数理の世界 (数学の考え方)
— ゲーデルの不完全性定理

形式論理，(第 V 回の講義)

Sakaé Fuchino (渕野 昌)

Dept. of Computer Sciences
Kobe University
(神戸大学大学院 システム情報学研究科)

http://kurt.scitec.kobe-u.ac.jp/~fuchino/

(18. November 2012 (15:46 JST) version)

神戸大学 2012 年後期の講義
於 K302 教室，月曜 8:50 – 10:20

November 05, 2012

This presentation is typeset by pLATEX with beamer class.

公理 (前回の復習)

- 一連の数学的議論で前提とする命題 (の集まり) を**公理** (axiom) (**公理系**, system of axioms) とよぶ.
- 公理や公理系は「正しい」数学で, その「正しさ」に疑問の余地のないようなもの, という捉え方のできるものが多いが, 近代の数学では, 必ずしも「正しさ」が公理の採用基準にならない場合も多い.

- 前回に,「正しい」かどうかが公理の採用基準になっていない例として 「非ユークリッド幾何学」 の話をした.

公理 (前回の復習)

- 一連の数学的議論で前提とする命題 (の集まり) を**公理** (axiom) (**公理系**, system of axioms) とよぶ.
- 公理や公理系は「正しい」数学で, その「正しさ」に疑問の余地のないようなもの, という捉え方のできるものが多いが, 近代の数学では, 必ずしも「正しさ」が公理の採用基準にならない場合も多い.
  - 前回に,「正しい」かどうかが公理の採用基準になっていない例として 「非ユークリッド幾何学」 の話をした.

公理 (前回の復習)

- 一連の数学的議論で前提とする命題 (の集まり) を**公理** (axiom) (**公理系**, system of axioms) とよぶ.
- 公理や公理系は「正しい」数学で，その「正しさ」に疑問の余地のないようなもの，という捉え方のできるものが多いが，近代の数学では，必ずしも「正しさ」が公理の採用基準にならない場合も多い.

- 前回に,「正しい」かどうかが公理の採用基準になっていない例として「非ユークリッド幾何学」の話をした.

公理 (前回の復習)

- 一連の数学的議論で前提とする命題 (の集まり) を**公理** (axiom) (**公理系**, system of axioms) とよぶ.
- 公理や公理系は「正しい」数学で，その「正しさ」に疑問の余地のないようなもの，という捉え方のできるものが多いが，近代の数学では，必ずしも「正しさ」が公理の採用基準にならない場合も多い.

▷ 前回に,「正しい」かどうかが公理の採用基準になっていない例として 「非ユークリッド幾何学」 の話をした.

公理 (前回の復習) (2/2)

- 通常の幾何学 (ユークリッド幾何) の公理での平行線の公理の代わりに，この公理の否定を公理に付加したものを「非ユークリッド幾何」と呼ぶのだった．
- この場合，ユークリッド幾何も非ユークリッド幾何も同じように可能な幾何学のベースとなっているので，どちらが正しいか，というような議論は適当でない．
- 一方，すべての数学を展開できる体系の基礎というような意味あいを持つ公理系も考えることができる．この場合には，公理系に含まれる公理は，ある意味で「正しい」必要がある．

公理 (前回の復習) (2/2)

- 通常の幾何学 (ユークリッド幾何) の公理での平行線の公理の代わりに，この公理の否定を公理に付加したものを「非ユークリッド幾何」と呼ぶのだった．
- この場合，ユークリッド幾何も非ユークリッド幾何も同じように可能な幾何学のベースとなっているので，どちらが正しいか，というような議論は適当でない．
- 一方，すべての数学を展開できる体系の基礎というような意味あいを持つ公理系も考えることができる．この場合には，公理系に含まれる公理は，ある意味で「正しい」必要がある．

公理 (前回の復習) (2/2)

- 通常の幾何学 (ユークリッド幾何) の公理での平行線の公理の代わりに，この公理の否定を公理に付加したものを「非ユークリッド幾何」と呼ぶのだった.
- この場合，ユークリッド幾何も非ユークリッド幾何も同じように可能な幾何学のベースとなっているので，どちらが正しいか，というような議論は適当でない.
- 一方，すべての数学を展開できる体系の基礎というような意味あいを持つ公理系も考えることができる．この場合には，公理系に含まれる公理は，ある意味で「正しい」必要がある.

