# 数理の世界 (数学の考え方)
# — ゲーデルの不完全性定理

## 不完全性定理と数学，数学と証明， (第 III 回の講義)

Sakaé Fuchino (渕野 昌)

Dept. of Computer Sciences
Kobe University
(神戸大学大学院 システム情報学研究科)

http://kurt.scitec.kobe-u.ac.jp/~fuchino/

(22. Oktober 2012 (23:39 JST) version)

神戸大学 2012 年後期の講義
於 K302 教室， 月曜 8:50 – 10:20

October 22, 2012

This presentation is typeset by pLaTeX with beamer class.

# 数学と証明 (1/3)

- 数学の議論では，前提となる仮定 (公理) から出発して，ひとつひとつの数学的事実を (経験則や類推ではなく，論理的な推論を用いた) 証明によって確立してゆくことで理論を組み立ててゆく．
- 式の計算も証明の特別な形だが，数学の証明のごく一部をカバーしているだけである．
- 証明によって論理的に組み立ててゆくスタイルの数学は，ギリシャで紀元前 7 世紀ごろには始っていた．ユークリッドによる，当時の数学の体系化がなされたのは，紀元前 3 世紀ごろである．
- 一方，日本では，19 世紀後半 (明治時代初期) に，ギリシャでの数学を継承して発展してきたヨーロッパの数学を受け入れるまで，そのような意味での数学は存在しなかった．
  - 計算を主体とした「和算」と呼ばれる独自の数学が発展していて，これがヨーロッパの数学を受け入れるためのベースになった．

# 数学と証明 (1/3)



- 数学の議論では，前提となる仮定 (公理) から出発して，ひとつひとつの数学的事実を (経験則や類推ではなく，論理的な推論を用いた) 証明によって確立してゆくことで理論を組み立ててゆく.
- 式の計算も証明の特別な形だが，数学の証明のごく一部をカバーしているだけである.
- 証明によって論理的に組み立ててゆくスタイルの数学は，ギリシャで紀元前 7 世紀ごろには始っていた．ユークリッドによる，当時の数学の体系化がなされたのは，紀元前 3 世紀ごろである.
- 一方，日本では，19 世紀後半 (明治時代初期) に，ギリシャでの数学を継承して発展してきたヨーロッパの数学を受け入れるまで，そのような意味での数学は存在しなかった.
  - 計算を主体とした「和算」と呼ばれる独自の数学が発展していて，これがヨーロッパの数学を受け入れるためのベースになった.

# 数学と証明 (1/3)



- 数学の議論では，前提となる仮定 (公理) から出発して，ひとつひとつの数学的事実を (経験則や類推ではなく，論理的な推論を用いた) 証明によって確立してゆくことで理論を組み立ててゆく．
- 式の計算も証明の特別な形だが，数学の証明のごく一部をカバーしているだけである．
- 証明によって論理的に組み立ててゆくスタイルの数学は，ギリシャで紀元前 7 世紀ごろには始っていた．ユークリッドによる，当時の数学の体系化がなされたのは，紀元前 3 世紀ごろである．
- 一方，日本では，19 世紀後半 (明治時代初期) に，ギリシャでの数学を継承して発展してきたヨーロッパの数学を受け入れるまで，そのような意味での数学は存在しなかった．
  - 計算を主体とした「和算」と呼ばれる独自の数学が発展していて，これがヨーロッパの数学を受け入れるためのベースになった．

# 数学と証明 (1/3)



- 数学の議論では，前提となる仮定 (公理) から出発して，ひとつひとつの数学的事実を (経験則や類推ではなく，論理的な推論を用いた) 証明によって確立してゆくことで理論を組み立ててゆく．
- 式の計算も証明の特別な形だが，数学の証明のごく一部をカバーしているだけである．
- 証明によって論理的に組み立ててゆくスタイルの数学は，ギリシャで紀元前 7 世紀ごろには始っていた．ユークリッドによる，当時の数学の体系化がなされたのは，紀元前 3 世紀ごろである．
- 一方，日本では，19 世紀後半 (明治時代初期) に，ギリシャでの数学を継承して発展してきたヨーロッパの数学を受け入れるまで，そのような意味での数学は存在しなかった．
  - 計算を主体とした「和算」と呼ばれる独自の数学が発展していて，これがヨーロッパの数学を受け入れるためのベースになった．

## 数学と証明 (1/3)



- 数学の議論では，前提となる仮定 (公理) から出発して，ひとつひとつの数学的事実を (経験則や類推ではなく，論理的な推論を用いた) 証明によって確立してゆくことで理論を組み立ててゆく．
- 式の計算も証明の特別な形だが，数学の証明のごく一部をカバーしているだけである．
- 証明によって論理的に組み立ててゆくスタイルの数学は，ギリシャで紀元前 7 世紀ごろには始っていた．ユークリッドによる，当時の数学の体系化がなされたのは，紀元前 3 世紀ごろである．
- 一方，日本では，19 世紀後半 (明治時代初期) に，ギリシャでの数学を継承して発展してきたヨーロッパの数学を受け入れるまで，そのような意味での数学は存在しなかった．
- 計算を主体とした「和算」と呼ばれる独自の数学が発展していて，これがヨーロッパの数学を受け入れるためのベースになった．

# 数学と証明 (1/3)



- 数学の議論では，前提となる仮定 (公理) から出発して，ひとつひとつの数学的事実を (経験則や類推ではなく，論理的な推論を用いた) 証明によって確立してゆくことで理論を組み立ててゆく.
- 式の計算も証明の特別な形だが，数学の証明のごく一部をカバーしているだけである.
- 証明によって論理的に組み立ててゆくスタイルの数学は，ギリシャで紀元前 7 世紀ごろには始っていた．ユークリッドによる，当時の数学の体系化がなされたのは，紀元前 3 世紀ごろである.
- 一方，日本では，19 世紀後半 (明治時代初期) に，ギリシャでの数学を継承して発展してきたヨーロッパの数学を受け入れるまで，そのような意味での数学は存在しなかった.
  - 計算を主体とした「和算」と呼ばれる独自の数学が発展していて，これがヨーロッパの数学を受け入れるためのベースになった.

# 数学と証明 (2/3)



- 数学的な証明とは何かを，厳密に規定できるようになったのは 20 世紀の 20 年代から 30 年代ごろである．

  ◦ ヒルベルト と彼の弟子たちの計画 (ヒルベルトのプログラム) での仕事や，ゲーデルによるの不完全性定理の 一つ前の仕事 により達成された．

- 数学的な証明とは何かを調べる研究の先駆者には,

  ◦ ライプニッツ (1646(寛永 23) 年 – 1716(享保元) 年),
  ◦ ブール (1815(文化 12) 年 – 1864(元治元) 年),
  ◦ フレーゲ (1848(嘉永 1) 年 – 1925(大正 14) 年)

  などがいる．

## 数学と証明 (2/3)



- 数学的な証明とは何かを，厳密に規定できるようになったのは 20 世紀の 20 年代から 30 年代ごろである．

  ◦ ヒルベルト と彼の弟子たちの計画 (ヒルベルトのプログラム) での仕事や，ゲーデルによるの不完全性定理の 一つ前の仕事 により達成された．

- 数学的な証明とは何かを調べる研究の先駆者には，

  ◦ ライプニッツ (1646(寛永 23) 年 – 1716(享保元) 年),

  ◦ ブール (1815(文化 12) 年 – 1864(元治元) 年),

  ◦ フレーゲ (1848(嘉永 1) 年 – 1925(大正 14) 年)

  などがいる．

# 数学と証明 (2/3)



- 数学的な証明とは何かを，厳密に規定できるようになったのは 20 世紀の 20 年代から 30 年代ごろである.

