数理の世界 (数学の考え方)
— ゲーデルの不完全性定理

公理と証明，(第 IV 回の講義)

Sakaé Fuchino (渕野 昌)

Dept. of Computer Sciences
Kobe University
(神戸大学大学院 システム情報学研究科)

http://kurt.scitec.kobe-u.ac.jp/~fuchino/

(5. November 2012 (00:04 JST) version)

神戸大学 2012 年後期の講義
於 K302 教室，月曜 8:50 – 10:20

October 29, 2012

This presentation is typeset by pLATEX with beamer class.

前回のリアクションペーパーでのコメントの一つに対する答

「$\sqrt{2}$ が無理数である」ことの証明と同じ証明で「2 が無理数である」ことも証明できてしまうのではないでしょうか?

- 同様の証明は成り立たないことが示せる.
- 次の同値が成り立つことが証明できる:

すべての自然数 k に対し,
$\sqrt{k}$ は無理数である $\Leftrightarrow$ $\sqrt{k} = \ell$ (つまり $\ell^2 = k$) となる自然数 ℓ が存在しない.

証明. $\sqrt{k} = \ell$ となる自然数 ℓ が存在するなら, $\sqrt{k}$ は明らかに有理数である.

- $\sqrt{k} = \ell$ となる自然数が存在しないと仮定して, $\sqrt{k}$ が無理数であることを示す.

前回のリアクションペーパーでのコメントの一つに対する答

「$\sqrt{2}$ が無理数である」ことの証明と同じ証明で「2 が無理数である」ことも証明できてしまうのではないでしょうか?

- 同様の証明は成り立たないことが示せる.
- 次の同値が成り立つことが証明できる:

すべての自然数 k に対し,

$\sqrt{k}$ は無理数である $\Leftrightarrow$ $\sqrt{k} = \ell$ (つまり $\ell^2 = k$) となる自然数 ℓ が存在しない.

証明. $\sqrt{k} = \ell$ となる自然数 ℓ が存在するなら, $\sqrt{k}$ は明らかに有理数である.

- $\sqrt{k} = \ell$ となる自然数が存在しないと仮定して, $\sqrt{k}$ が無理数であることを示す.

前回のリアクションペーパーでのコメントの一つに対する答

「$\sqrt{2}$ が無理数である」ことの証明と同じ証明で「2 が無理数である」ことも証明できてしまうのではないでしょうか?

- 同様の証明は成り立たないことが示せる.
- 次の同値が成り立つことが証明できる:

すべての自然数 k に対し,
$\sqrt{k}$ は無理数である $\iff$ $\sqrt{k} = \ell$ (つまり $\ell^2 = k$) となる自然数 ℓ が存在しない.

証明. $\sqrt{k} = \ell$ となる自然数 ℓ が存在するなら, $\sqrt{k}$ は明らかに有理数である.

- $\sqrt{k} = \ell$ となる自然数が存在しないと仮定して, $\sqrt{k}$ が無理数であることを示す.

前回のリアクションペーパーでのコメントの一つに対する答

「$\sqrt{2}$ が無理数である」ことの証明と同じ証明で「2 が無理数である」ことも証明できてしまうのではないでしょうか?

- 同様の証明は成り立たないことが示せる.
- 次の同値が成り立つことが証明できる:

すべての自然数 k に対し,

$\sqrt{k}$ は無理数である $\Leftrightarrow$ $\sqrt{k} = \ell$ (つまり $\ell^2 = k$) となる自然数 ℓ が存在しない.

証明. $\sqrt{k} = \ell$ となる自然数 ℓ が存在するなら, $\sqrt{k}$ は明らかに有理数である.

- $\sqrt{k} = \ell$ となる自然数が存在しないと仮定して, $\sqrt{k}$ が無理数であることを示す.

前回のリアクションペーパーでのコメントの一つに対する答

「$\sqrt{2}$ が無理数である」ことの証明と同じ証明で「2 が無理数である」ことも証明できてしまうのではないでしょうか?

- 同様の証明は成り立たないことが示せる.
- 次の同値が成り立つことが証明できる:

すべての自然数 k に対し,
$\sqrt{k}$ は無理数である $\Leftrightarrow$ $\sqrt{k} = \ell$ (つまり $\ell^2 = k$) となる自然数 ℓ が存在しない.

証明. $\sqrt{k} = \ell$ となる自然数 ℓ が存在するなら, $\sqrt{k}$ は明らかに有理数である.

- $\sqrt{k} = \ell$ となる自然数が存在しないと仮定して, $\sqrt{k}$ が無理数であることを示す.

前回のリアクションペーパーでのコメントの一つに対する答

「$\sqrt{2}$ が無理数である」ことの証明と同じ証明で「2 が無理数である」ことも証明できてしまうのではないでしょうか?

- 同様の証明は成り立たないことが示せる.
- 次の同値が成り立つことが証明できる:

すべての自然数 k に対し,
$\sqrt{k}$ は無理数である $\Leftrightarrow$ $\sqrt{k} = \ell$ (つまり $\ell^2 = k$) となる自然数 ℓ が存在しない.

証明. $\sqrt{k} = \ell$ となる自然数 ℓ が存在するなら, $\sqrt{k}$ は明らかに有理数である.

- $\sqrt{k} = \ell$ となる自然数が存在しないと仮定して, $\sqrt{k}$ が無理数であることを示す.

前回のリアクションペーパーでのコメントの一つに対する答

「$\sqrt{2}$ が無理数である」ことの証明と同じ証明で「2 が無理数である」ことも証明できてしまうのではないでしょうか?

- 同様の証明は成り立たないことが示せる.
- 次の同値が成り立つことが証明できる:

すべての自然数 k に対し,
$\sqrt{k}$ は無理数である $\Leftrightarrow$ $\sqrt{k} = \ell$ (つまり $\ell^2 = k$) となる自然数 ℓ が存在しない.

