 3.7\dot{0}$ と見ることで，循環小数と考える．逆にすべての循環小数は有理数である.

数学での証明の例 (2)

定理 4. (Hippasusu 紀元前 6 世紀ごろ) $\sqrt{2}$ は有理数ではない.

- 有理数 とは, 分母, 分子を整数とするような分数として表せる数のことである.
- $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $-\frac{7}{4} = \left(\frac{-7}{4}\right)$, $\frac{56}{73}$ などは有理数である.
- 整数 $\cdots, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \cdots$ も, それぞれ $\cdots, \frac{-2}{1}, \frac{-1}{1}, \frac{0}{1}, \frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{3}{1}, \cdots$ とあらわせるので, 有理数である.
- すべての有理数は 循環小数 としてあらわせる. たとえば, $\frac{2}{3} = 0.6666\cdots = 0.\dot{6}$, $\frac{56}{73} = 0.7671232876712328\cdots = 0.\dot{7}67123\dot{2}8$ である. ただし, 有限長の分数表現は末尾に 0 が続いている循環小数とみなす. たとえば, 3.7 は $3.7000\cdots = 3.7\dot{0}$ と見ることで, 循環小数と考える. 逆にすべての循環小数は有理数である.

数学での証明の例 (2)

定理 4. (Hippasusu 紀元前 6 世紀ごろ) $\sqrt{2}$ は有理数ではない.

- 有理数 とは, 分母, 分子を整数とするような分数として表せる数のことである.
- $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, -\frac{7}{4} = \left(\frac{-7}{4}\right), \frac{56}{73}$ などは有理数である.
- 整数 $\cdots, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \cdots$ も, それぞれ $\cdots, \frac{-2}{1}, \frac{-1}{1}, \frac{0}{1}, \frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{3}{1}, \cdots$ とあらわせるので, 有理数である.
- すべての有理数は 循環小数 としてあらわせる. たとえば, $\frac{2}{3} = 0.6666\cdots = 0.\dot{6}, \frac{56}{73} = 0.767123287671232 8\cdots = 0.\dot{7}\dot{6}\dot{7}\dot{1}\dot{2}\dot{3}\dot{2}\dot{8}$ である. ただし, 有限長の分数表現は末尾に 0 が続いている循環小数とみなす. たとえば, 3.7 は $3.7000\cdots = 3.7\dot{0}$ と見ることで, 循環小数と考える. 逆にすべての循環小数は有理数である.

数学での証明の例 (2)

定理 4. (Hippasusu 紀元前 6 世紀ごろ) $\sqrt{2}$ は有理数ではない.

- 有理数 とは，分母，分子を整数とするような分数として表せる数のことである.
- $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, -\frac{7}{4} = \left(\frac{-7}{4}\right), \frac{56}{73}$ などは有理数である.
- 整数 $\cdots, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \cdots$ も，それぞれ $\cdots, \frac{-2}{1}, \frac{-1}{1}, \frac{0}{1}, \frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{3}{1}, \cdots$ とあらわせるので，有理数である.
- すべての有理数は 循環小数 としてあらわせる．たとえば，$\frac{2}{3} = 0.6666\cdots = 0.\dot{6}$, $\frac{56}{73} = 0.767123287671232 8\cdots = 0.\dot{7}671232\dot{8}$ である．ただし，有限長の分数表現は末尾に 0 が続いている循環小数とみなす．たとえば，3.7 は $3.7000\cdots = 3.7\dot{0}$ と見ることで，循環小数と考える．逆にすべての循環小数は有理数である.

数学での証明の例 (2)

定理 4. (Hippasusu 紀元前 6 世紀ごろ) $\sqrt{2}$ は有理数ではない.

- 有理数 とは，分母，分子を整数とするような分数として表せる数のことである.
- $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, -\frac{7}{4} = \left(\frac{-7}{4}\right), \frac{56}{73}$ などは有理数である.
- 整数 $\cdots, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \cdots$ も，それぞれ $\cdots, \frac{-2}{1}, \frac{-1}{1}, \frac{0}{1}, \frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{3}{1}, \cdots$ とあらわせるので，有理数である.
- すべての有理数は 循環小数 としてあらわせる．たとえば，$\frac{2}{3} = 0.6666\cdots = 0.\dot{6}$, $\frac{56}{73} = 0.767123287671 2328\cdots = 0.\dot{7}671232\dot{8}$ である．ただし，有限長の分数表現は末尾に 0 が続いている循環小数とみなす．たとえば，3.7 は $3.7000\cdots = 3.7\dot{0}$ と見ることで，循環小数と考える．逆にすべての循環小数は有理数である.