公理 (前回の復習) (2/2)

- 通常の幾何学 (ユークリッド幾何) の公理での平行線の公理の代わりに，この公理の否定を公理に付加したものを「非ユークリッド幾何」と呼ぶのだった．
- この場合，ユークリッド幾何も非ユークリッド幾何も同じように可能な幾何学のベースとなっているので，どちらが正しいか，というような議論は適当でない．
- 一方，すべての数学を展開できる体系の基礎というような意味あいを持つ公理系も考えることができる．この場合には，公理系に含まれる公理は，ある意味で「正しい」必要がある．

デデキント-ペアノの公理系 (前回の復習)

p_1: $x \not\equiv y$ なら，$S(x) \not\equiv S(y)$

p_2: $0 \not\equiv S(x)$

p_3: $x \not\equiv 0$ なら，$S(y) \equiv x$ となる y が存在する

a_1: $x + 0 \equiv x$

a_2: $x + S(y) \equiv S(x + y)$

m_1: $x \cdot 0 \equiv 0$

m_2: $x \cdot S(y) \equiv (x \cdot y) + x$

(帰納法の原理) すべての性質 $\varphi(x, \overline{x})$ に対し，

p_φ: $\varphi(0, \overline{x})$ かつ
すべての x に対し，$\varphi(x, \overline{x})$ なら $\varphi(S(x), \overline{x})$ が成り立つなら，
すべての x に対し，$\varphi(x, \overline{x})$ となる．

- この公理系では，“x の次の数” をあらわす $S(x)$ という関数記号と，定数 0, 加算と乗法をあらわす $+, \cdot$ および，等号 $\equiv$ が固定された記号として用いられている．また，変数は自然数の上を走るものと考えている．

デデキント-ペアノの公理系 (前回の復習)

p_1: $x \not\equiv y$ なら，$S(x) \not\equiv S(y)$

p_2: $0 \not\equiv S(x)$

p_3: $x \not\equiv 0$ なら，$S(y) \equiv x$ となる y が存在する

a_1: $x + 0 \equiv x$

a_2: $x + S(y) \equiv S(x + y)$

m_1: $x \cdot 0 \equiv 0$

m_2: $x \cdot S(y) \equiv (x \cdot y) + x$

(帰納法の原理) すべての性質 $\varphi(x, \overline{x})$ に対し，

p_φ: $\varphi(0, \overline{x})$ かつ
すべての x に対し，$\varphi(x, \overline{x})$ なら $\varphi(S(x), \overline{x})$ が成り立つなら，
すべての x に対し，$\varphi(x, \overline{x})$ となる．

- この公理系では，“x の次の数” をあらわす $S(x)$ という関数記号と，定数 0, 加算と乗法をあらわす $+, \cdot$ および，等号 $\equiv$ が固定された記号として用いられている．また，変数は自然数の上を走るものと考えている．

デデキント-ペアノの公理系 (前回の復習)

p_1: $x \not\equiv y$ なら, $S(x) \not\equiv S(y)$

p_2: $0 \not\equiv S(x)$

p_3: $x \not\equiv 0$ なら, $S(y) \equiv x$ となる y が存在する

a_1: $x + 0 \equiv x$ m_1: $x \cdot 0 \equiv 0$

a_2: $x + S(y) \equiv S(x + y)$ m_2: $x \cdot S(y) \equiv (x \cdot y) + x$

(帰納法の原理) すべての性質 $\varphi(x, \overline{x})$ に対し,

p_φ: $\varphi(0, \overline{x})$ かつ
すべての x に対し, $\varphi(x, \overline{x})$ なら $\varphi(S(x), \overline{x})$ が成り立つなら,
すべての x に対し, $\varphi(x, \overline{x})$ となる.

- この公理系では, "x の次の数" をあらわす $S(x)$ という関数記号と, 定数 0, 加算と乗法をあらわす $+$, $\cdot$ および, 等号 $\equiv$ が固定された記号として用いられている. また, 変数は自然数の上を走るものと考えている.