証明. $\sqrt{k} = \ell$ となる自然数 ℓ が存在するなら, $\sqrt{k}$ は明らかに有理数である.

- $\sqrt{k} = \ell$ となる自然数が存在しないと仮定して, $\sqrt{k}$ が無理数であることを示す.

前回のリアクションペーパーでのコメントの一つに対する答 (2/3)

- 背理法で証明する．つまり，$\sqrt{k} = \ell$ となる自然数 ℓ は存在しないが，

  (*) $\sqrt{k} = \frac{m}{n}$

  となる全数 m, n は存在する，として矛盾を示す．

- $\frac{m}{n}$ は既約分数表示になっているとしてよい．仮定から $n > 1$ である．k を素因数分解して，

  $$k = {p_1}^2 \cdot \cdots \cdot {p_i}^2 \cdot q_1 \cdots q_j$$

  とする．ただし，$p_1, \ldots, p_i, q_1, \ldots, q_j$ はすべて素数で，$q_1, \ldots, q_j$ は互いに異るとする．仮定から，$m \geqq 1$ である．

- (*) から，

  $${p_1}^2 \cdot \cdots \cdot {p_i}^2 \cdot q_1 \cdot \cdots \cdot q_j \cdot n^2 = m^2$$

  である．このとき m^2 は ${p_1}^2 \cdot \cdots \cdot {p_i}^2$ の倍数だから，m は $p_1 \cdot \cdots \cdot p_i$ の倍数である．$m = p_1 \cdot \cdots \cdot p_i \cdot m'$ とすると，

  (**) $q_1 \cdot \cdots \cdot q_j \cdot n^2 = {m'}^2$

  となる．

前回のリアクションペーパーでのコメントの一つに対する答 (2/3)

- 背理法で証明する．つまり，$\sqrt{k} = \ell$ となる自然数 ℓ は存在しないが，

  (*) $\sqrt{k} = \frac{m}{n}$

  となる全数 m, n は存在する，として矛盾を示す．
- $\frac{m}{n}$ は既約分数表示になっているとしてよい．仮定から $n > 1$ である．k を素因数分解して，

  $$k = {p_1}^2 \cdot \cdots \cdot {p_i}^2 \cdot q_1 \cdots q_j$$

  とする．ただし，$p_1, \ldots, p_i$, $q_1, \ldots, q_j$ はすべて素数で，$q_1, \ldots, q_j$ は互いに異るとする．仮定から，$m \geqq 1$ である．
- (*) から，

  $${p_1}^2 \cdot \cdots \cdot {p_i}^2 \cdot q_1 \cdot \cdots \cdot q_j \cdot n^2 = m^2$$

  である．このとき m^2 は ${p_1}^2 \cdot \cdots \cdot {p_i}^2$ の倍数だから，m は $p_1 \cdot \cdots \cdot p_i$ の倍数である．$m = p_1 \cdot \cdots \cdot p_i \cdot m'$ とすると，

  (**) $q_1 \cdot \cdots \cdot q_j \cdot n^2 = {m'}^2$

  となる．

- 背理法で証明する．つまり，$\sqrt{k}=\ell$ となる自然数 ℓ は存在しないが，

  (*) $\sqrt{k}=\frac{m}{n}$

  となる全数 m, n は存在する，として矛盾を示す．
- $\frac{m}{n}$ は既約分数表示になっているとしてよい．仮定から $n>1$ である．k を素因数分解して，

  $$k={p_1}^2\cdot\cdots\cdot{p_i}^2\cdot q_1\cdots q_j$$

  とする．ただし，$p_1,\ldots,p_i$, $q_1,\ldots,q_j$ はすべて素数で，$q_1,\ldots,q_j$ は互いに異るとする．仮定から，$m\geqq 1$ である．
- (*) から，

  $${p_1}^2\cdot\cdots\cdot{p_i}^2\cdot q_1\cdot\cdots\cdot q_j\cdot n^2=m^2$$

  である．このとき m^2 は ${p_1}^2\cdot\cdots\cdot{p_i}^2$ の倍数だから，m は $p_1\cdot\cdots\cdot p_i$ の倍数である．$m=p_1\cdot\cdots\cdot p_i\cdot m'$ とすると，

  (**) $q_1\cdot\cdots\cdot q_j\cdot n^2={m'}^2$

  となる．

- 背理法で証明する．つまり，$\sqrt{k}=\ell$ となる自然数 ℓ は存在しないが，

  (*) $\sqrt{k}=\frac{m}{n}$

  となる全数 m, n は存在する，として矛盾を示す．
- $\frac{m}{n}$ は既約分数表示になっているとしてよい．仮定から $n>1$ である．k を素因数分解して，

  $$k={p_1}^2\cdot\cdots\cdot{p_i}^2\cdot q_1\cdots q_j$$

  とする．ただし，$p_1,\ldots,p_i$, $q_1,\ldots,q_j$ はすべて素数で，$q_1,\ldots,q_j$ は互いに異るとする．仮定から，$m\geqq 1$ である．
- (*) から，

  $$ {p_1}^2\cdot\cdots\cdot{p_i}^2\cdot q_1\cdot\cdots\cdot q_j\cdot n^2=m^2$$

  である．このとき m^2 は ${p_1}^2\cdot\cdots\cdot{p_i}^2$ の倍数だから，m は $p_1\cdot\cdots\cdot p_i$ の倍数である．$m=p_1\cdot\cdots\cdot p_i\cdot m'$ とすると，

  (**) $q_1\cdot\cdots\cdot q_j\cdot n^2={m'}^2$

  となる．

前回のリアクションペーパーでのコメントの一つに対する答 (2/3)