  ◦ ヒルベルト と彼の弟子たちの計画 (ヒルベルトのプログラム) での仕事や，ゲーデルによるの不完全性定理の 一つ前の仕事 により達成された.

- 数学的な証明とは何かを調べる研究の先駆者には,

  ◦ ライプニッツ (1646(寛永 23) 年 – 1716(享保元) 年),
  ◦ ブール (1815(文化 12) 年 – 1864(元治元) 年),
  ◦ フレーゲ (1848(嘉永 1) 年 – 1925(大正 14) 年)

  などがいる.

# 数学と証明 (2/3)



- 数学的な証明とは何かを，厳密に規定できるようになったのは 20 世紀の 20 年代から 30 年代ごろである．

  ◦ ヒルベルト と彼の弟子たちの計画 (ヒルベルトのプログラム) での仕事や，ゲーデルによるの不完全性定理の 一つ前の仕事 により達成された．

- 数学的な証明とは何かを調べる研究の先駆者には，

  ◦ ライプニッツ (1646(寛永 23) 年 – 1716(享保元) 年),
  ◦ ブール (1815(文化 12) 年 – 1864(元治元) 年),
  ◦ フレーゲ (1848(嘉永 1) 年 – 1925(大正 14) 年)

  などがいる．

# 数学と証明 (2/3)



- 数学的な証明とは何かを，厳密に規定できるようになったのは 20 世紀の 20 年代から 30 年代ごろである．

  ∘ ヒルベルト と彼の弟子たちの計画 (ヒルベルトのプログラム) での仕事や，ゲーデルによるの不完全性定理の 一つ前の仕事 により達成された．

- 数学的な証明とは何かを調べる研究の先駆者には，

  ∘ ライプニッツ (1646(寛永 23) 年 – 1716(享保元) 年),

  ∘ ブール (1815(文化 12) 年 – 1864(元治元) 年),

  ∘ フレーゲ (1848(嘉永 1) 年 – 1925(大正 14) 年)

  などがいる．

## 数学と証明 (3/3)



- 「証明」と言ったときにも，(a) 数学の定理を (人間が) 深く理解するための証明，(b) 数学の定理が論理的に正しいことを検証するための証明 (c) まだ正しいかどうか判っていない数学の予想を示してゆく (あるいは否定する) プロセスとしての証明，などの異る捉え方ができる．
- どの捉え方で考えたときにも「正しい証明」ということの厳密な判定は同じものになる．
- しかし， (a) や (c) の捉え方では，正しくないが雰囲気を伝えている証明や，直観に訴える証明など，厳密な証明にはなっていないかもしれないものも意味を持つことがなりえる．
- 不完全性定理の関連で問題となっているのは，主に (b) の捉え方の意味での証明である．

## 数学と証明 (3/3)

- 「証明」と言ったときにも，(a) 数学の定理を (人間が) 深く理解するための証明，(b) 数学の定理が論理的に正しいことを検証するための証明 (c) まだ正しいかどうか判っていない数学の予想を示してゆく (あるいは否定する) プロセスとしての証明，などの異なる捉え方ができる．
- どの捉え方で考えたときにも「正しい証明」ということの厳密な判定は同じものになる．
- しかし，(a) や (c) の捉え方では，正しくないが雰囲気を伝えている証明や，直観に訴える証明など，厳密な証明にはなっていないかもしれないものも意味を持つことがなりえる．
- 不完全性定理の関連で問題となっているのは，主に (b) の捉え方の意味での証明である．

## 数学と証明 (3/3)



- 「証明」と言ったときにも，(a) 数学の定理を (人間が) 深く理解するための証明，(b) 数学の定理が論理的に正しいことを検証するための証明 (c) まだ正しいかどうか判っていない数学の予想を示してゆく (あるいは否定する) プロセスとしての証明，などの異る捉え方ができる．
- どの捉え方で考えたときにも「正しい証明」ということの厳密な判定は同じものになる．
- しかし，(a) や (c) の捉え方では，正しくないが雰囲気を伝えている証明や，直観に訴える証明など，厳密な証明にはなっていないかもしれないものも意味を持つことがなりえる．
- 不完全性定理の関連で問題となっているのは，主に (b) の捉え方の意味での証明である．

# 数学と証明 (3/3)



- 「証明」と言ったときにも，(a) 数学の定理を (人間が) 深く理解するための証明，(b) 数学の定理が論理的に正しいことを検証するための証明 (c) まだ正しいかどうか判っていない数学の予想を示してゆく (あるいは否定する) プロセスとしての証明，などの異る捉え方ができる．
- どの捉え方で考えたときにも「正しい証明」ということの厳密な判定は同じものになる．
- しかし， (a) や (c) の捉え方では，正しくないが雰囲気を伝えている証明や，直観に訴える証明など，厳密な証明にはなっていないかもしれないものも意味を持つことがなりえる．
- 不完全性定理の関連で問題となっているのは，主に (b) の捉え方の意味での証明である．

# 数学と証明 (3/3)



- 「証明」と言ったときにも，(a) 数学の定理を (人間が) 深く理解するための証明，(b) 数学の定理が論理的に正しいことを検証するための証明 (c) まだ正しいかどうか判っていない数学の予想を示してゆく (あるいは否定する) プロセスとしての証明，などの異る捉え方ができる．
- どの捉え方で考えたときにも「正しい証明」ということの厳密な判定は同じものになる．
- しかし，(a) や (c) の捉え方では，正しくないが雰囲気を伝えている証明や，直観に訴える証明など，厳密な証明にはなっていないかもしれないものも意味を持つことがなりえる．
- 不完全性定理の関連で問題となっているのは，主に (b) の捉え方の意味での証明である．

# 数学での証明の例 (1)



▷ 簡単な証明の例をいくつか見てみることにする:

**定理 3.** (ピタゴラスの定理) 任意の直角三角形の斜辺の長さの二乗は他の 2 辺のそれぞれの長さの二乗の和に等しい.

ピタゴラスの定理の証明

▶ 幾何学的な証明は, (a) 直観的な理解や (c) 発見的証明の観点からは, 評価できるが, 証明の正しさの吟味や, 証明で使われている前提 (公理) の分析, という観点からは, さらなる検証が必要になるものになっていることもある.

▶ デデキント(1831(天保 2) 年 – 1916(大正 5) 年) はこのことについて注意をうながした最初の人の 1 人である:

o デーデキント, 『数について – 連続性と数の本質 –』, 河野伊三郎訳, 岩波書店 (岩波文庫), 1961 年.

o デデキント,『数とは何か何であるべきか』, 渕野 昌 訳・解説, ちくま学芸文庫, 近刊.

## 数学での証明の例 (1)



▷ 簡単な証明の例をいくつか見てみることにする:

**定理 3.** (ピタゴラスの定理) 任意の直角三角形の斜辺の長さの二乗は他の 2 辺のそれぞれの長さの二乗の和に等しい.

ピタゴラスの定理の証明

▶ 幾何学的な証明は, (a) 直観的な理解や (c) 発見的証明の観点からは, 評価できるが, 証明の正しさの吟味や, 証明で使われている前提 (公理) の分析, という観点からは, さらなる検証が必要になるものになっていることもある.