デデキント-ペアノの公理系 (前回の復習)

p_1: $x \not\equiv y$ なら，$S(x) \not\equiv S(y)$

p_2: $0 \not\equiv S(x)$

p_3: $x \not\equiv 0$ なら，$S(y) \equiv x$ となる y が存在する

a_1: $x + 0 \equiv x$ m_1: $x \cdot 0 \equiv 0$

a_2: $x + S(y) \equiv S(x + y)$ m_2: $x \cdot S(y) \equiv (x \cdot y) + x$

(帰納法の原理) すべての性質 $\varphi(x, \overline{x})$ に対し，

p_φ: $\varphi(0, \overline{x})$ かつ
すべての x に対し，$\varphi(x, \overline{x})$ なら $\varphi(S(x), \overline{x})$ が成り立つなら，
すべての x に対し，$\varphi(x, \overline{x})$ となる．

- この公理系では，“x の次の数” をあらわす $S(x)$ という関数記号と，定数 0, 加算と乗法をあらわす $+, \cdot$ および，等号 $\equiv$ が固定された記号として用いられている．また，変数は自然数の上を走るものと考えている．

デデキント-ペアノの公理系 (前回の復習)

p_1: $x \not\equiv y$ なら，$S(x) \not\equiv S(y)$

p_2: $0 \not\equiv S(x)$

p_3: $x \not\equiv 0$ なら，$S(y) \equiv x$ となる y が存在する

a_1: $x + 0 \equiv x$ 　　　m_1: $x \cdot 0 \equiv 0$

a_2: $x + S(y) \equiv S(x + y)$ 　　　m_2: $x \cdot S(y) \equiv (x \cdot y) + x$

(帰納法の原理) すべての性質 $\varphi(x, \overline{x})$ に対し，

p_φ: $\varphi(0, \overline{x})$ かつ
すべての x に対し，$\varphi(x, \overline{x})$ なら $\varphi(S(x), \overline{x})$ が成り立つなら，
すべての x に対し，$\varphi(x, \overline{x})$ となる．

- この公理系では，“x の次の数” をあらわす $S(x)$ という関数記号と，定数 0, 加算と乗法をあらわす $+$, $\cdot$ および，等号 $\equiv$ が固定された記号として用いられている．また，変数は自然数の上を走るものと考えている．

等号の公理 (前回の復習)

- ペアノによるデデキント-ペアノの公理系の定義では，現在では論理の公理とみなされ，数学的公理には含めない次のような等号の公理も含まれている:

e_1: すべての x に対し $x \equiv x$ である.

e_2: すべての x, y に対し，$x \equiv y$ なら $y \equiv x$ である.

e_3: すべての x, y, z に対し，$x \equiv y$ かつ $y \equiv z$ なら $x \equiv z$ である.

e_4: すべての x, x' に対し $x \equiv x'$ なら $S(x) \equiv S(x')$ である.

e_5: すべての x, x', y, y' に対して，$x \equiv x'$ かつ $y \equiv y'$ なら，$x + y \equiv x' + y'$ かつ $x \cdot y \equiv x' \cdot y'$ である.

e_6: すべての x, x' とすべての性質 $\varphi(x, \overline{x})$ に対し,$x \equiv x'$ なら，$\varphi(x, \overline{x}) \;\Leftrightarrow\; \varphi(x', \overline{x})$ である.

- デデキント-ペアノの公理系の問題点: “すべての性質” といったときの“性質” が何か (どの範囲で考えているものなのか) が明らかでない.この問題を解決するために，**論理の形式化** (formalization of the logic) を行なう.

等号の公理 (前回の復習)

- ペアノによるデデキント-ペアノの公理系の定義では，現在では論理の公理とみなされ，数学的公理には含めない次のような等号の公理も含まれている:

e_1: すべての x に対し $x \equiv x$ である．

e_2: すべての x, y に対し，$x \equiv y$ なら $y \equiv x$ である．

e_3: すべての x, y, z に対し，$x \equiv y$ かつ $y \equiv z$ なら $x \equiv z$ である．

e_4: すべての x, x' に対し $x \equiv x'$ なら $S(x) \equiv S(x')$ である．

e_5: すべての x, x', y, y' に対して，$x \equiv x'$ かつ $y \equiv y'$ なら，$x + y \equiv x' + y'$ かつ $x \cdot y \equiv x' \cdot y'$ である．

e_6: すべての x, x' とすべての性質 $\varphi(x, \overline{x})$ に対し，$x \equiv x'$ なら，$\varphi(x, \overline{x}) \;\Leftrightarrow\; \varphi(x', \overline{x})$ である．