- 背理法で証明する．つまり，$\sqrt{k} = \ell$ となる自然数 ℓ は存在しないが，

  (*) $\sqrt{k} = \frac{m}{n}$

  となる全数 m, n は存在する，として矛盾を示す．
- $\frac{m}{n}$ は既約分数表示になっているとしてよい．仮定から $n > 1$ である．k を素因数分解して，

  $$k = {p_1}^2 \cdot \cdots \cdot {p_i}^2 \cdot q_1 \cdots q_j$$

  とする．ただし，$p_1, \ldots, p_i$, $q_1, \ldots, q_j$ はすべて素数で，$q_1, \ldots, q_j$ は互いに異るとする．仮定から，$m \geqq 1$ である．
- (*) から，

  $$ {p_1}^2 \cdot \cdots \cdot {p_i}^2 \cdot q_1 \cdot \cdots \cdot q_j \cdot n^2 = m^2$$

  である．このとき m^2 は ${p_1}^2 \cdot \cdots \cdot {p_i}^2$ の倍数だから，m は $p_1 \cdot \cdots \cdot p_i$ の倍数である．$m = p_1 \cdot \cdots \cdot p_i \cdot m'$ とすると，

  (**) $q_1 \cdot \cdots \cdot q_j \cdot n^2 = {m'}^2$

  となる．

前回のリアクションペーパーでのコメントの一つに対する答 (2/3)

- 背理法で証明する．つまり，$\sqrt{k} = \ell$ となる自然数 ℓ は存在しないが，

  (*) $\sqrt{k} = \frac{m}{n}$

  となる全数 m, n は存在する，として矛盾を示す．
- $\frac{m}{n}$ は既約分数表示になっているとしてよい．仮定から $n > 1$ である．k を素因数分解して，

  $$k = {p_1}^2 \cdot \cdots \cdot {p_i}^2 \cdot q_1 \cdots q_j$$

  とする．ただし，$p_1, \ldots, p_i$, $q_1, \ldots, q_j$ はすべて素数で，$q_1, \ldots, q_j$ は互いに異るとする．仮定から，$m \geqq 1$ である．
- (*) から，

  $${p_1}^2 \cdot \cdots \cdot {p_i}^2 \cdot q_1 \cdot \cdots \cdot q_j \cdot n^2 = m^2$$

  である．このとき m^2 は ${p_1}^2 \cdot \cdots \cdot {p_i}^2$ の倍数だから，m は $p_1 \cdot \cdots \cdot p_i$ の倍数である．$m = p_1 \cdot \cdots \cdot p_i \cdot m'$ とすると，

  (**) $q_1 \cdot \cdots \cdot q_j \cdot n^2 = {m'}^2$

  となる．

前回のリアクションペーパーでのコメントの一つに対する答 (2/3)

- 背理法で証明する．つまり，$\sqrt{k} = \ell$ となる自然数 ℓ は存在しないが，

  (*) $\sqrt{k} = \frac{m}{n}$

  となる全数 m, n は存在する，として矛盾を示す．
- $\frac{m}{n}$ は既約分数表示になっているとしてよい．仮定から $n > 1$ である．k を素因数分解して，

  $$k = {p_1}^2 \cdot \cdots \cdot {p_i}^2 \cdot q_1 \cdots q_j$$

  とする．ただし，$p_1, \ldots, p_i$, $q_1, \ldots, q_j$ はすべて素数で，$q_1, \ldots, q_j$ は互いに異るとする．仮定から，$m \geqq 1$ である．
- (*) から，

  $${p_1}^2 \cdot \cdots \cdot {p_i}^2 \cdot q_1 \cdot \cdots \cdot q_j \cdot n^2 = m^2$$

  である．このとき m^2 は ${p_1}^2 \cdot \cdots \cdot {p_i}^2$ の倍数だから，m は $p_1 \cdot \cdots \cdot p_i$ の倍数である．$m = p_1 \cdot \cdots \cdot p_i \cdot m'$ とすると，

  (**) $q_1 \cdot \cdots \cdot q_j \cdot n^2 = {m'}^2$

  となる．

前回のリアクションペーパーでのコメントの一つに対する答 (3/3)

- したがって，$(m')^2$ は $q_1 \cdot \cdots \cdot q_j$ の倍数だが，$q_1, \ldots, q_j$ は互いに異なる素数だから，m' も $q_1 \cdot \cdots \cdot q_j$ の倍数でなくてはならないことがわかる．
- よって，$m' = q_1 \cdot \cdots \cdot q_j \cdot m''$ と書けるから，これを (**) に代入すると，

$$n^2 = q_1 \cdot \cdots \cdot q_j \cdot (m'')^2$$

となる．したがって，上と同じ議論で n も $q_1 \cdot \cdots \cdot q_j$ の倍数でなくてはならないが，このことから，表現 $\frac{m}{n}$ が，$q_1 \cdot \cdots \cdot q_j$ で約分できることになってしまい，$\frac{m}{n}$ が既約表現である，という仮定に矛盾である．$\square$

前回のリアクションペーパーでのコメントの一つに対する答 (3/3)

- したがって，$(m')^2$ は $q_1 \cdot \cdots \cdot q_j$ の倍数だが，$q_1, \ldots, q_j$ は互いに異なる素数だから，m' も $q_1 \cdot \cdots \cdot q_j$ の倍数でなくてはならないことがわかる．
- よって，$m' = q_1 \cdot \cdots \cdot q_j \cdot m''$ と書けるから，これを (**) に代入すると，

$$n^2 = q_1 \cdot \cdots \cdot q_j \cdot (m'')^2$$

となる．したがって，上と同じ議論で n も $q_1 \cdot \cdots \cdot q_j$ の倍数でなくてはならないが，このことから，表現 $\frac{m}{n}$ が，$q_1 \cdot \cdots \cdot q_j$ で約分できることになってしまい，$\frac{m}{n}$ が既約表現である，という仮定に矛盾である．□

前回のリアクションペーパーでのコメントの一つに対する答 (3/3)