▶ デデキント(1831(天保 2) 年 – 1916(大正 5) 年) はこのことについて注意をうながした最初の人の 1 人である:

o デーデキント, 『数について – 連続性と数の本質 –』, 河野伊三郎訳, 岩波書店 (岩波文庫), 1961 年.

o デデキント,『数とは何か何であるべきか』, 渕野 昌 訳・解説, ちくま学芸文庫, 近刊.

# 数学での証明の例 (1)

▷ 簡単な証明の例をいくつか見てみることにする:

**定理 3.** (ピタゴラスの定理) 任意の直角三角形の斜辺の長さの二乗は他の2辺のそれぞれの長さの二乗の和に等しい.

ピタゴラスの定理の証明

▶ 幾何学的な証明は, (a) 直観的な理解や (c) 発見的証明の観点からは, 評価できるが, 証明の正しさの吟味や, 証明で使われている前提 (公理) の分析, という観点からは, さらなる検証が必要になるものになっていることもある.

▶ デデキント(1831(天保 2) 年 – 1916(大正 5) 年) はこのことについて注意をうながした最初の人の1人である:

o デーデキント, 『数について – 連続性と数の本質 –』, 河野伊三郎訳, 岩波書店 (岩波文庫), 1961 年.

o デデキント,『数とは何か何であるべきか』, 渕野 昌 訳・解説, ちくま学芸文庫, 近刊.

# 数学での証明の例 (1)



▷ 簡単な証明の例をいくつか見てみることにする:

**定理 3.** (ピタゴラスの定理) 任意の直角三角形の斜辺の長さの二乗は他の 2 辺のそれぞれの長さの二乗の和に等しい.

ピタゴラスの定理の証明

▶ 幾何学的な証明は, (a) 直観的な理解や (c) 発見的証明の観点からは, 評価できるが, 証明の正しさの吟味や, 証明で使われている前提 (公理) の分析, という観点からは, さらなる検証が必要になるものになっていることもある.

▶ デデキント(1831(天保 2) 年 – 1916(大正 5) 年) はこのことについて注意をうながした最初の人の 1 人である:

o デーデキント, 『数について – 連続性と数の本質 –』, 河野伊三郎訳, 岩波書店 (岩波文庫), 1961 年.

o デデキント,『数とは何か何であるべきか』, 渕野 昌 訳・解説, ちくま学芸文庫, 近刊.

# 数学での証明の例 (1)



▷ 簡単な証明の例をいくつか見てみることにする:

**定理 3.** (ピタゴラスの定理) 任意の直角三角形の斜辺の長さの二乗は他の 2 辺のそれぞれの長さの二乗の和に等しい.

ピタゴラスの定理の証明

▶ 幾何学的な証明は, (a) 直観的な理解や (c) 発見的証明の観点からは, 評価できるが, 証明の正しさの吟味や, 証明で使われている前提 (公理) の分析, という観点からは, さらなる検証が必要になるものになっていることもある.

▶ デデキント(1831(天保 2) 年 – 1916(大正 5) 年) はこのことについて注意をうながした最初の人の 1 人である:

o デーデキント, 『数について – 連続性と数の本質 –』, 河野伊三郎訳, 岩波書店 (岩波文庫), 1961 年.

o デデキント,『数とは何か何であるべきか』, 渕野 昌 訳・解説, ちくま学芸文庫, 近刊.

# 数学での証明の例 (1)



▷ 簡単な証明の例をいくつか見てみることにする:

**定理 3.** (ピタゴラスの定理) 任意の直角三角形の斜辺の長さの二乗は他の 2 辺のそれぞれの長さの二乗の和に等しい.

ピタゴラスの定理の証明

- 幾何学的な証明は, (a) 直観的な理解や (c) 発見的証明の観点からは, 評価できるが, 証明の正しさの吟味や, 証明で使われている前提 (公理) の分析, という観点からは, さらなる検証が必要になるものになっていることもある.
- デデキント(1831(天保 2) 年 – 1916(大正 5) 年) はこのことについて注意をうながした最初の人の 1 人である:

∘ デーデキント, 『数について – 連続性と数の本質 –』, 河野伊三郎訳, 岩波書店 (岩波文庫), 1961 年.

∘ デデキント,『数とは何か何であるべきか』, 渕野 昌 訳・解説, ちくま学芸文庫, 近刊.

# 数学での証明の例 (1)



▷ 簡単な証明の例をいくつか見てみることにする:

> **定理 3.** (ピタゴラスの定理) 任意の直角三角形の斜辺の長さの二乗は他の 2 辺のそれぞれの長さの二乗の和に等しい.

ピタゴラスの定理の証明

▶ 幾何学的な証明は, (a) 直観的な理解や (c) 発見的証明の観点からは, 評価できるが, 証明の正しさの吟味や, 証明で使われている前提 (公理) の分析, という観点からは, さらなる検証が必要になるものになっていることもある.

▶ デデキント(1831(天保 2) 年 – 1916(大正 5) 年) はこのことについて注意をうながした最初の人の 1 人である:

o デーデキント, 『数について – 連続性と数の本質 –』, 河野伊三郎訳, 岩波書店 (岩波文庫), 1961 年.

o デデキント,『数とは何か何であるべきか』, 渕野 昌 訳・解説, ちくま学芸文庫, 近刊.

## 数学での証明の例 (2)



**定理 4.** (Hippasusu 紀元前 6 世紀ごろ) $\sqrt{2}$ は有理数ではない.

- 有理数 とは, 分母, 分子を整数とするような分数として表せる数のことである.
- $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, -\frac{7}{4} = \left(\frac{-7}{4}\right), \frac{56}{73}$ などは有理数である.
- 整数 $\cdots, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \cdots$ も, それぞれ $\cdots, \frac{-2}{1}, \frac{-1}{1}, \frac{0}{1}, \frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{3}{1}, \cdots$ とあらわせるので, 有理数である.
- すべての有理数は 循環小数 としてあらわせる. たとえば, $\frac{2}{3} = 0.6666\cdots = 0.\dot{6}$, $\frac{56}{73} = 0.7671232876712328\cdots = 0.\dot{7}\dot{6}\dot{7}\dot{1}\dot{2}\dot{3}\dot{2}\dot{8}$ である. ただし, 有限長の分数表現は末尾に 0 が続いている循環小数とみなす. たとえば, 3.7 は $3.7000\cdots = 3.7\dot{0}$ と見ることで, 循環小数と考える. 逆にすべての循環小数は有理数である.

# 数学での証明の例 (2)

**定理 4.** (Hippasusu 紀元前 6 世紀ごろ) $\sqrt{2}$ は有理数ではない.

- 有理数 とは，分母，分子を整数とするような分数として表せる数のことである.
- $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $-\frac{7}{4} = \left(\frac{-7}{4}\right)$, $\frac{56}{73}$ などは有理数である.
- 整数 $\cdots, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \cdots$ も，それぞれ $\cdots, \frac{-2}{1}, \frac{-1}{1}, \frac{0}{1}, \frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{3}{1}, \cdots$ とあらわせるので，有理数である.
- すべての有理数は 循環小数 としてあらわせる．たとえば，$\frac{2}{3} = 0.6666\cdots = 0.\dot{6}$, $\frac{56}{73} = 0.7671232876712328\cdots = 0.\dot{7}\dot{6}\dot{7}\dot{1}\dot{2}\dot{3}\dot{2}\dot{8}$ である．ただし，有限長の分数表現は末尾に $0$ が続いている循環小数とみなす．たとえば，$3.7$ は $3.7000\cdots = 3.7\dot{0}$ と見ることで，循環小数と考える．逆にすべての循環小数は有理数である.