- デデキント-ペアノの公理系の問題点: “すべての性質” といったときの “性質” が何か (どの範囲で考えているものなのか) が明らかでない．この問題を解決するために，**論理の形式化** (formalization of the logic) を行なう．

等号の公理 (前回の復習)

- ペアノによるデデキント-ペアノの公理系の定義では，現在では論理の公理とみなされ，数学的公理には含めない次のような等号の公理も含まれている:

e_1: すべての x に対し $x \equiv x$ である．

e_2: すべての x, y に対し，$x \equiv y$ なら $y \equiv x$ である．

e_3: すべての x, y, z に対し，$x \equiv y$ かつ $y \equiv z$ なら $x \equiv z$ である．

e_4: すべての x, x' に対し $x \equiv x'$ なら $S(x) \equiv S(x')$ である．

e_5: すべての x, x', y, y' に対して，$x \equiv x'$ かつ $y \equiv y'$ なら，$x + y \equiv x' + y'$ かつ $x \cdot y \equiv x' \cdot y'$ である．

e_6: すべての x, x' とすべての性質 $\varphi(x, \overline{x})$ に対し，$x \equiv x'$ なら，$\varphi(x, \overline{x}) \Leftrightarrow \varphi(x', \overline{x})$ である．

- デデキント-ペアノの公理系の問題点: “すべての性質” といったときの “性質” が何か (どの範囲で考えているものなのか) が明らかでない．この問題を解決するために，**論理の形式化** (formalization of the logic) を行なう．

等号の公理 (前回の復習)

- ペアノによるデデキント-ペアノの公理系の定義では，現在では論理の公理とみなされ，数学的公理には含めない次のような等号の公理も含まれている:

e_1: すべての x に対し $x \equiv x$ である．

e_2: すべての x, y に対し，$x \equiv y$ なら $y \equiv x$ である．

e_3: すべての x, y, z に対し，$x \equiv y$ かつ $y \equiv z$ なら $x \equiv z$ である．

e_4: すべての x, x' に対し $x \equiv x'$ なら $S(x) \equiv S(x')$ である．

e_5: すべての x, x', y, y' に対して，$x \equiv x'$ かつ $y \equiv y'$ なら，$x + y \equiv x' + y'$ かつ $x \cdot y \equiv x' \cdot y'$ である．

e_6: すべての x, x' とすべての性質 $\varphi(x, \overline{x})$ に対し，$x \equiv x'$ なら，$\varphi(x, \overline{x}) \Leftrightarrow \varphi(x', \overline{x})$ である．

- デデキント-ペアノの公理系の問題点: “すべての性質” といったときの “性質” が何か (どの範囲で考えているものなのか) が明らかでない．この問題を解決するために，**論理の形式化** (formalization of the logic) を行なう．

等号の公理 (前回の復習)

- ペアノによるデデキント-ペアノの公理系の定義では，現在では論理の公理とみなされ，数学的公理には含めない次のような等号の公理も含まれている:

e_1: すべての x に対し $x \equiv x$ である.

e_2: すべての x, y に対し，$x \equiv y$ なら $y \equiv x$ である.

e_3: すべての x, y, z に対し，$x \equiv y$ かつ $y \equiv z$ なら $x \equiv z$ である.

e_4: すべての x, x' に対し $x \equiv x'$ なら $S(x) \equiv S(x')$ である.

e_5: すべての x, x', y, y' に対して，$x \equiv x'$ かつ $y \equiv y'$ なら，$x + y \equiv x' + y'$ かつ $x \cdot y \equiv x' \cdot y'$ である.

e_6: すべての x, x' とすべての性質 $\varphi(x, \overline{x})$ に対し,$x \equiv x'$ なら，$\varphi(x, \overline{x}) \;\Leftrightarrow\; \varphi(x', \overline{x})$ である.

- デデキント-ペアノの公理系の問題点: “すべての性質” といったときの “性質” が何か (どの範囲で考えているものなのか) が明らかでない. この問題を解決するために，**論理の形式化** (formalization of the logic) を行なう.