数学での証明の例 (2)

定理 4. (Hippasusu 紀元前 6 世紀ごろ) $\sqrt{2}$ は有理数ではない.

証明. 背理法 による. $\sqrt{2}$ が有理数だったと仮定して, 矛盾を示す. $\sqrt{2}$ が有理数なら,

(1) $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$

となるような正の整数 m, n がとれる. ただし, 分数表現 $\frac{m}{n}$ はこれ以上約分できないようにとるものとする. (1) の両辺を二乗して, 移項すると,

(2) $2n^2 = m^2$

となるから, m^2 は 2 の倍数（つまり偶数）である. このことから m も 2 の倍数であることがわかる. したがって, 整数 m' で $m = 2m'$ となるものがとれる. これを (2) に代入して整理すると

(3) $n^2 = 2m'^2$

となるから, 上と同様の議論で, n も 2 の倍数であることがわかる. したがって, 分数表現 $\frac{m}{n}$ は 2 で約分できるが, これは, 最初の仮定に矛盾である. □

数学での証明の例 (2)

定理 4. (Hippasusu 紀元前 6 世紀ごろ) $\sqrt{2}$ は有理数ではない.

証明. 背理法 による. $\sqrt{2}$ が有理数だったと仮定して, 矛盾を示す. $\sqrt{2}$ が有理数なら,

(1) $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$

となるような正の整数 m, n がとれる. ただし, 分数表現 $\frac{m}{n}$ はこれ以上約分できないようにとるものとする. (1) の両辺を二乗して, 移項すると,

(2) $2n^2 = m^2$

となるから, m^2 は 2 の倍数（つまり偶数）である. このことから m も 2 の倍数であることがわかる. したがって, 整数 m' で $m = 2m'$ となるものがとれる. これを (2) に代入して整理すると

(3) $n^2 = 2m'^2$

となるから, 上と同様の議論で, n も 2 の倍数であることがわかる. したがって, 分数表現 $\frac{m}{n}$ は 2 で約分できるが, これは, 最初の仮定に矛盾である. □

数学での証明の例 (2)

定理 4. (Hippasusu 紀元前 6 世紀ごろ) $\sqrt{2}$ は有理数ではない.

証明. 背理法 による. $\sqrt{2}$ が有理数だったと仮定して，矛盾を示す. $\sqrt{2}$ が有理数なら,

(1) $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$

となるような正の整数 m, n がとれる. ただし, 分数表現 $\frac{m}{n}$ はこれ以上約分できないようにとるものとする. (1) の両辺を二乗して，移項すると,

(2) $2n^2 = m^2$

となるから, m^2 は 2 の倍数（つまり偶数）である. このことから m も 2 の倍数であることがわかる. したがって, 整数 m' で $m = 2m'$ となるものがとれる. これを (2) に代入して整理すると

(3) $n^2 = 2m'^2$

となるから, 上と同様の議論で, n も 2 の倍数であることがわかる. したがって, 分数表現 $\frac{m}{n}$ は 2 で約分できるが, これは, 最初の仮定に矛盾である. □

数学での証明の例 (2)

定理 4. (Hippasusu 紀元前 6 世紀ごろ) $\sqrt{2}$ は有理数ではない．

証明． 背理法 による． $\sqrt{2}$ が有理数だったと仮定して，矛盾を示す． $\sqrt{2}$ が有理数なら，

(1) $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$

となるような正の整数 m, n がとれる．ただし，分数表現 $\frac{m}{n}$ はこれ以上約分できないようにとるものとする． (1) の両辺を二乗して，移項すると，

(2) $2n^2 = m^2$

となるから， m^2 は 2 の倍数（つまり偶数）である．このことから m も 2 の倍数であることがわかる．したがって，整数 m' で $m = 2m'$ となるものがとれる． これを (2) に代入して整理すると

(3) $n^2 = 2m'^2$

となるから，上と同様の議論で， n も 2 の倍数であることがわかる．したがって，分数表現 $\frac{m}{n}$ は 2 で約分できるが，これは，最初の仮定に矛盾である． □

数学での証明の例 (2)

定理 4. (Hippasusu 紀元前 6 世紀ごろ) $\sqrt{2}$ は有理数ではない.