# 数学での証明の例 (2)

**定理 4.** (Hippasusu 紀元前 6 世紀ごろ) $\sqrt{2}$ は有理数ではない.

- 有理数 とは，分母，分子を整数とするような分数として表せる数のことである.
- $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, -\frac{7}{4} = \left(\frac{-7}{4}\right), \frac{56}{73}$ などは有理数である.
- 整数 $\cdots, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \cdots$ も，それぞれ $\cdots, \frac{-2}{1}, \frac{-1}{1}, \frac{0}{1}, \frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{3}{1}, \cdots$ とあらわせるので，有理数である.
- すべての有理数は 循環小数 としてあらわせる．たとえば，$\frac{2}{3} = 0.6666\cdots = 0.\dot{6}$, $\frac{56}{73} = 0.767123287671232 8\cdots = 0.\dot{7}671232\dot{8}$ である．ただし，有限長の分数表現は末尾に 0 が続いている循環小数とみなす．たとえば，3.7 は $3.7000\cdots = 3.7\dot{0}$ と見ることで，循環小数と考える．逆にすべての循環小数は有理数である.

# 数学での証明の例 (2)



**定理 4.** (Hippasusu 紀元前 6 世紀ごろ) $\sqrt{2}$ は有理数ではない.

- 有理数 とは，分母，分子を整数とするような分数として表せる数のことである.
- $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, -\frac{7}{4} = \left(\frac{-7}{4}\right), \frac{56}{73}$ などは有理数である.
- 整数 $\cdots, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \cdots$ も，それぞれ $\cdots, \frac{-2}{1}, \frac{-1}{1}, \frac{0}{1}, \frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{3}{1}, \cdots$ とあらわせるので，有理数である.
- すべての有理数は 循環小数 としてあらわせる．たとえば，$\frac{2}{3} = 0.6666\cdots = 0.\dot{6}$, $\frac{56}{73} = 0.76712328767 12328\cdots = 0.\dot{7}671232\dot{8}$ である．ただし，有限長の分数表現は末尾に $0$ が続いている循環小数とみなす．たとえば，$3.7$ は $3.7000\cdots = 3.7\dot{0}$ と見ることで，循環小数と考える．逆にすべての循環小数は有理数である.

# 数学での証明の例 (2)



**定理 4.** (Hippasusu 紀元前 6 世紀ごろ) $\sqrt{2}$ は有理数ではない.

- 有理数 とは，分母，分子を整数とするような分数として表せる数のことである.
- $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, -\frac{7}{4} = \left(\frac{-7}{4}\right), \frac{56}{73}$ などは有理数である.
- 整数 $\cdots, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \cdots$ も，それぞれ $\cdots, \frac{-2}{1}, \frac{-1}{1}, \frac{0}{1}, \frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{3}{1}, \cdots$ とあらわせるので，有理数である.
- すべての有理数は 循環小数 としてあらわせる．たとえば，$\frac{2}{3} = 0.6666\cdots = 0.\dot{6}$, $\frac{56}{73} = 0.7671232876712328\cdots = 0.\dot{7}67123\dot{2}8$ である．ただし，有限長の分数表現は末尾に 0 が続いている循環小数とみなす．たとえば，3.7 は $3.7000\cdots = 3.7\dot{0}$ と見ることで，循環小数と考える．逆にすべての循環小数は有理数である.

# 数学での証明の例 (2)



**定理 4.** (Hippasusu 紀元前 6 世紀ごろ) $\sqrt{2}$ は有理数ではない.

- 有理数 とは，分母，分子を整数とするような分数として表せる数のことである.
- $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, -\frac{7}{4} = \left(\frac{-7}{4}\right), \frac{56}{73}$ などは有理数である.
- 整数 $\cdots, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \cdots$ も，それぞれ $\cdots, \frac{-2}{1}, \frac{-1}{1}, \frac{0}{1}, \frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{3}{1}, \cdots$ とあらわせるので，有理数である.
- すべての有理数は 循環小数 としてあらわせる．たとえば，$\frac{2}{3} = 0.6666\cdots = 0.\dot{6}$, $\frac{56}{73} = 0.767123287671232 8\cdots = 0.\dot{7}671232\dot{8}$ である．ただし，有限長の分数表現は末尾に 0 が続いている循環小数とみなす．たとえば，3.7 は $3.7000\cdots = 3.7\dot{0}$ と見ることで，循環小数と考える．逆にすべての循環小数は有理数である.

# 数学での証明の例 (2)



**定理 4.** (Hippasusu 紀元前 6 世紀ごろ) $\sqrt{2}$ は有理数ではない.

- 有理数 とは，分母，分子を整数とするような分数として表せる数のことである.
- $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, -\frac{7}{4} = \left(\frac{-7}{4}\right), \frac{56}{73}$ などは有理数である.
- 整数 $\cdots, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \cdots$ も，それぞれ $\cdots, \frac{-2}{1}, \frac{-1}{1}, \frac{0}{1}, \frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{3}{1}, \cdots$ とあらわせるので，有理数である.
- すべての有理数は 循環小数 としてあらわせる．たとえば，
  $\frac{2}{3} = 0.6666\cdots = 0.\dot{6}$, $\frac{56}{73} = 0.767123287671232 8\cdots = 0.\dot{7}\dot{6}\dot{7}\dot{1}\dot{2}\dot{3}\dot{2}\dot{8}$
  である．ただし，有限長の分数表現は末尾に $0$ が続いている循環小数とみなす．たとえば，$3.7$ は $3.7000\cdots = 3.7\dot{0}$ と見ることで，循環小数と考える．逆にすべての循環小数は有理数である.

## 数学での証明の例 (2)



**定理 4.** (Hippasusu 紀元前 6 世紀ごろ) $\sqrt{2}$ は有理数ではない.

- 有理数 とは，分母，分子を整数とするような分数として表せる数のことである.
- $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, -\frac{7}{4} = \left(\frac{-7}{4}\right), \frac{56}{73}$ などは有理数である.
- 整数 $\cdots, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \cdots$ も，それぞれ $\cdots, \frac{-2}{1}, \frac{-1}{1}, \frac{0}{1}, \frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{3}{1}, \cdots$ とあらわせるので，有理数である.
- すべての有理数は 循環小数 としてあらわせる．たとえば，$\frac{2}{3} = 0.6666\cdots = 0.\dot{6}$, $\frac{56}{73} = 0.7671232876712328\cdots = 0.\dot{7}\dot{6}\dot{7}\dot{1}\dot{2}\dot{3}\dot{2}\dot{8}$ である．ただし，有限長の分数表現は末尾に $0$ が続いている循環小数とみなす．たとえば，$3.7$ は $3.7000\cdots = 3.7\dot{0}$ と見ることで，循環小数と考える．逆にすべての循環小数は有理数である.