- したがって，$(m')^2$ は $q_1 \cdot \cdots \cdot q_j$ の倍数だが，$q_1, \ldots, q_j$ は互いに異なる素数だから，m' も $q_1 \cdot \cdots \cdot q_j$ の倍数でなくてはならないことがわかる．
- よって，$m' = q_1 \cdot \cdots \cdot q_j \cdot m''$ と書けるから，これを (**) に代入すると，

$$n^2 = q_1 \cdot \cdots \cdot q_j \cdot (m'')^2$$

となる．したがって，上と同じ議論で n も $q_1 \cdot \cdots \cdot q_j$ の倍数でなくてはならないが，このことから，表現 $\frac{m}{n}$ が，$q_1 \cdot \cdots \cdot q_j$ で約分できることになってしまい，$\frac{m}{n}$ が既約表現である，という仮定に矛盾である．□

- したがって, $(m')^2$ は $q_1 \cdot \dots \cdot q_j$ の倍数だが, $q_1, \dots, q_j$ は互いに異なる素数だから, m' も $q_1 \cdot \dots \cdot q_j$ の倍数でなくてはならないことがわかる.
- よって, $m' = q_1 \cdot \dots \cdot q_j \cdot m''$ と書けるから, これを (**) に代入すると,
$$n^2 = q_1 \cdot \dots \cdot q_j \cdot (m'')^2$$
となる. したがって, 上と同じ議論で n も $q_1 \cdot \dots \cdot q_j$ の倍数でなくてはならないが, このことから, 表現 $\frac{m}{n}$ が, $q_1 \cdot \dots \cdot q_j$ で約分できることになってしまい, $\frac{m}{n}$ が既約表現である, という仮定に矛盾である. $\square$

公理

- 一連の数学的議論で前提とする命題 (の集まり) を**公理** (axiom) (**公理系**, system of axioms) とよぶ.
- 公理や公理系は「正しい」数学で，その「正しさ」に疑問の余地のないようなもの，という捉え方のできるものが多いが，近代の数学では，必ずしも「正しさ」が公理の採用基準にならない場合も多い.
- 通常の平面幾何の公理系 $\mathcal{G}$ で，平行線公理 (「直線 ℓ と ℓ に含まれない 1 点 x をとるとき，x を通る直線で ℓ と交じわらないものがちょうど一つ存在する」) の代わりに，この公理の否定 (「ある直線 ℓ と ℓ に含まれない点 x で x を通る直線はすべて ℓ と交じわるようなものが存在する」) を他の公理と合せたもの $\mathcal{G}'$ は，矛盾しない.
- たとえば，単位球面の上の点を,「点」だと考え，この球面上の大円を「直線」だと考えると，$\mathcal{G}'$ の公理はこの解釈ですべて成り立つことが示せる.

公理

- 一連の数学的議論で前提とする命題 (の集まり) を**公理** (axiom) (**公理系**, system of axioms) とよぶ.
- 公理や公理系は「正しい」数学で，その「正しさ」に疑問の余地のないようなもの，という捉え方のできるものが多いが，近代の数学では，必ずしも「正しさ」が公理の採用基準にならない場合も多い.
  - 通常の平面幾何の公理系 $\mathcal{G}$ で，平行線公理 (「直線 ℓ と ℓ に含まれない 1 点 x をとるとき，x を通る直線で ℓ と交じわらないものがちょうど一つ存在する」) の代わりに，この公理の否定 (「ある直線 ℓ と ℓ に含まれない点 x で x を通る直線はすべて ℓ と交じわるようなものが存在する」) を他の公理と合せたもの $\mathcal{G}'$ は，矛盾しない.
- たとえば，単位球面の上の点を,「点」だと考え，この球面上の大円を「直線」だと考えると，$\mathcal{G}'$ の公理はこの解釈ですべて成り立つことが示せる.

公理

- 一連の数学的議論で前提とする命題 (の集まり) を**公理** (axiom) (**公理系**, system of axioms) とよぶ.
- 公理や公理系は「正しい」数学で，その「正しさ」に疑問の余地のないようなもの，という捉え方のできるものが多いが，近代の数学では，必ずしも「正しさ」が公理の採用基準にならない場合も多い.
  - 通常の平面幾何の公理系 $\mathcal{G}$ で，平行線公理 (「直線 ℓ と ℓ に含まれない 1 点 x をとるとき，x を通る直線で ℓ と交じわらないものがちょうど一つ存在する」) の代わりに，この公理の否定 (「ある直線 ℓ と ℓ に含まれない点 x で x を通る直線はすべて ℓ と交じわるようなものが存在する」) を他の公理と合せたもの $\mathcal{G}'$ は，矛盾しない.
- たとえば，単位球面の上の点を,「点」だと考え，この球面上の大円を「直線」だと考えると，$\mathcal{G}'$ の公理はこの解釈ですべて成り立つことが示せる.

公理

- 一連の数学的議論で前提とする命題 (の集まり) を**公理** (axiom) (**公理系**, system of axioms) とよぶ.
- 公理や公理系は「正しい」数学で，その「正しさ」に疑問の余地のないようなもの，という捉え方のできるものが多いが，近代の数学では，必ずしも「正しさ」が公理の採用基準にならない場合も多い.
- 通常の平面幾何の公理系 $\mathcal{G}$ で，平行線公理 (「直線 ℓ と ℓ に含まれない 1 点 x をとるとき，x を通る直線で ℓ と交じわらないものがちょうど一つ存在する」) の代わりに，この公理の否定 (「ある直線 ℓ と ℓ に含まれない点 x で x を通る直線はすべて ℓ と交じわるようなものが存在する」) を他の公理と合せたもの $\mathcal{G}'$ は，矛盾しない.
- たとえば，単位球面の上の点を,「点」だと考え，この球面上の大円を「直線」だと考えると，$\mathcal{G}'$ の公理はこの解釈ですべて成り立つことが示せる.