証明. 背理法 による. $\sqrt{2}$ が有理数だったと仮定して, 矛盾を示す. $\sqrt{2}$ が有理数なら,

(1) $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$

となるような正の整数 m, n がとれる. ただし, 分数表現 $\frac{m}{n}$ はこれ以上約分できないようにとるものとする. (1) の両辺を二乗して, 移項すると,

(2) $2n^2 = m^2$

となるから, m^2 は 2 の倍数（つまり偶数）である. このことから m も 2 の倍数であることがわかる. したがって, 整数 m' で $m = 2m'$ となるものがとれる. これを (2) に代入して整理すると

(3) $n^2 = 2m'^2$

となるから, 上と同様の議論で, n も 2 の倍数であることがわかる. したがって, 分数表現 $\frac{m}{n}$ は 2 で約分できるが, これは, 最初の仮定に矛盾である. □

数学での証明の例 (2)

定理 4. (Hippasusu 紀元前 6 世紀ごろ) $\sqrt{2}$ は有理数ではない.

証明. 背理法 による. $\sqrt{2}$ が有理数だったと仮定して，矛盾を示す. $\sqrt{2}$ が有理数なら，

(1) $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$

となるような正の整数 m, n がとれる. ただし，分数表現 $\frac{m}{n}$ はこれ以上約分できないようにとるものとする. (1) の両辺を二乗して，移項すると，

(2) $2n^2 = m^2$

となるから，m^2 は 2 の倍数（つまり偶数）である. このことから m も 2 の倍数であることがわかる. したがって，整数 m' で $m = 2m'$ となるものがとれる. これを (2) に代入して整理すると

(3) $n^2 = 2m'^2$

となるから，上と同様の議論で，n も 2 の倍数であることがわかる. したがって，分数表現 $\frac{m}{n}$ は 2 で約分できるが，これは，最初の仮定に矛盾である. □

数学での証明の例 (2)

定理 4. (Hippasusu 紀元前 6 世紀ごろ) $\sqrt{2}$ は有理数ではない.

証明. 背理法による. $\sqrt{2}$ が有理数だったと仮定して, 矛盾を示す. $\sqrt{2}$ が有理数なら,

(1) $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$

となるような正の整数 m, n がとれる. ただし, 分数表現 $\frac{m}{n}$ はこれ以上約分できないようにとるものとする. (1) の両辺を二乗して, 移項すると,

(2) $2n^2 = m^2$

となるから, m^2 は 2 の倍数 (つまり偶数) である. このことから m も 2 の倍数であることがわかる. したがって, 整数 m' で $m = 2m'$ となるものがとれる. これを (2) に代入して整理すると

(3) $n^2 = 2m'^2$

となるから, 上と同様の議論で, n も 2 の倍数であることがわかる. したがって, 分数表現 $\frac{m}{n}$ は 2 で約分できるが, これは, 最初の仮定に矛盾である. □

数学での証明の例 (2)

定理 4. (Hippasusu 紀元前 6 世紀ごろ) $\sqrt{2}$ は有理数ではない.

証明. 背理法 による. $\sqrt{2}$ が有理数だったと仮定して, 矛盾を示す. $\sqrt{2}$ が有理数なら,

(1) $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$

となるような正の整数 m, n がとれる. ただし, 分数表現 $\frac{m}{n}$ はこれ以上約分できないようにとるものとする. (1) の両辺を二乗して, 移項すると,

(2) $2n^2 = m^2$

となるから, m^2 は 2 の倍数 (つまり偶数) である. このことから m も 2 の倍数であることがわかる. したがって, 整数 m' で $m = 2m'$ となるものがとれる. これを (2) に代入して整理すると

(3) $n^2 = 2m'^2$

となるから, 上と同様の議論で, n も 2 の倍数であることがわかる. したがって, 分数表現 $\frac{m}{n}$ は 2 で約分できるが, これは, 最初の仮定に矛盾である. □

数学での証明の例 (3)

有理数でない実数を, 無理数とよぶ. 定理 4. は,

『$\sqrt{2}$ は無理数である』

と表現することもできる.