等号の公理 (前回の復習)

- ペアノによるデデキント-ペアノの公理系の定義では，現在では論理の公理とみなされ，数学的公理には含めない次のような等号の公理も含まれている:

e_1: すべての x に対し $x \equiv x$ である.

e_2: すべての x, y に対し，$x \equiv y$ なら $y \equiv x$ である.

e_3: すべての x, y, z に対し，$x \equiv y$ かつ $y \equiv z$ なら $x \equiv z$ である.

e_4: すべての x, x' に対し $x \equiv x'$ なら $S(x) \equiv S(x')$ である.

e_5: すべての x, x', y, y' に対して，$x \equiv x'$ かつ $y \equiv y'$ なら，$x + y \equiv x' + y'$ かつ $x \cdot y \equiv x' \cdot y'$ である.

e_6: すべての x, x' とすべての性質 $\varphi(x, \overline{x})$ に対し,$x \equiv x'$ なら，$\varphi(x, \overline{x}) \;\Leftrightarrow\; \varphi(x', \overline{x})$ である.

- デデキント-ペアノの公理系の問題点: “すべての性質” といったときの “性質” が何か (どの範囲で考えているものなのか) が明らかでない. この問題を解決するために，**論理の形式化** (formalization of the logic) を行なう.

等号の公理 (前回の復習)

- ペアノによるデデキント-ペアノの公理系の定義では，現在では論理の公理とみなされ，数学的公理には含めない次のような等号の公理も含まれている:

e_1: すべての x に対し $x \equiv x$ である.

e_2: すべての x, y に対し，$x \equiv y$ なら $y \equiv x$ である.

e_3: すべての x, y, z に対し，$x \equiv y$ かつ $y \equiv z$ なら $x \equiv z$ である.

e_4: すべての x, x' に対し $x \equiv x'$ なら $S(x) \equiv S(x')$ である.

e_5: すべての x, x', y, y' に対して，$x \equiv x'$ かつ $y \equiv y'$ なら，$x + y \equiv x' + y'$ かつ $x \cdot y \equiv x' \cdot y'$ である.

e_6: すべての x, x' とすべての性質 $\varphi(x, \overline{x})$ に対し，$x \equiv x'$ なら，$\varphi(x, \overline{x}) \;\Leftrightarrow\; \varphi(x', \overline{x})$ である.

- デデキント-ペアノの公理系の問題点: “すべての性質” といったときの “性質” が何か (どの範囲で考えているものなのか) が明らかでない. この問題を解決するために，**論理の形式化** (formalization of the logic) を行なう.

等号の公理 (前回の復習)

- ペアノによるデデキント-ペアノの公理系の定義では，現在では論理の公理とみなされ，数学的公理には含めない次のような等号の公理も含まれている:

e_1: すべての x に対し $x \equiv x$ である．

e_2: すべての x, y に対し，$x \equiv y$ なら $y \equiv x$ である．

e_3: すべての x, y, z に対し，$x \equiv y$ かつ $y \equiv z$ なら $x \equiv z$ である．

e_4: すべての x, x' に対し $x \equiv x'$ なら $S(x) \equiv S(x')$ である．

e_5: すべての x, x', y, y' に対して，$x \equiv x'$ かつ $y \equiv y'$ なら，$x + y \equiv x' + y'$ かつ $x \cdot y \equiv x' \cdot y'$ である．

e_6: すべての x, x' とすべての性質 $\varphi(x, \overline{x})$ に対し，$x \equiv x'$ なら，$\varphi(x, \overline{x}) \Leftrightarrow \varphi(x', \overline{x})$ である．

- デデキント-ペアノの公理系の問題点: “すべての性質” といったときの “性質” が何か (どの範囲で考えているものなのか) が明らかでない．この問題を解決するために，**論理の形式化** (formalization of the logic) を行なう．

等号の公理 (前回の復習)

- ペアノによるデデキント-ペアノの公理系の定義では，現在では論理の公理とみなされ，数学的公理には含めない次のような等号の公理も含まれている:

  e_1: すべての x に対し $x \equiv x$ である．

  e_2: すべての x, y に対し，$x \equiv y$ なら $y \equiv x$ である．

  e_3: すべての x, y, z に対し，$x \equiv y$ かつ $y \equiv z$ なら $x \equiv z$ である．

  e_4: すべての x, x' に対し $x \equiv x'$ なら $S(x) \equiv S(x')$ である．

  e_5: すべての x, x', y, y' に対して，$x \equiv x'$ かつ $y \equiv y'$ なら，$x + y \equiv x' + y'$ かつ $x \cdot y \equiv x' \cdot y'$ である．

  e_6: すべての x, x' とすべての性質 $\varphi(x, \overline{x})$ に対し，$x \equiv x'$ なら，$\varphi(x, \overline{x}) \ \Leftrightarrow\ \varphi(x', \overline{x})$ である．