公理

- 一連の数学的議論で前提とする命題 (の集まり) を**公理** (axiom) (**公理系**, system of axioms) とよぶ.
- 公理や公理系は「正しい」数学で，その「正しさ」に疑問の余地のないようなもの，という捉え方のできるものが多いが，近代の数学では，必ずしも「正しさ」が公理の採用基準にならない場合も多い.
   - 通常の平面幾何の公理系 $\mathcal{G}$ で，平行線公理 (「直線 ℓ と ℓ に含まれない 1 点 x をとるとき，x を通る直線で ℓ と交じわらないものがちょうど一つ存在する」) の代わりに，この公理の否定 (「ある直線 ℓ と ℓ に含まれない点 x で x を通る直線はすべて ℓ と交じわるようなものが存在する」) を他の公理と合せたもの $\mathcal{G}'$ は，矛盾しない.
- たとえば，単位球面の上の点を,「点」だと考え，この球面上の大円を「直線」だと考えると，$\mathcal{G}'$ の公理はこの解釈ですべて成り立つことが示せる.

公理 (2/2)

- この場合 $\mathcal{G}$ も $\mathcal{G}'$ も同じように可能な幾何学のベースとなっているので，どちらが正しいか，というような議論は適当でない．
- 一方，すべての数学を展開できる体系の基礎というような意味あいを持つ公理系も考えることができる．この場合には，公理系に含まれる公理は，ある意味で「正しい」必要がある．

公理 (2/2)

- この場合 $\mathcal{G}$ も $\mathcal{G}'$ も同じように可能な幾何学のベースとなっているので，どちらが正しいか，というような議論は適当でない．
- 一方，すべての数学を展開できる体系の基礎というような意味あいを持つ公理系も考えることができる．この場合には，公理系に含まれる公理は，ある意味で「正しい」必要がある．

公理 (2/2)

- この場合 $\mathcal{G}$ も $\mathcal{G}'$ も同じように可能な幾何学のベースとなっているので，どちらが正しいか，というような議論は適当でない．
- 一方，すべての数学を展開できる体系の基礎というような意味あいを持つ公理系も考えることができる．この場合には，公理系に含まれる公理は，ある意味で「正しい」必要がある．

デデキント-ペアノの公理系

- 以下は，デデキント-ペアノ公理系として知られている初等数論の公理系である．この公理系では，“x の次の数” をあらわす $S(x)$ という関数記号と，定数 0, 加算と乗法をあらわす $+$, $\cdot$ および，等号 $\equiv$ が固定された記号として用いられている．また，変数は自然数の上を走るものと考えている．
  デデキント-ペアノの公理系は次のような複数 (無限個) の公理からなる:

p_1: $x \not\equiv y$ なら，$S(x) \not\equiv S(y)$

p_2: $0 \not\equiv S(x)$

p_3: $x \not\equiv 0$ なら，$S(y) \equiv x$ となる y が存在する

a_1: $x + 0 \equiv x$　　m_1: $x \cdot 0 \equiv 0$

a_2: $x + S(y) \equiv S(x + y)$　　m_2: $x \cdot S(y) \equiv (x \cdot y) + x$

(帰納法の原理) すべての性質 $\varphi(x, \overline{x})$ に対し，

p_φ: $\varphi(0, \overline{x})$ かつ
すべての x に対し，$\varphi(x, \overline{x})$ なら $\varphi(S(x), \overline{x})$ が成り立つなら，
すべての x に対し，$\varphi(x, \overline{x})$ となる．

- 以下は，デデキント-ペアノ公理系として知られている初等数論の公理系である．この公理系では，“x の次の数” をあらわす $S(x)$ という関数記号と，定数 0, 加算と乗法をあらわす $+, \cdot$ および，等号 $\equiv$ が固定された記号として用いられている．また，変数は自然数の上を走るものと考えている．

デデキント-ペアノの公理系は次のような複数 (無限個) の公理からなる:

p_1: $x \not\equiv y$ なら，$S(x) \not\equiv S(y)$

p_2: $0 \not\equiv S(x)$

p_3: $x \not\equiv 0$ なら，$S(y) \equiv x$ となる y が存在する

a_1: $x + 0 \equiv x$ $\quad$ m_1: $x \cdot 0 \equiv 0$

a_2: $x + S(y) \equiv S(x + y)$ $\quad$ m_2: $x \cdot S(y) \equiv (x \cdot y) + x$

(帰納法の原理) すべての性質 $\varphi(x, \overline{x})$ に対し，

p_φ: $\varphi(0, \overline{x})$ かつ
すべての x に対し，$\varphi(x, \overline{x})$ なら $\varphi(S(x), \overline{x})$ が成り立つなら，
すべての x に対し，$\varphi(x, \overline{x})$ となる．

デデキント-ペアノの公理系

- 以下は，デデキント-ペアノ公理系として知られている初等数論の公理系である．この公理系では，“x の次の数” をあらわす $S(x)$ という関数記号と，定数 0, 加算と乗法をあらわす $+$, $\cdot$ および，等号 $\equiv$ が固定された記号として用いられている．また，変数は自然数の上を走るものと考えている．
  デデキント-ペアノの公理系は次のような複数 (無限個) の公理からなる:

p_1: $x \not\equiv y$ なら，$S(x) \not\equiv S(y)$

p_2: $0 \not\equiv S(x)$

p_3: $x \not\equiv 0$ なら，$S(y) \equiv x$ となる y が存在する

a_1: $x + 0 \equiv x$ $\qquad$ m_1: $x \cdot 0 \equiv 0$

a_2: $x + S(y) \equiv S(x + y)$ $\qquad$ m_2: $x \cdot S(y) \equiv (x \cdot y) + x$

(帰納法の原理) すべての性質 $\varphi(x, \overline{x})$ に対し，

p_φ: $\varphi(0, \overline{x})$ かつ
すべての x に対し，$\varphi(x, \overline{x})$ なら $\varphi(S(x), \overline{x})$ が成り立つなら，
すべての x に対し，$\varphi(x, \overline{x})$ となる．