- 無理数 a, b で $a + b$ が有理数になるようなものが存在する（例: $\sqrt{2} + (-\sqrt{2}) = 0$）.
- 無理数 a, b で ab が有理数になるようなものも存在する（例: $\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 2$）.
- 無理数 a, b で a^b が有理数になるようなものは存在するだろうか?

定理 5. (Dov Jarden, 1953(昭和 28) 年) 無理数 a, b で, a^b が有理数になるようなものが存在する.

数学での証明の例 (3)

有理数でない実数を，無理数とよぶ．定理 4. は,

『$\sqrt{2}$ は無理数である』

と表現することもできる.

- 無理数 a, b で $a + b$ が有理数になるようなものが存在する（例: $\sqrt{2} + (-\sqrt{2}) = 0$）.
- 無理数 a, b で ab が有理数になるようなものも存在する（例: $\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 2$）.
- 無理数 a, b で a^b が有理数になるようなものは存在するだろうか？

定理 5. (Dov Jarden, 1953(昭和 28) 年) 無理数 a, b で，a^b が有理数になるようなものが存在する.

数学での証明の例 (3)

有理数でない実数を，無理数とよぶ． 定理 4. は，

『$\sqrt{2}$ は無理数である』

と表現することもできる．

- 無理数 a, b で $a+b$ が有理数になるようなものが存在する（例: $\sqrt{2}+(-\sqrt{2})=0$）．
- 無理数 a, b で ab が有理数になるようなものも存在する（例: $\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}=2$）．
- 無理数 a, b で a^b が有理数になるようなものは存在するだろうか？

定理 5. (Dov Jarden, 1953(昭和 28) 年) 無理数 a, b で，a^b が有理数になるようなものが存在する．

数学での証明の例 (3)

有理数でない実数を，無理数とよぶ．定理 4. は，

『$\sqrt{2}$ は無理数である』

と表現することもできる．

- 無理数 a, b で $a+b$ が有理数になるようなものが存在する（例: $\sqrt{2}+(-\sqrt{2})=0$）．
- 無理数 a, b で ab が有理数になるようなものも存在する（例: $\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}=2$）．
- 無理数 a, b で a^b が有理数になるようなものは存在するだろうか？

定理 5. (Dov Jarden, 1953(昭和 28) 年) 無理数 a, b で，a^b が有理数になるようなものが存在する．

数学での証明の例 (3)

有理数でない実数を，無理数とよぶ．定理 4. は,

『$\sqrt{2}$ は無理数である』

と表現することもできる．

- 無理数 a, b で $a+b$ が有理数になるようなものが存在する（例: $\sqrt{2}+(-\sqrt{2})=0$）．
- 無理数 a, b で ab が有理数になるようなものも存在する（例: $\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}=2$）．
- 無理数 a, b で a^b が有理数になるようなものは存在するだろうか？

定理 5. (Dov Jarden, 1953(昭和 28) 年) 無理数 a, b で，a^b が有理数になるようなものが存在する．

数学での証明の例 (3)

有理数でない実数を，無理数とよぶ．定理 4. は,

『$\sqrt{2}$ は無理数である』

と表現することもできる．

- 無理数 a, b で $a+b$ が有理数になるようなものが存在する（例: $\sqrt{2}+(-\sqrt{2})=0$）.
- 無理数 a, b で ab が有理数になるようなものも存在する（例: $\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}=2$）.
- 無理数 a, b で a^b が有理数になるようなものは存在するだろうか？

定理 5. (Dov Jarden, 1953(昭和 28) 年) 無理数 a, b で，a^b が有理数になるようなものが存在する．

数学での証明の例 (3)

有理数でない実数を，無理数とよぶ．定理 4. は,

『$\sqrt{2}$ は無理数である』

と表現することもできる.