# 数学での証明の例 (2)



**定理 4.** (Hippasusu 紀元前 6 世紀ごろ) $\sqrt{2}$ は有理数ではない.

証明. 背理法 による. $\sqrt{2}$ が有理数だったと仮定して, 矛盾を示す. $\sqrt{2}$ が有理数なら,

(1) $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$

となるような正の整数 $m, n$ がとれる. ただし, 分数表現 $\frac{m}{n}$ はこれ以上約分できないようにとるものとする. (1) の両辺を二乗して, 移項すると,

(2) $2n^2 = m^2$

となるから, $m^2$ は 2 の倍数 (つまり偶数) である. このことから $m$ も 2 の倍数であることがわかる. したがって, 整数 $m'$ で $m = 2m'$ となるものがとれる. これを (2) に代入して整理すると

(3) $n^2 = 2m'^2$

となるから, 上と同様の議論で, $n$ も 2 の倍数であることがわかる. したがって, 分数表現 $\frac{m}{n}$ は 2 で約分できるが, これは, 最初の仮定に矛盾である. □

# 数学での証明の例 (2)

**定理 4.** (Hippasusu 紀元前 6 世紀ごろ) $\sqrt{2}$ は有理数ではない.

証明. 背理法 による. $\sqrt{2}$ が有理数だったと仮定して, 矛盾を示す. $\sqrt{2}$ が有理数なら,

(1) $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$

となるような正の整数 $m, n$ がとれる. ただし, 分数表現 $\frac{m}{n}$ はこれ以上約分できないようにとるものとする. (1) の両辺を二乗して, 移項すると,

(2) $2n^2 = m^2$

となるから, $m^2$ は 2 の倍数（つまり偶数）である. このことから $m$ も 2 の倍数であることがわかる. したがって, 整数 $m'$ で $m = 2m'$ となるものがとれる. これを (2) に代入して整理すると

(3) $n^2 = 2m'^2$

となるから, 上と同様の議論で, $n$ も 2 の倍数であることがわかる. したがって, 分数表現 $\frac{m}{n}$ は 2 で約分できるが, これは, 最初の仮定に矛盾である. □

# 数学での証明の例 (2)



**定理 4.** (Hippasusu 紀元前 6 世紀ごろ) $\sqrt{2}$ は有理数ではない.

証明. 背理法 による. $\sqrt{2}$ が有理数だったと仮定して，矛盾を示す. $\sqrt{2}$ が有理数なら,

(1) $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$

となるような正の整数 $m$, $n$ がとれる. ただし，分数表現 $\frac{m}{n}$ はこれ以上約分できないようにとるものとする. (1) の両辺を二乗して，移項すると,

(2) $2n^2 = m^2$

となるから，$m^2$ は 2 の倍数（つまり偶数）である. このことから $m$ も 2 の倍数であることがわかる. したがって，整数 $m'$ で $m = 2m'$ となるものがとれる. これを (2) に代入して整理すると

(3) $n^2 = 2m'^2$

となるから，上と同様の議論で，$n$ も 2 の倍数であることがわかる. したがって，分数表現 $\frac{m}{n}$ は 2 で約分できるが，これは，最初の仮定に矛盾である. □

# 数学での証明の例 (2)

**定理 4.** (Hippasusu 紀元前 6 世紀ごろ) $\sqrt{2}$ は有理数ではない.

証明. 背理法 による. $\sqrt{2}$ が有理数だったと仮定して, 矛盾を示す. $\sqrt{2}$ が有理数なら,

(1) $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$

となるような正の整数 $m, n$ がとれる. ただし, 分数表現 $\frac{m}{n}$ はこれ以上約分できないようにとるものとする. (1) の両辺を二乗して, 移項すると,

(2) $2n^2 = m^2$

となるから, $m^2$ は 2 の倍数 (つまり偶数) である. このことから $m$ も 2 の倍数であることがわかる. したがって, 整数 $m'$ で $m = 2m'$ となるものがとれる. これを (2) に代入して整理すると

(3) $n^2 = 2m'^2$

となるから, 上と同様の議論で, $n$ も 2 の倍数であることがわかる. したがって, 分数表現 $\frac{m}{n}$ は 2 で約分できるが, これは, 最初の仮定に矛盾である. □

# 数学での証明の例 (2)



**定理 4.** (Hippasusu 紀元前 6 世紀ごろ) $\sqrt{2}$ は有理数ではない.

証明. 背理法 による. $\sqrt{2}$ が有理数だったと仮定して, 矛盾を示す. $\sqrt{2}$ が有理数なら,

(1) $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$

となるような正の整数 $m$, $n$ がとれる. ただし, 分数表現 $\frac{m}{n}$ はこれ以上約分できないようにとるものとする. (1) の両辺を二乗して, 移項すると,

(2) $2n^2 = m^2$

となるから, $m^2$ は 2 の倍数（つまり偶数）である. このことから $m$ も 2 の倍数であることがわかる. したがって, 整数 $m'$ で $m = 2m'$ となるものがとれる. これを (2) に代入して整理すると

(3) $n^2 = 2m'^2$

となるから, 上と同様の議論で, $n$ も 2 の倍数であることがわかる. したがって, 分数表現 $\frac{m}{n}$ は 2 で約分できるが, これは, 最初の仮定に矛盾である. □

# 数学での証明の例 (2)



**定理 4.** (Hippasusu 紀元前 6 世紀ごろ) $\sqrt{2}$ は有理数ではない.

証明. 背理法 による. $\sqrt{2}$ が有理数だったと仮定して，矛盾を示す. $\sqrt{2}$ が有理数なら，

(1) $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$

となるような正の整数 $m$, $n$ がとれる. ただし，分数表現 $\frac{m}{n}$ はこれ以上約分できないようにとるものとする. (1) の両辺を二乗して，移項すると，

(2) $2n^2 = m^2$

となるから，$m^2$ は 2 の倍数（つまり偶数）である. このことから $m$ も 2 の倍数であることがわかる. したがって，整数 $m'$ で $m = 2m'$ となるものがとれる. これを (2) に代入して整理すると

(3) $n^2 = 2m'^2$

となるから，上と同様の議論で，$n$ も 2 の倍数であることがわかる. したがって，分数表現 $\frac{m}{n}$ は 2 で約分できるが，これは，最初の仮定に矛盾である. □

# 数学での証明の例 (2)

**定理 4.** (Hippasusu 紀元前 6 世紀ごろ) $\sqrt{2}$ は有理数ではない.

証明. 背理法 による. $\sqrt{2}$ が有理数だったと仮定して, 矛盾を示す. $\sqrt{2}$ が有理数なら,

(1) $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$

となるような正の整数 $m, n$ がとれる. ただし, 分数表現 $\frac{m}{n}$ はこれ以上約分できないようにとるものとする. (1) の両辺を二乗して, 移項すると,

(2) $2n^2 = m^2$

となるから, $m^2$ は $2$ の倍数（つまり偶数）である. このことから $m$ も $2$ の倍数であることがわかる. したがって, 整数 $m'$ で $m = 2m'$ となるものがとれる. これを (2) に代入して整理すると

(3) $n^2 = 2m'^2$

となるから, 上と同様の議論で, $n$ も $2$ の倍数であることがわかる. したがって, 分数表現 $\frac{m}{n}$ は $2$ で約分できるが, これは, 最初の仮定に矛盾である. □

# 数学での証明の例 (2)

**定理 4.** (Hippasusu 紀元前 6 世紀ごろ) $\sqrt{2}$ は有理数ではない.

証明. 背理法による. $\sqrt{2}$ が有理数だったと仮定して, 矛盾を示す. $\sqrt{2}$ が有理数なら,

(1) $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$

となるような正の整数 $m$, $n$ がとれる. ただし, 分数表現 $\frac{m}{n}$ はこれ以上約分できないようにとるものとする. (1) の両辺を二乗して, 移項すると,