デデキント-ペアノの公理系

- 以下は，デデキント-ペアノ公理系として知られている初等数論の公理系である．この公理系では，“x の次の数” をあらわす $S(x)$ という関数記号と，定数 0, 加算と乗法をあらわす $+$, $\cdot$ および，等号 $\equiv$ が固定された記号として用いられている．また，変数は自然数の上を走るものと考えている．
  デデキント-ペアノの公理系は次のような複数 (無限個) の公理からなる:

  p_1: $x \not\equiv y$ なら，$S(x) \not\equiv S(y)$

  p_2: $0 \not\equiv S(x)$

  p_3: $x \not\equiv 0$ なら，$S(y) \equiv x$ となる y が存在する

  a_1: $x + 0 \equiv x$ 　　 m_1: $x \cdot 0 \equiv 0$

  a_2: $x + S(y) \equiv S(x + y)$ 　　 m_2: $x \cdot S(y) \equiv (x \cdot y) + x$

  (帰納法の原理) すべての性質 $\varphi(x, \overline{x})$ に対し，

  p_φ: $\varphi(0, \overline{x})$ かつ
  すべての x に対し，$\varphi(x, \overline{x})$ なら $\varphi(S(x), \overline{x})$ が成り立つなら，
  すべての x に対し，$\varphi(x, \overline{x})$ となる．

デデキント-ペアノの公理系

- 以下は，デデキント-ペアノ公理系として知られている初等数論の公理系である．この公理系では，“x の次の数” をあらわす $S(x)$ という関数記号と，定数 0, 加算と乗法をあらわす $+$, $\cdot$ および，等号 $\equiv$ が固定された記号として用いられている．また，変数は自然数の上を走るものと考えている．
  デデキント-ペアノの公理系は次のような複数 (無限個) の公理からなる:

p_1: $x \not\equiv y$ なら，$S(x) \not\equiv S(y)$

p_2: $0 \not\equiv S(x)$

p_3: $x \not\equiv 0$ なら，$S(y) \equiv x$ となる y が存在する

a_1: $x + 0 \equiv x$ $\qquad$ m_1: $x \cdot 0 \equiv 0$

a_2: $x + S(y) \equiv S(x + y)$ $\qquad$ m_2: $x \cdot S(y) \equiv (x \cdot y) + x$

(帰納法の原理) すべての性質 $\varphi(x, \overline{x})$ に対し，

p_φ: $\varphi(0, \overline{x})$ かつ
すべての x に対し，$\varphi(x, \overline{x})$ なら $\varphi(S(x), \overline{x})$ が成り立つなら，
すべての x に対し，$\varphi(x, \overline{x})$ となる．

デデキント-ペアノの公理系

- 以下は，デデキント-ペアノ公理系として知られている初等数論の公理系である．この公理系では，“x の次の数” をあらわす $S(x)$ という関数記号と，定数 0, 加算と乗法をあらわす $+, \cdot$ および，等号 $\equiv$ が固定された記号として用いられている．また，変数は自然数の上を走るものと考えている．
  デデキント-ペアノの公理系は次のような複数 (無限個) の公理からなる:

  p_1:　$x \not\equiv y$ なら，$S(x) \not\equiv S(y)$

  p_2:　$0 \not\equiv S(x)$

  p_3:　$x \not\equiv 0$ なら，$S(y) \equiv x$ となる y が存在する

  a_1:　$x + 0 \equiv x$　　　m_1:　$x \cdot 0 \equiv 0$

  a_2:　$x + S(y) \equiv S(x + y)$　　　m_2:　$x \cdot S(y) \equiv (x \cdot y) + x$

  (帰納法の原理) すべての性質 $\varphi(x, \overline{x})$ に対し，

  p_φ:　$\varphi(0, \overline{x})$ かつ
  すべての x に対し，$\varphi(x, \overline{x})$ なら $\varphi(S(x), \overline{x})$ が成り立つなら，
  すべての x に対し，$\varphi(x, \overline{x})$ となる．

等号の公理

- ペアノ (Giuseppe Peano, 1858(安政 5) 年 – 1932(昭和 7) 年) によるデデキント-ペアノの公理系の定義では，現在では論理の公理とみなされている，次のような等号の公理も含まれていた:

e_1: すべての x に対し $x \equiv x$ である．

e_2: すべての x, y に対し，$x \equiv y$ なら $y \equiv x$ である．

e_3: すべての x, y, z に対し，$x \equiv y$ かつ $y \equiv z$ なら $x \equiv z$ である．

e_4: すべての x, x' に対し $x \equiv x'$ なら $S(x) \equiv S(x')$ である．

e_5: すべての x, x', y, y' に対して，$x \equiv x'$ かつ $y \equiv y'$ なら，$x + y \equiv x' + y'$ かつ $x \cdot y \equiv x' \cdot y'$ である．

e_6: すべての x, x' とすべての性質 $\varphi(x, \overline{x})$ に対し，$x \equiv x'$ なら，$\varphi(x, \overline{x}) \;\Leftrightarrow\; \varphi(x', \overline{x})$ である．

- デデキント-ペアノの公理系の問題点: “すべての性質” といったときの “性質” が何か (どの範囲で考えているものなのか) が明らかでない．

等号の公理

- ペアノ (Giuseppe Peano, 1858(安政 5) 年 – 1932(昭和 7) 年) によるデデキント-ペアノの公理系の定義では，現在では論理の公理とみなされている，次のような等号の公理も含まれていた:

e_1: すべての x に対し $x \equiv x$ である．

e_2: すべての x, y に対し，$x \equiv y$ なら $y \equiv x$ である．

e_3: すべての x, y, z に対し，$x \equiv y$ かつ $y \equiv z$ なら $x \equiv z$ である．

e_4: すべての x, x' に対し $x \equiv x'$ なら $S(x) \equiv S(x')$ である．

e_5: すべての x, x', y, y' に対して，$x \equiv x'$ かつ $y \equiv y'$ なら，$x + y \equiv x' + y'$ かつ $x \cdot y \equiv x' \cdot y'$ である．

e_6: すべての x, x' とすべての性質 $\varphi(x, \overline{x})$ に対し，$x \equiv x'$ なら，$\varphi(x, \overline{x}) \ \Leftrightarrow \ \varphi(x', \overline{x})$ である．