- 無理数 a, b で $a+b$ が有理数になるようなものが存在する（例: $\sqrt{2}+(-\sqrt{2})=0$）.
- 無理数 a, b で ab が有理数になるようなものも存在する（例: $\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}=2$）.
- 無理数 a, b で a^b が有理数になるようなものは存在するだろうか？

定理 5. (Dov Jarden, 1953(昭和 28) 年) 無理数 a, b で，a^b が有理数になるようなものが存在する.

数学での証明の例 (3)

有理数でない実数を，無理数とよぶ．定理 4. は，

『$\sqrt{2}$ は無理数である』

と表現することもできる．

- 無理数 a, b で $a+b$ が有理数になるようなものが存在する（例: $\sqrt{2}+(-\sqrt{2})=0$）.
- 無理数 a, b で ab が有理数になるようなものも存在する（例: $\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}=2$）.
- 無理数 a, b で a^b が有理数になるようなものは存在するだろうか？

定理 5. (Dov Jarden, 1953(昭和 28) 年) 無理数 a, b で，a^b が有理数になるようなものが存在する．

数学での証明の例 (3)

定理 5. (Dov Jarden, 1953 (昭和 28 年)) 無理数 a, b で，a^b が有理数になるようなものが存在する．

証明．場合分けで証明する:

場合 1. $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ が有理数である場合: このときには，$a=\sqrt{2}$, $b=\sqrt{2}$ とすればよい．

場合 2. $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ が有理数でない（つまり無理数である）場合: このときには,

$$\left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}} = (\sqrt{2})^{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} = (\sqrt{2})^2 = 2$$

となる．したがって，$a=\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$, $b=\sqrt{2}$ とすればよい． □

数学での証明の例 (3)

定理 5. (Dov Jarden, 1953 (昭和 28 年)) 無理数 a, b で, a^b が有理数になるようなものが存在する.

証明. 場合分けで証明する:

場合 1. $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ が有理数である場合: このときには, $a = \sqrt{2}$, $b = \sqrt{2}$ とすればよい.

場合 2. $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ が有理数でない（つまり無理数である）場合: このときには,

$$\left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}} = (\sqrt{2})^{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} = (\sqrt{2})^2 = 2$$

となる. したがって, $a = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}$, $b = \sqrt{2}$ とすればよい. □

数学での証明の例 (3)

定理 5. (Dov Jarden, 1953 (昭和 28 年)) 無理数 a, b で, a^b が有理数になるようなものが存在する.

証明. 場合分けで証明する:

場合 1. $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ が有理数である場合: このときには, $a = \sqrt{2}$, $b = \sqrt{2}$ とすればよい.

場合 2. $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ が有理数でない（つまり無理数である）場合: このときには,

$$\left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}} = (\sqrt{2})^{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} = (\sqrt{2})^2 = 2$$

となる. したがって, $a = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}$, $b = \sqrt{2}$ とすればよい. □

数学での証明の例 (3)

定理 5. (Dov Jarden, 1953 (昭和 28 年)) 無理数 a, b で，a^b が有理数になるようなものが存在する.

証明. 場合分けで証明する:

場合 1. $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ が有理数である場合: このときには，$a = \sqrt{2}$, $b = \sqrt{2}$ とすればよい.

場合 2. $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ が有理数でない（つまり無理数である）場合: このときには,

$$\left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}} = (\sqrt{2})^{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} = (\sqrt{2})^2 = 2$$

となる. したがって，$a = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}$, $b = \sqrt{2}$ とすればよい. □

数学での証明の例 (3)

定理 5. (Dov Jarden, 1953 (昭和 28 年)) 無理数 a, b で, a^b が有理数になるようなものが存在する.

証明. 場合分けで証明する:

場合 1. $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ が有理数である場合: このときには, $a = \sqrt{2}$, $b = \sqrt{2}$ とすればよい.

場合 2. $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ が有理数でない（つまり無理数である）場合: このときには,

$$\left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}} = (\sqrt{2})^{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} = (\sqrt{2})^2 = 2$$

となる. したがって, $a = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}$, $b = \sqrt{2}$ とすればよい. □

数学での証明の例 (3)

定理 5. (Dov Jarden, 1953 (昭和 28 年)) 無理数 a, b で，a^b が有理数になるようなものが存在する．

証明. 場合分けで証明する:

場合 1. $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ が有理数である場合: このときには，$a = \sqrt{2}$, $b = \sqrt{2}$ とすればよい．

場合 2. $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ が有理数でない（つまり無理数である）場合: このときには,

$$\left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}} = (\sqrt{2})^{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} = (\sqrt{2})^2 = 2$$

となる．したがって，$a = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}$, $b = \sqrt{2}$ とすればよい． □

数学での証明の例 (4)

定理 6. すべての自然数 n に対して,

(4) $0+1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$

が成り立つ.