- デデキント-ペアノの公理系の問題点: “すべての性質” といったときの “性質” が何か (どの範囲で考えているものなのか) が明らかでない．この問題を解決するために，**論理の形式化** (formalization of the logic) を行なう．

等号の公理 (前回の復習)

- ペアノによるデデキント-ペアノの公理系の定義では，現在では論理の公理とみなされ，数学的公理には含めない次のような等号の公理も含まれている:

e_1: すべての x に対し $x \equiv x$ である．

e_2: すべての x, y に対し，$x \equiv y$ なら $y \equiv x$ である．

e_3: すべての x, y, z に対し，$x \equiv y$ かつ $y \equiv z$ なら $x \equiv z$ である．

e_4: すべての x, x' に対し $x \equiv x'$ なら $S(x) \equiv S(x')$ である．

e_5: すべての x, x', y, y' に対して，$x \equiv x'$ かつ $y \equiv y'$ なら，$x + y \equiv x' + y'$ かつ $x \cdot y \equiv x' \cdot y'$ である．

e_6: すべての x, x' とすべての性質 $\varphi(x, \overline{x})$ に対し，$x \equiv x'$ なら，$\varphi(x, \overline{x}) \;\Leftrightarrow\; \varphi(x', \overline{x})$ である．

- デデキント-ペアノの公理系の問題点: "すべての性質" といったときの "性質" が何か (どの範囲で考えているものなのか) が明らかでない．この問題を解決するために，**論理の形式化** (formalization of the logic) を行なう．

等号の公理 (前回の復習)

- ペアノによるデデキント-ペアノの公理系の定義では，現在では論理の公理とみなされ，数学的公理には含めない次のような等号の公理も含まれている:

e_1: すべての x に対し $x \equiv x$ である．

e_2: すべての x, y に対し，$x \equiv y$ なら $y \equiv x$ である．

e_3: すべての x, y, z に対し，$x \equiv y$ かつ $y \equiv z$ なら $x \equiv z$ である．

e_4: すべての x, x' に対し $x \equiv x'$ なら $S(x) \equiv S(x')$ である．

e_5: すべての x, x', y, y' に対して，$x \equiv x'$ かつ $y \equiv y'$ なら，$x + y \equiv x' + y'$ かつ $x \cdot y \equiv x' \cdot y'$ である．

e_6: すべての x, x' とすべての性質 $\varphi(x, \overline{x})$ に対し，$x \equiv x'$ なら，$\varphi(x, \overline{x}) \;\Leftrightarrow\; \varphi(x', \overline{x})$ である．

- デデキント-ペアノの公理系の問題点: “すべての性質” といったときの“性質” が何か (どの範囲で考えているものなのか) が明らかでない. この問題を解決するために，**論理の形式化** (formalization of the logic) を行なう．

デデキントとペアノ

- デデキント (Richard Dedekind, (1831(天保 2) 年 — 1916(大正 5 年), Braunschweig, ドイツ) は, 1888 年刊の次の本で, 自然数の理論の基礎付けを行なっている:

  - 数とは何かそして何であるべきか？ (Was sind und was sollen die Zahlen?) 初版: 1888(明治 21) 年, 第 6 版: 1930(昭和 5) 年).

  o デデキント著, 河野 伊三郎 訳, 数について — 連続性と数の本質, 岩波文庫 (1961).

  o デデキント著, 渕野 昌 訳・解説, 数とは何かそして何であるべきか, ちくま学芸文庫, 近刊.

デデキントとペアノ

- デデキント (Richard Dedekind, (1831(天保 2) 年 — 1916(大正 5 年), Braunschweig, ドイツ) は, 1888 年刊の次の本で, 自然数の理論の基礎付けを行なっている:
  - 数とは何かそして何であるべきか？ (Was sind und was sollen die Zahlen?) 初版: 1888(明治 21) 年, 第 6 版: 1930(昭和 5) 年).
  - デデキント著, 河野 伊三郎 訳, 数について — 連続性と数の本質, 岩波文庫 (1961).
  - デデキント著, 渕野 昌 訳・解説, 数とは何かそして何であるべきか, ちくま学芸文庫, 近刊.