- デデキント-ペアノの公理系の問題点: “すべての性質” といったときの “性質” が何か (どの範囲で考えているものなのか) が明らかでない．

等号の公理

- ペアノ (Giuseppe Peano, 1858(安政 5) 年 – 1932(昭和 7) 年) によるデデキント-ペアノの公理系の定義では，現在では論理の公理とみなされている，次のような等号の公理も含まれていた:

e_1: すべての x に対し $x \equiv x$ である.

e_2: すべての x, y に対し，$x \equiv y$ なら $y \equiv x$ である.

e_3: すべての x, y, z に対し，$x \equiv y$ かつ $y \equiv z$ なら $x \equiv z$ である.

e_4: すべての x, x' に対し $x \equiv x'$ なら $S(x) \equiv S(x')$ である.

e_5: すべての x, x', y, y' に対して，$x \equiv x'$ かつ $y \equiv y'$ なら，$x + y \equiv x' + y'$ かつ $x \cdot y \equiv x' \cdot y'$ である.

e_6: すべての x, x' とすべての性質 $\varphi(x, \overline{x})$ に対し，$x \equiv x'$ なら，$\varphi(x, \overline{x}) \Leftrightarrow \varphi(x', \overline{x})$ である.

- デデキント-ペアノの公理系の問題点: “すべての性質” といったときの “性質” が何か (どの範囲で考えているものなのか) が明らかでない.

等号の公理

- ペアノ (Giuseppe Peano, 1858(安政 5) 年 – 1932(昭和 7) 年) によるデデキント-ペアノの公理系の定義では，現在では論理の公理とみなされている，次のような等号の公理も含まれていた:

e_1: すべての x に対し $x \equiv x$ である．

e_2: すべての x, y に対し，$x \equiv y$ なら $y \equiv x$ である．

e_3: すべての x, y, z に対し，$x \equiv y$ かつ $y \equiv z$ なら $x \equiv z$ である．

e_4: すべての x, x' に対し $x \equiv x'$ なら $S(x) \equiv S(x')$ である．

e_5: すべての x, x', y, y' に対して，$x \equiv x'$ かつ $y \equiv y'$ なら，$x + y \equiv x' + y'$ かつ $x \cdot y \equiv x' \cdot y'$ である．

e_6: すべての x, x' とすべての性質 $\varphi(x, \overline{x})$ に対し，$x \equiv x'$ なら，$\varphi(x, \overline{x}) \;\Leftrightarrow\; \varphi(x', \overline{x})$ である．

- デデキント-ペアノの公理系の問題点: “すべての性質” といったときの “性質” が何か (どの範囲で考えているものなのか) が明らかでない．

等号の公理

- ペアノ (Giuseppe Peano, 1858(安政 5) 年 – 1932(昭和 7) 年) によるデデキント-ペアノの公理系の定義では，現在では論理の公理とみなされている，次のような等号の公理も含まれていた:

e_1: すべての x に対し $x \equiv x$ である.

e_2: すべての x, y に対し，$x \equiv y$ なら $y \equiv x$ である.

e_3: すべての x, y, z に対し，$x \equiv y$ かつ $y \equiv z$ なら $x \equiv z$ である.

e_4: すべての x, x' に対し $x \equiv x'$ なら $S(x) \equiv S(x')$ である.

e_5: すべての x, x', y, y' に対して，$x \equiv x'$ かつ $y \equiv y'$ なら，$x + y \equiv x' + y'$ かつ $x \cdot y \equiv x' \cdot y'$ である.

e_6: すべての x, x' とすべての性質 $\varphi(x, \overline{x})$ に対し，$x \equiv x'$ なら，$\varphi(x, \overline{x}) \Leftrightarrow \varphi(x', \overline{x})$ である.

- デデキント-ペアノの公理系の問題点: “すべての性質” といったときの “性質” が何か (どの範囲で考えているものなのか) が明らかでない.

等号の公理

- ペアノ (Giuseppe Peano, 1858(安政 5) 年 – 1932(昭和 7) 年) によるデデキント-ペアノの公理系の定義では，現在では論理の公理とみなされている，次のような等号の公理も含まれていた:

e_1: すべての x に対し $x \equiv x$ である．

e_2: すべての x, y に対し，$x \equiv y$ なら $y \equiv x$ である．

e_3: すべての x, y, z に対し，$x \equiv y$ かつ $y \equiv z$ なら $x \equiv z$ である．

e_4: すべての x, x' に対し $x \equiv x'$ なら $S(x) \equiv S(x')$ である．

e_5: すべての x, x', y, y' に対して，$x \equiv x'$ かつ $y \equiv y'$ なら，$x + y \equiv x' + y'$ かつ $x \cdot y \equiv x' \cdot y'$ である．

e_6: すべての x, x' とすべての性質 $\varphi(x, \overline{x})$ に対し，$x \equiv x'$ なら，$\varphi(x, \overline{x}) \Leftrightarrow \varphi(x', \overline{x})$ である．