注意:

$0+1+2+3+\cdots+n$ は, “0 から n までの自然数を順に足したときの和” をあらわしている.

したがって, $n=0$ のときには, この和は 0 である. また $n=1$ のときには, この和は $0+1=1$ である.

複数の項の和 (sum) をあらわすときに使う記号 $\sum$ を用いると, $0+1+2+3+\cdots+n$ は,

$$\textstyle\sum_{k=0}^{n} k \quad \text{または,} \quad \displaystyle\sum_{k=0}^{n} k$$

とあらわせる.

数学での証明の例 (4)

定理 6. すべての自然数 n に対して,

(4) $0+1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$

が成り立つ.

注意：

$0+1+2+3+\cdots+n$ は, "0 から n までの自然数を順に足したときの和" をあらわしている.

したがって, $n=0$ のときには, この和は 0 である. また $n=1$ のときには, この和は $0+1=1$ である.

複数の項の和 (sum) をあらわすときに使う記号 $\sum$ を用いると, $0+1+2+3+\cdots+n$ は,

$$\textstyle\sum_{k=0}^{n} k \quad \text{または,} \quad \displaystyle\sum_{k=0}^{n} k$$

とあらわせる.

数学での証明の例 (4)

定理 6. すべての自然数 n に対して,

(4) $0+1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$

が成り立つ.

注意 :

$0+1+2+3+\cdots+n$ は, “0 から n までの自然数を順に足したときの和” をあらわしている.

したがって, $n=0$ のときには, この和は 0 である. また $n=1$ のときには, この和は $0+1=1$ である.

複数の項の和 (sum) をあらわすときに使う記号 $\sum$ を用いると, $0+1+2+3+\cdots+n$ は,

$\sum_{k=0}^{n} k$ または, $$\sum_{k=0}^{n} k$$

とあらわせる.

数学での証明の例 (4)

定理 6. すべての自然数 n に対して,

(4) $0+1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$

が成り立つ.

注意：

$0+1+2+3+\cdots+n$ は, "0 から n までの自然数を順に足したときの和" をあらわしている.

したがって, $n=0$ のときには, この和は 0 である. また $n=1$ のときには, この和は $0+1=1$ である.

複数の項の和 (sum) をあらわすときに使う記号 $\sum$ を用いると, $0+1+2+3+\cdots+n$ は,

$$\textstyle\sum_{k=0}^{n} k \quad \text{または,} \quad \displaystyle\sum_{k=0}^{n} k$$

とあらわせる.

数学での証明の例 (4)

定理 6. すべての自然数 n に対して,

(4) $0+1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$

が成り立つ.

注意：

$0+1+2+3+\cdots+n$ は, “0 から n までの自然数を順に足したときの和” をあらわしている.

したがって, $n=0$ のときには, この和は 0 である. また $n=1$ のときには, この和は $0+1=1$ である.

複数の項の和 (sum) をあらわすときに使う記号 $\sum$ を用いると,
$0+1+2+3+\cdots+n$ は,

$\sum_{k=0}^{n} k$ または, $$\sum_{k=0}^{n} k$$

とあらわせる.

数学での証明の例 (4)

定理 6. すべての自然数 n に対して,

(4) $0+1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$

が成り立つ.

注意：

$0+1+2+3+\cdots+n$ は, “0 から n までの自然数を順に足したときの和” をあらわしている.

したがって, $n=0$ のときには, この和は 0 である. また $n=1$ のときには, この和は $0+1=1$ である.

複数の項の和 (sum) をあらわすときに使う記号 $\sum$ を用いると, $0+1+2+3+\cdots+n$ は,

$$\textstyle\sum_{k=0}^{n} k \quad \text{または,} \quad \displaystyle\sum_{k=0}^{n} k$$

とあらわせる.