(2) $2n^2 = m^2$

となるから, $m^2$ は $2$ の倍数（つまり偶数）である. このことから $m$ も $2$ の倍数であることがわかる. したがって, 整数 $m'$ で $m = 2m'$ となるものがとれる. これを (2) に代入して整理すると

(3) $n^2 = 2m'^2$

となるから, 上と同様の議論で, $n$ も $2$ の倍数であることがわかる. したがって, 分数表現 $\frac{m}{n}$ は $2$ で約分できるが, これは, 最初の仮定に矛盾である. □

# 数学での証明の例 (3)



有理数でない実数を，無理数とよぶ．定理 4. は，

『$\sqrt{2}$ は無理数である』

と表現することもできる．

- 無理数 $a$, $b$ で $a+b$ が有理数になるようなものが存在する（例: $\sqrt{2}+(-\sqrt{2})=0$）．
- 無理数 $a$, $b$ で $ab$ が有理数になるようなものも存在する（例: $\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}=2$）．
- 無理数 $a$, $b$ で $a^b$ が有理数になるようなものは存在するだろうか？

**定理 5.** (Dov Jarden, 1953(昭和 28) 年) 無理数 $a$, $b$ で，$a^b$ が有理数になるようなものが存在する．

# 数学での証明の例 (3)



有理数でない実数を，無理数とよぶ．定理 4. は,

『$\sqrt{2}$ は無理数である』

と表現することもできる．

- 無理数 $a$, $b$ で $a+b$ が有理数になるようなものが存在する（例: $\sqrt{2}+(-\sqrt{2})=0$）．
- 無理数 $a$, $b$ で $ab$ が有理数になるようなものも存在する（例: $\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}=2$）．
- 無理数 $a$, $b$ で $a^b$ が有理数になるようなものは存在するだろうか？

**定理 5.** (Dov Jarden, 1953(昭和 28) 年) 無理数 $a$, $b$ で，$a^b$ が有理数になるようなものが存在する．

# 数学での証明の例 (3)



有理数でない実数を，無理数とよぶ．定理 4. は，

『$\sqrt{2}$ は無理数である』

と表現することもできる．

- 無理数 $a$, $b$ で $a+b$ が有理数になるようなものが存在する（例: $\sqrt{2}+(-\sqrt{2})=0$）.
- 無理数 $a$, $b$ で $ab$ が有理数になるようなものも存在する（例: $\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}=2$）.
- 無理数 $a$, $b$ で $a^b$ が有理数になるようなものは存在するだろうか？

**定理 5.** (Dov Jarden, 1953(昭和 28) 年) 無理数 $a$, $b$ で，$a^b$ が有理数になるようなものが存在する．

# 数学での証明の例 (3)

有理数でない実数を，無理数とよぶ．定理 4. は，

『$\sqrt{2}$ は無理数である』

と表現することもできる．

- 無理数 $a$, $b$ で $a+b$ が有理数になるようなものが存在する（例: $\sqrt{2}+(-\sqrt{2})=0$）．
- 無理数 $a$, $b$ で $ab$ が有理数になるようなものも存在する（例: $\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}=2$）．
- 無理数 $a$, $b$ で $a^b$ が有理数になるようなものは存在するだろうか？

**定理 5.** (Dov Jarden, 1953(昭和 28) 年) 無理数 $a$, $b$ で，$a^b$ が有理数になるようなものが存在する．

# 数学での証明の例 (3)

有理数でない実数を，無理数とよぶ．定理 4. は，

『$\sqrt{2}$ は無理数である』

と表現することもできる．

- 無理数 $a$, $b$ で $a+b$ が有理数になるようなものが存在する（例: $\sqrt{2}+(-\sqrt{2})=0$）．
- 無理数 $a$, $b$ で $ab$ が有理数になるようなものも存在する（例: $\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}=2$）．
- 無理数 $a$, $b$ で $a^b$ が有理数になるようなものは存在するだろうか？

**定理 5.** (Dov Jarden, 1953(昭和 28) 年) 無理数 $a$, $b$ で，$a^b$ が有理数になるようなものが存在する．

# 数学での証明の例 (3)



有理数でない実数を，無理数とよぶ．定理 4. は,

『$\sqrt{2}$ は無理数である』

と表現することもできる．

- 無理数 $a$, $b$ で $a+b$ が有理数になるようなものが存在する（例: $\sqrt{2}+(-\sqrt{2})=0$）．
- 無理数 $a$, $b$ で $ab$ が有理数になるようなものも存在する（例: $\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}=2$）．
- 無理数 $a$, $b$ で $a^b$ が有理数になるようなものは存在するだろうか？

**定理 5.** (Dov Jarden, 1953(昭和 28) 年) 無理数 $a$, $b$ で，$a^b$ が有理数になるようなものが存在する．

# 数学での証明の例 (3)

有理数でない実数を，無理数とよぶ．定理 4. は，

『$\sqrt{2}$ は無理数である』

と表現することもできる．

- 無理数 $a$, $b$ で $a+b$ が有理数になるようなものが存在する（例: $\sqrt{2}+(-\sqrt{2})=0$）．
- 無理数 $a$, $b$ で $ab$ が有理数になるようなものも存在する（例: $\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}=2$）．
- 無理数 $a$, $b$ で $a^b$ が有理数になるようなものは存在するだろうか？

**定理 5.** (Dov Jarden, 1953(昭和 28) 年) 無理数 $a$, $b$ で，$a^b$ が有理数になるようなものが存在する．

# 数学での証明の例 (3)

有理数でない実数を，無理数とよぶ．定理 4. は,

『$\sqrt{2}$ は無理数である』

と表現することもできる．

- 無理数 $a$, $b$ で $a+b$ が有理数になるようなものが存在する（例: $\sqrt{2}+(-\sqrt{2})=0$）．
- 無理数 $a$, $b$ で $ab$ が有理数になるようなものも存在する（例: $\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}=2$）．
- 無理数 $a$, $b$ で $a^b$ が有理数になるようなものは存在するだろうか？

**定理 5.** (Dov Jarden, 1953(昭和 28) 年) 無理数 $a$, $b$ で，$a^b$ が有理数になるようなものが存在する．

## 数学での証明の例 (3)



**定理 5.** (Dov Jarden, 1953 (昭和 28 年)) 無理数 $a$, $b$ で, $a^b$ が有理数になるようなものが存在する.

証明. 場合分けで証明する:

場合 1. $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ が有理数である場合: このときには, $a = \sqrt{2}$, $b = \sqrt{2}$ とすればよい.

場合 2. $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ が有理数でない（つまり無理数である）場合: このときには,

$$\left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}} = (\sqrt{2})^{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} = (\sqrt{2})^2 = 2$$

となる. したがって, $a = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}$, $b = \sqrt{2}$ とすればよい. □

# 数学での証明の例 (3)



**定理 5.** (Dov Jarden, 1953 (昭和 28 年)) 無理数 $a$, $b$ で，$a^b$ が有理数になるようなものが存在する.

証明. 場合分けで証明する:

場合 1. $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ が有理数である場合: このときには，$a = \sqrt{2}$, $b = \sqrt{2}$ とすればよい.

場合 2. $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ が有理数でない（つまり無理数である）場合: このときには,

$$\left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}} = (\sqrt{2})^{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} = (\sqrt{2})^2 = 2$$

となる．したがって，$a = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}$, $b = \sqrt{2}$ とすればよい. □

# 数学での証明の例 (3)



**定理 5.** (Dov Jarden, 1953 (昭和 28 年)) 無理数 $a$, $b$ で, $a^b$ が有理数になるようなものが存在する.

証明. 場合分けで証明する:

場合 1. $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ が有理数である場合: このときには, $a = \sqrt{2}$, $b = \sqrt{2}$ とすればよい.