- デデキント-ペアノの公理系の問題点: “すべての性質” といったときの “性質” が何か (どの範囲で考えているものなのか) が明らかでない．

等号の公理

- ペアノ (Giuseppe Peano, 1858(安政 5) 年 – 1932(昭和 7) 年) によるデデキント-ペアノの公理系の定義では，現在では論理の公理とみなされている，次のような等号の公理も含まれていた:

e_1: すべての x に対し $x \equiv x$ である．

e_2: すべての x, y に対し，$x \equiv y$ なら $y \equiv x$ である．

e_3: すべての x, y, z に対し，$x \equiv y$ かつ $y \equiv z$ なら $x \equiv z$ である．

e_4: すべての x, x' に対し $x \equiv x'$ なら $S(x) \equiv S(x')$ である．

e_5: すべての x, x', y, y' に対して，$x \equiv x'$ かつ $y \equiv y'$ なら，$x + y \equiv x' + y'$ かつ $x \cdot y \equiv x' \cdot y'$ である．

e_6: すべての x, x' とすべての性質 $\varphi(x, \overline{x})$ に対し，$x \equiv x'$ なら，$\varphi(x, \overline{x}) \Leftrightarrow \varphi(x', \overline{x})$ である．

- デデキント-ペアノの公理系の問題点: “すべての性質” といったときの “性質” が何か (どの範囲で考えているものなのか) が明らかでない．

等号の公理

- ペアノ (Giuseppe Peano, 1858(安政 5) 年 – 1932(昭和 7) 年) によるデデキント-ペアノの公理系の定義では，現在では論理の公理とみなされている，次のような等号の公理も含まれていた:

e_1: すべての x に対し $x \equiv x$ である．

e_2: すべての x, y に対し，$x \equiv y$ なら $y \equiv x$ である．

e_3: すべての x, y, z に対し，$x \equiv y$ かつ $y \equiv z$ なら $x \equiv z$ である．

e_4: すべての x, x' に対し $x \equiv x'$ なら $S(x) \equiv S(x')$ である．

e_5: すべての x, x', y, y' に対して，$x \equiv x'$ かつ $y \equiv y'$ なら，$x + y \equiv x' + y'$ かつ $x \cdot y \equiv x' \cdot y'$ である．

e_6: すべての x, x' とすべての性質 $\varphi(x, \overline{x})$ に対し，$x \equiv x'$ なら，$\varphi(x, \overline{x}) \Leftrightarrow \varphi(x', \overline{x})$ である．

- デデキント-ペアノの公理系の問題点: “すべての性質” といったときの “性質” が何か (どの範囲で考えているものなのか) が明らかでない．

等号の公理

- ペアノ (Giuseppe Peano, 1858(安政 5) 年 – 1932(昭和 7) 年) によるデデキント-ペアノの公理系の定義では，現在では論理の公理とみなされている，次のような等号の公理も含まれていた:

e_1: すべての x に対し $x \equiv x$ である．

e_2: すべての x, y に対し，$x \equiv y$ なら $y \equiv x$ である．

e_3: すべての x, y, z に対し，$x \equiv y$ かつ $y \equiv z$ なら $x \equiv z$ である．

e_4: すべての x, x' に対し $x \equiv x'$ なら $S(x) \equiv S(x')$ である．

e_5: すべての x, x', y, y' に対して，$x \equiv x'$ かつ $y \equiv y'$ なら，$x + y \equiv x' + y'$ かつ $x \cdot y \equiv x' \cdot y'$ である．

e_6: すべての x, x' とすべての性質 $\varphi(x, \overline{x})$ に対し，$x \equiv x'$ なら，$\varphi(x, \overline{x}) \;\Leftrightarrow\; \varphi(x', \overline{x})$ である．

- デデキント-ペアノの公理系の問題点: “すべての性質” といったときの “性質” が何か (どの範囲で考えているものなのか) が明らかでない．

等号の公理

- ペアノ (Giuseppe Peano, 1858(安政 5) 年 – 1932(昭和 7) 年) によるデデキント-ペアノの公理系の定義では，現在では論理の公理とみなされている，次のような等号の公理も含まれていた:

e_1: すべての x に対し $x \equiv x$ である．

e_2: すべての x, y に対し，$x \equiv y$ なら $y \equiv x$ である．

e_3: すべての x, y, z に対し，$x \equiv y$ かつ $y \equiv z$ なら $x \equiv z$ である．

e_4: すべての x, x' に対し $x \equiv x'$ なら $S(x) \equiv S(x')$ である．

e_5: すべての x, x', y, y' に対して，$x \equiv x'$ かつ $y \equiv y'$ なら，$x + y \equiv x' + y'$ かつ $x \cdot y \equiv x' \cdot y'$ である．

e_6: すべての x, x' とすべての性質 $\varphi(x, \overline{x})$ に対し，$x \equiv x'$ なら，$\varphi(x, \overline{x}) \Leftrightarrow \varphi(x', \overline{x})$ である．

- デデキント-ペアノの公理系の問題点: “すべての性質” といったときの “性質” が何か (どの範囲で考えているものなのか) が明らかでない．

Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme I[1]).

Von **Kurt Gödel** in Wien.

1.

Die Entwicklung der Mathematik in der Richtung zu größerer Exaktheit hat bekanntlich dazu geführt, daß weite Gebiete von ihr formalisiert wurden, in der Art, daß das Beweisen nach einigen wenigen mechanischen Regeln vollzogen werden kann. Die umfassendsten derzeit aufgestellten formalen Systeme sind das System der Principia Mathematica (PM)[2]) einerseits, das Zermelo-Fraenkelsche (von J. v. Neumann weiter ausgebildete) Axiomensystem der Mengenlehre[3]) andererseits. Diese beiden Systeme sind so weit, daß alle heute in der Mathematik angewendeten Beweismethoden in ihnen formalisiert, d. h. auf einige wenige Axiome und Schlußregeln zurückgeführt sind. Es liegt daher die Vermutung nahe, daß diese Axiome und Schlußregeln dazu ausreichen, alle mathematischen Fragen, die sich in den betreffenden Systemen überhaupt formal ausdrücken lassen, auch zu entscheiden. Im folgenden wird gezeigt, daß dies

２つの不完全性定理が証明されたゲーデルの 1931(昭和 6) 年の論文の最初のページ．ただし，この論文では,「不完全性定理」という名称はまだ使われていない．

1) Vgl. die im Anzeiger der Akad. d. Wiss. in Wien (math.-naturw. Kl.) 1930