数学での証明の例 (4)

定理 6. すべての自然数 n に対して,

(4) $0+1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$

が成り立つ.

証明. 数学的帰納法 で証明する.
帰納法の初め: n が 0 のときには, $0+1+2+3+\cdots+n$ も $\frac{n(n+1)}{2}$ も 0 となるから等式 (4) は成り立つ.
帰納法のステップ: $n=k$ に対して, (4) が成り立ったと仮定して, $n=k+1$ のときにも成り立つことを示す. 仮定から,
$0+1+2+3+\cdots+k=\frac{k(k+1)}{2}$ だから,

(5) $0+1+2+3+\cdots+k+(k+1)=\frac{k(k+1)}{2}+(k+1)$

である. (5) の右辺は,
$\frac{k(k+1)}{2}+(k+1)=\frac{k(k+1)+2(k+1)}{2}=\frac{k^2+3k+2}{2}=\frac{(k+1)(k+2)}{2}$
$=\frac{(k+1)((k+1)+1)}{2}$ となるから, (4) は $n=k+1$ に対しても成り立つことがわかる. □

数学での証明の例 (4)

定理 6. すべての自然数 n に対して,

(4) $0+1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$

が成り立つ.

証明. 数学的帰納法 で証明する.

帰納法の初め: n が 0 のときには, $0+1+2+3+\cdots+n$ も $\frac{n(n+1)}{2}$ も 0 となるから等式 (4) は成り立つ.

帰納法のステップ: $n=k$ に対して, (4) が成り立ったと仮定して, $n=k+1$ のときにも成り立つことを示す. 仮定から, $0+1+2+3+\cdots+k=\frac{k(k+1)}{2}$ だから,

(5) $0+1+2+3+\cdots+k+(k+1)=\frac{k(k+1)}{2}+(k+1)$

である. (5) の右辺は,

$\frac{k(k+1)}{2}+(k+1)=\frac{k(k+1)+2(k+1)}{2}=\frac{k^2+3k+2}{2}=\frac{(k+1)(k+2)}{2}$

$=\frac{(k+1)((k+1)+1)}{2}$ となるから, (4) は $n=k+1$ に対しても成り立つことがわかる. □

数学での証明の例 (4)

定理 6. すべての自然数 n に対して,

(4) $0+1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$

が成り立つ.

証明. 数学的帰納法 で証明する.
帰納法の初め: n が 0 のときには, $0+1+2+3+\cdots+n$ も $\frac{n(n+1)}{2}$ も 0 となるから等式 (4) は成り立つ.
帰納法のステップ: $n=k$ に対して, (4) が成り立ったと仮定して, $n=k+1$ のときにも成り立つことを示す. 仮定から, $0+1+2+3+\cdots+k=\frac{k(k+1)}{2}$ だから,

(5) $0+1+2+3+\cdots+k+(k+1)=\frac{k(k+1)}{2}+(k+1)$

である. (5) の右辺は,
$\frac{k(k+1)}{2}+(k+1)=\frac{k(k+1)+2(k+1)}{2}=\frac{k^2+3k+2}{2}=\frac{(k+1)(k+2)}{2}$
$=\frac{(k+1)((k+1)+1)}{2}$ となるから, (4) は $n=k+1$ に対しても成り立つことがわかる. □

数学での証明の例 (4)

定理 6. すべての自然数 n に対して,

(4) $0+1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$

が成り立つ.

証明. 数学的帰納法 で証明する.
帰納法の初め: n が 0 のときには, $0+1+2+3+\cdots+n$ も $\frac{n(n+1)}{2}$ も 0 となるから等式 (4) は成り立つ.
帰納法のステップ: $n=k$ に対して, (4) が成り立ったと仮定して, $n=k+1$ のときにも成り立つことを示す. 仮定から, $0+1+2+3+\cdots+k=\frac{k(k+1)}{2}$ だから,

(5) $0+1+2+3+\cdots+k+(k+1)=\frac{k(k+1)}{2}+(k+1)$

である. (5) の右辺は,
$\frac{k(k+1)}{2}+(k+1)=\frac{k(k+1)+2(k+1)}{2}=\frac{k^2+3k+2}{2}=\frac{(k+1)(k+2)}{2}$
$=\frac{(k+1)((k+1)+1)}{2}$ となるから, (4) は $n=k+1$ に対しても成り立つことがわかる. □