場合 2. $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ が有理数でない（つまり無理数である）場合: このときには,

$$\left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}} = (\sqrt{2})^{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} = (\sqrt{2})^2 = 2$$

となる. したがって, $a = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}$, $b = \sqrt{2}$ とすればよい. □

# 数学での証明の例 (3)



**定理 5.** (Dov Jarden, 1953 (昭和 28 年)) 無理数 $a$, $b$ で, $a^b$ が有理数になるようなものが存在する.

証明. 場合分けで証明する:

場合 1. $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ が有理数である場合: このときには, $a=\sqrt{2}$, $b=\sqrt{2}$ とすればよい.

場合 2. $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ が有理数でない（つまり無理数である）場合: このときには,

$$\left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}} = (\sqrt{2})^{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} = (\sqrt{2})^2 = 2$$

となる. したがって, $a=\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$, $b=\sqrt{2}$ とすればよい. □

# 数学での証明の例 (3)

**定理 5.** (Dov Jarden, 1953 (昭和 28 年)) 無理数 $a$, $b$ で, $a^b$ が有理数になるようなものが存在する.

証明. 場合分けで証明する:

場合 1. $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ が有理数である場合: このときには, $a = \sqrt{2}$, $b = \sqrt{2}$ とすればよい.

場合 2. $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ が有理数でない（つまり無理数である）場合: このときには,

$$\left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}} = (\sqrt{2})^{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} = (\sqrt{2})^2 = 2$$

となる. したがって, $a = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}$, $b = \sqrt{2}$ とすればよい. □

# 数学での証明の例 (3)

**定理 5.** (Dov Jarden, 1953 (昭和 28 年)) 無理数 $a$, $b$ で，$a^b$ が有理数になるようなものが存在する．

証明. 場合分けで証明する:

場合 1. $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ が有理数である場合: このときには，$a = \sqrt{2}$, $b = \sqrt{2}$ とすればよい．

場合 2. $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ が有理数でない（つまり無理数である）場合: このときには,

$$\left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}} = (\sqrt{2})^{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} = (\sqrt{2})^2 = 2$$

となる．したがって，$a = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}$, $b = \sqrt{2}$ とすればよい． □

# 数学での証明の例 (4)



**定理 6.** すべての自然数 $n$ に対して,

(4) $0+1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$

が成り立つ.

注意：

$0+1+2+3+\cdots+n$ は, “0 から $n$ までの自然数を順に足したときの和” をあらわしている.

したがって, $n=0$ のときには, この和は $0$ である. また $n=1$ のときには, この和は $0+1=1$ である.

複数の項の和 (sum) をあらわすときに使う記号 $\sum$ を用いると, $0+1+2+3+\cdots+n$ は,

$$\textstyle\sum_{k=0}^{n} k \quad \text{または,} \quad \displaystyle\sum_{k=0}^{n} k$$

とあらわせる.

# 数学での証明の例 (4)



**定理 6.** すべての自然数 $n$ に対して,

(4) $0+1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$

が成り立つ.

注意：

$0+1+2+3+\cdots+n$ は, “0 から $n$ までの自然数を順に足したときの和” をあらわしている.

したがって, $n=0$ のときには, この和は 0 である. また $n=1$ のときには, この和は $0+1=1$ である.

複数の項の和 (sum) をあらわすときに使う記号 $\sum$ を用いると, $0+1+2+3+\cdots+n$ は,

$$\textstyle\sum_{k=0}^{n} k \quad \text{または,} \quad \displaystyle\sum_{k=0}^{n} k$$

とあらわせる.

# 数学での証明の例 (4)



**定理 6.** すべての自然数 $n$ に対して,

(4) $0+1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$

が成り立つ.

注意：

$0+1+2+3+\cdots+n$ は, "0 から $n$ までの自然数を順に足したときの和" をあらわしている.

したがって, $n=0$ のときには, この和は 0 である. また $n=1$ のときには, この和は $0+1=1$ である.

複数の項の和 (sum) をあらわすときに使う記号 $\sum$ を用いると, $0+1+2+3+\cdots+n$ は,

$$\textstyle\sum_{k=0}^{n} k \quad \text{または,} \quad \displaystyle\sum_{k=0}^{n} k$$

とあらわせる.

# 数学での証明の例 (4)

**定理 6.** すべての自然数 $n$ に対して,

(4) $0+1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$

が成り立つ.

注意：

$0+1+2+3+\cdots+n$ は, “0 から $n$ までの自然数を順に足したときの和” をあらわしている.

したがって, $n=0$ のときには, この和は 0 である. また $n=1$ のときには, この和は $0+1=1$ である.

複数の項の和 (sum) をあらわすときに使う記号 $\sum$ を用いると, $0+1+2+3+\cdots+n$ は,

$\sum_{k=0}^{n} k$ または, $$\sum_{k=0}^{n} k$$

とあらわせる.

# 数学での証明の例 (4)

**定理 6.** すべての自然数 $n$ に対して,

(4) $0+1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$

が成り立つ.

注意：

$0+1+2+3+\cdots+n$ は, “0 から $n$ までの自然数を順に足したときの和” をあらわしている.

したがって, $n=0$ のときには, この和は $0$ である. また $n=1$ のときには, この和は $0+1=1$ である.

複数の項の和 (sum) をあらわすときに使う記号 $\sum$ を用いると,
$0+1+2+3+\cdots+n$ は,

$\sum_{k=0}^{n} k$ または, $$\sum_{k=0}^{n} k$$

とあらわせる.

# 数学での証明の例 (4)



**定理 6.** すべての自然数 $n$ に対して,

(4) $0+1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$

が成り立つ.

注意：

$0+1+2+3+\cdots+n$ は, “0 から $n$ までの自然数を順に足したときの和” をあらわしている.

したがって, $n=0$ のときには, この和は $0$ である. また $n=1$ のときには, この和は $0+1=1$ である.

複数の項の和 (sum) をあらわすときに使う記号 $\sum$ を用いると, $0+1+2+3+\cdots+n$ は,

$\sum_{k=0}^{n} k$ または, $$\sum_{k=0}^{n} k$$

とあらわせる.

# 数学での証明の例 (4)



**定理 6.** すべての自然数 $n$ に対して,

(4) $0+1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$

が成り立つ.

証明. 数学的帰納法 で証明する.

帰納法の初め: $n$ が $0$ のときには, $0+1+2+3+\cdots+n$ も $\frac{n(n+1)}{2}$ も $0$ となるから等式 (4) は成り立つ.

帰納法のステップ: $n=k$ に対して, (4) が成り立ったと仮定して, $n=k+1$ のときにも成り立つことを示す. 仮定から, $0+1+2+3+\cdots+k=\frac{k(k+1)}{2}$ だから,

(5) $0+1+2+3+\cdots+k+(k+1)=\frac{k(k+1)}{2}+(k+1)$

である. (5) の右辺は,

$\frac{k(k+1)}{2}+(k+1)=\frac{k(k+1)+2(k+1)}{2}=\frac{k^2+3k+2}{2}=\frac{(k+1)(k+2)}{2}$
$=\frac{(k+1)((k+1)+1)}{2}$ となるから, (4) は $n=k+1$ に対しても成り立つことがわかる. □

# 数学での証明の例 (4)



**定理 6.** すべての自然数 $n$ に対して,

(4) $0+1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$

が成り立つ.