数学での証明の例 (4)

定理 6. すべての自然数 n に対して，

(4) $0+1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$

が成り立つ．

証明． 数学的帰納法 で証明する．
帰納法の初め: n が 0 のときには，$0+1+2+3+\cdots+n$ も $\frac{n(n+1)}{2}$ も 0 となるから等式 (4) は成り立つ．
帰納法のステップ: $n=k$ に対して，(4) が成り立ったと仮定して，$n=k+1$ のときにも成り立つことを示す．仮定から，
$0+1+2+3+\cdots+k=\frac{k(k+1)}{2}$ だから，

(5) $0+1+2+3+\cdots+k+(k+1)=\frac{k(k+1)}{2}+(k+1)$

である．(5) の右辺は，
$\frac{k(k+1)}{2}+(k+1)=\frac{k(k+1)+2(k+1)}{2}=\frac{k^2+3k+2}{2}=\frac{(k+1)(k+2)}{2}$
$=\frac{(k+1)((k+1)+1)}{2}$ となるから，(4) は $n=k+1$ に対しても成り立つことがわかる．$\square$

数学での証明の例 (4)

定理 6. すべての自然数 n に対して，

(4) $0+1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$

が成り立つ．

証明． 数学的帰納法 で証明する．
帰納法の初め: n が 0 のときには，$0+1+2+3+\cdots+n$ も $\frac{n(n+1)}{2}$ も 0 となるから等式 (4) は成り立つ．
帰納法のステップ: $n=k$ に対して，(4) が成り立ったと仮定して，$n=k+1$ のときにも成り立つことを示す．仮定から，
$0+1+2+3+\cdots+k=\frac{k(k+1)}{2}$ だから，

(5) $0+1+2+3+\cdots+k+(k+1)=\frac{k(k+1)}{2}+(k+1)$

である．(5) の右辺は，
$\frac{k(k+1)}{2}+(k+1)=\frac{k(k+1)+2(k+1)}{2}=\frac{k^2+3k+2}{2}=\frac{(k+1)(k+2)}{2}$
$=\frac{(k+1)((k+1)+1)}{2}$ となるから，(4) は $n=k+1$ に対しても成り立つことがわかる．□

数学での証明の例 (4)

定理 6. すべての自然数 n に対して,

(4) $0+1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$

が成り立つ.

証明. 数学的帰納法 で証明する.
帰納法の初め: n が 0 のときには, $0+1+2+3+\cdots+n$ も $\frac{n(n+1)}{2}$ も 0 となるから等式 (4) は成り立つ.
帰納法のステップ: $n=k$ に対して, (4) が成り立ったと仮定して, $n=k+1$ のときにも成り立つことを示す. 仮定から, $0+1+2+3+\cdots+k=\frac{k(k+1)}{2}$ だから,

(5) $0+1+2+3+\cdots+k+(k+1)=\frac{k(k+1)}{2}+(k+1)$

である. (5) の右辺は,
$\frac{k(k+1)}{2}+(k+1)=\frac{k(k+1)+2(k+1)}{2}=\frac{k^2+3k+2}{2}=\frac{(k+1)(k+2)}{2}$
$=\frac{(k+1)((k+1)+1)}{2}$ となるから, (4) は $n=k+1$ に対しても成り立つことがわかる. $\square$

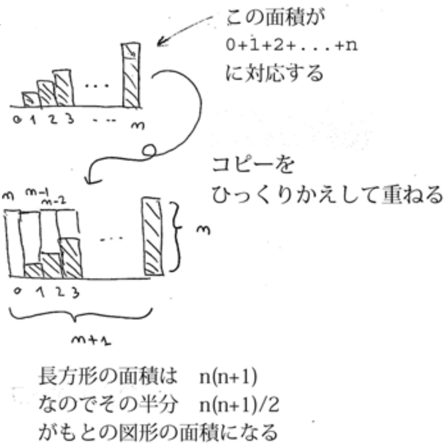
数学での証明の例 (4)

定理 6. すべての自然数 n に対して,

(4) $0+1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$

が成り立つ.

定理 6 の直観的な別証



ウィーン大学，クルト・ゲーデル研究センター