証明. 数学的帰納法 で証明する.

帰納法の初め: $n$ が 0 のときには, $0+1+2+3+\cdots+n$ も $\frac{n(n+1)}{2}$ も 0 となるから等式 (4) は成り立つ.

帰納法のステップ: $n=k$ に対して, (4) が成り立ったと仮定して, $n=k+1$ のときにも成り立つことを示す. 仮定から, $0+1+2+3+\cdots+k=\frac{k(k+1)}{2}$ だから,

(5) $0+1+2+3+\cdots+k+(k+1)=\frac{k(k+1)}{2}+(k+1)$

である. (5) の右辺は,

$\frac{k(k+1)}{2}+(k+1)=\frac{k(k+1)+2(k+1)}{2}=\frac{k^2+3k+2}{2}=\frac{(k+1)(k+2)}{2}$

$=\frac{(k+1)((k+1)+1)}{2}$ となるから, (4) は $n=k+1$ に対しても成り立つことがわかる. □

# 数学での証明の例 (4)



**定理 6.** すべての自然数 $n$ に対して,

(4) $0+1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$

が成り立つ.

証明. 数学的帰納法 で証明する.

帰納法の初め: $n$ が $0$ のときには, $0+1+2+3+\cdots+n$ も $\frac{n(n+1)}{2}$ も $0$ となるから等式 (4) は成り立つ.

帰納法のステップ: $n=k$ に対して, (4) が成り立ったと仮定して, $n=k+1$ のときにも成り立つことを示す. 仮定から, $0+1+2+3+\cdots+k=\frac{k(k+1)}{2}$ だから,

(5) $0+1+2+3+\cdots+k+(k+1)=\frac{k(k+1)}{2}+(k+1)$

である. (5) の右辺は,

$\frac{k(k+1)}{2}+(k+1)=\frac{k(k+1)+2(k+1)}{2}=\frac{k^2+3k+2}{2}=\frac{(k+1)(k+2)}{2}$

$=\frac{(k+1)((k+1)+1)}{2}$ となるから, (4) は $n=k+1$ に対しても成り立つことがわかる. □

# 数学での証明の例 (4)



**定理 6.** すべての自然数 $n$ に対して,

(4) $0+1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$

が成り立つ.

証明. 数学的帰納法 で証明する.
帰納法の初め: $n$ が $0$ のときには, $0+1+2+3+\cdots+n$ も $\frac{n(n+1)}{2}$ も $0$ となるから等式 (4) は成り立つ.
帰納法のステップ: $n=k$ に対して, (4) が成り立ったと仮定して, $n=k+1$ のときにも成り立つことを示す. 仮定から, $0+1+2+3+\cdots+k=\frac{k(k+1)}{2}$ だから,

(5) $0+1+2+3+\cdots+k+(k+1)=\frac{k(k+1)}{2}+(k+1)$

である. (5) の右辺は,
$\frac{k(k+1)}{2}+(k+1)=\frac{k(k+1)+2(k+1)}{2}=\frac{k^2+3k+2}{2}=\frac{(k+1)(k+2)}{2}$
$=\frac{(k+1)((k+1)+1)}{2}$ となるから, (4) は $n=k+1$ に対しても成り立つことがわかる. □

# 数学での証明の例 (4)



**定理 6.** すべての自然数 $n$ に対して,

(4) $0+1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$

が成り立つ.

証明. 数学的帰納法 で証明する.
帰納法の初め: $n$ が $0$ のときには, $0+1+2+3+\cdots+n$ も $\frac{n(n+1)}{2}$ も $0$ となるから等式 (4) は成り立つ.
帰納法のステップ: $n=k$ に対して, (4) が成り立ったと仮定して, $n=k+1$ のときにも成り立つことを示す. 仮定から, $0+1+2+3+\cdots+k=\frac{k(k+1)}{2}$ だから,

(5) $0+1+2+3+\cdots+k+(k+1)=\frac{k(k+1)}{2}+(k+1)$

である. (5) の右辺は,
$\frac{k(k+1)}{2}+(k+1)=\frac{k(k+1)+2(k+1)}{2}=\frac{k^2+3k+2}{2}=\frac{(k+1)(k+2)}{2}$
$=\frac{(k+1)((k+1)+1)}{2}$ となるから, (4) は $n=k+1$ に対しても成り立つことがわかる. □

# 数学での証明の例 (4)

**定理 6.** すべての自然数 $n$ に対して,

(4) $0+1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$

が成り立つ.

証明. 数学的帰納法 で証明する.

帰納法の初め: $n$ が $0$ のときには, $0+1+2+3+\cdots+n$ も $\frac{n(n+1)}{2}$ も $0$ となるから等式 (4) は成り立つ.

帰納法のステップ: $n=k$ に対して, (4) が成り立ったと仮定して, $n=k+1$ のときにも成り立つことを示す. 仮定から,

$0+1+2+3+\cdots+k=\frac{k(k+1)}{2}$ だから,

(5) $0+1+2+3+\cdots+k+(k+1)=\frac{k(k+1)}{2}+(k+1)$

である. (5) の右辺は,

$\frac{k(k+1)}{2}+(k+1)=\frac{k(k+1)+2(k+1)}{2}=\frac{k^2+3k+2}{2}=\frac{(k+1)(k+2)}{2}$

$=\frac{(k+1)((k+1)+1)}{2}$ となるから, (4) は $n=k+1$ に対しても成り立つことがわかる. □

# 数学での証明の例 (4)



**定理 6.** すべての自然数 $n$ に対して,

(4) $0+1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$

が成り立つ.

証明. 数学的帰納法 で証明する.
帰納法の初め: $n$ が $0$ のときには, $0+1+2+3+\cdots+n$ も $\frac{n(n+1)}{2}$ も $0$ となるから等式 (4) は成り立つ.
帰納法のステップ: $n=k$ に対して, (4) が成り立ったと仮定して, $n=k+1$ のときにも成り立つことを示す. 仮定から,
$0+1+2+3+\cdots+k=\frac{k(k+1)}{2}$ だから,

(5) $0+1+2+3+\cdots+k+(k+1)=\frac{k(k+1)}{2}+(k+1)$

である. (5) の右辺は,
$\frac{k(k+1)}{2}+(k+1)=\frac{k(k+1)+2(k+1)}{2}=\frac{k^2+3k+2}{2}=\frac{(k+1)(k+2)}{2}$
$=\frac{(k+1)((k+1)+1)}{2}$ となるから, (4) は $n=k+1$ に対しても成り立つことがわかる. $\square$

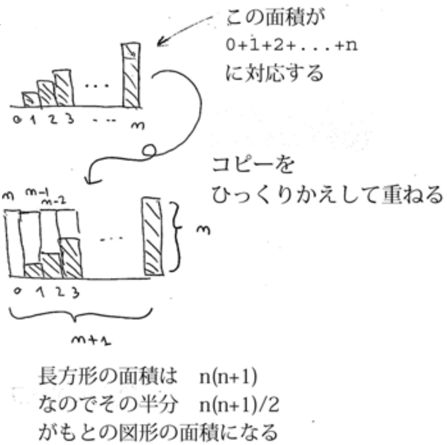
# 数学での証明の例 (4)

**定理 6.** すべての自然数 $n$ に対して,

(4) $0+1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$

が成り立つ.

定理 6 の直観的な別証



# ウィーン大学，クルト・ゲーデル研究センター