デデキントとペアノ

- デデキント (Richard Dedekind, (1831(天保 2) 年 — 1916(大正 5 年), Braunschweig, ドイツ) は, 1888 年刊の次の本で, 自然数の理論の基礎付けを行なっている:

  - 数とは何かそして何であるべきか？ (Was sind und was sollen die Zahlen?) 初版: 1888(明治 21) 年, 第 6 版: 1930(昭和 5) 年).
  - デデキント著, 河野 伊三郎 訳, 数について — 連続性と数の本質, 岩波文庫 (1961).
  - デデキント著, 渕野 昌 訳・解説, 数とは何かそして何であるべきか, ちくま学芸文庫, 近刊.

デデキントとペアノ

- デデキント (Richard Dedekind, (1831(天保 2) 年 — 1916(大正 5 年), Braunschweig, ドイツ) は, 1888 年刊の次の本で, 自然数の理論の基礎付けを行なっている:
  - 数とは何かそして何であるべきか？ (Was sind und was sollen die Zahlen?) 初版: 1888(明治 21) 年, 第 6 版: 1930(昭和 5) 年).
  - デデキント著, 河野 伊三郎 訳, 数について — 連続性と数の本質, 岩波文庫 (1961).
  - デデキント著, 渕野 昌 訳・解説, 数とは何かそして何であるべきか, ちくま学芸文庫, 近刊.

デデキントとペアノ (2/2)

- ペアノ (Giuseppe Peano, 1858(安政 5) 年 – 1932(昭和 7) 年, Cuneo – Torino, イタリア) は，1889 (明治 22) 年 にデデキントが『数とは何か何であるべきか』で自然数の全体の基本性質として示したものを整理して公理系としてまとめた．

- デデキントは，数 (の全体) を数学的な世界で構成して，それに対して成りたつ基本性質を抽出したのに対し，ペアノは，この基本性質を，自然数の全体を規定する公理としてとらえ直した．

デデキントとペアノ (2/2)

- ペアノ (Giuseppe Peano, 1858(安政 5) 年 – 1932(昭和 7) 年, Cuneo – Torino, イタリア) は, 1889 (明治 22) 年 にデデキントが『数とは何か何であるべきか』で自然数の全体の基本性質として示したものを整理して公理系としてまとめた.

- デデキントは, 数 (の全体) を数学的な世界で構成して, それに対して成りたつ基本性質を抽出したのに対し, ペアノは, この基本性質を, 自然数の全体を規定する公理としてとらえ直した.

デデキントとペアノ (2/2)

- ペアノ (Giuseppe Peano, 1858(安政 5) 年 – 1932(昭和 7) 年, Cuneo – Torino, イタリア) は, 1889 (明治 22) 年 にデデキントが『数とは何か何であるべきか』で自然数の全体の基本性質として示したものを整理して公理系としてまとめた.

- デデキントは, 数 (の全体) を数学的な世界で構成して, それに対して成りたつ基本性質を抽出したのに対し, ペアノは, この基本性質を, 自然数の全体を規定する公理としてとらえ直した.

論理の形式化

- 数学であらわれる論理的な表現を以下のようにして記号で置き換える:
  - “φ かつ ψ が成り立つ”, “φ または ψ が成り立つ”, “φ が成り立つなら ψ が成り立つ”、 “φ でない” をそれぞれ, $(\varphi \wedge \psi)$, $(\varphi \vee \psi)$, $(\varphi \rightarrow \psi)$, $\neg\varphi$ であらわす.
  - “すべての x に対し, φ である”, “ある x に対し, φ が成り立つ” をそれぞれ $\forall x\, \varphi$, $\exists x\, \varphi$ であらわす.
  - 0, S, $+$, $\cdot$ と変数記号を組み合わせてできる表現 (項) に関する等式から出発して, 上の $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\neg$, $\forall$, $\exists$ を正しく組み合わせてできる表現を, **(PA の) 論理式** (formula of PA) とよぶことにする.
- これを使って, (形式論理での) ペアノの公理系 (PA) を, 次のように規定することができる.

論理の形式化

- 数学であらわれる論理的な表現を以下のようにして記号で置き換える:
  - "φ かつ ψ が成り立つ", "φ または ψ が成り立つ", "φ が成り立つなら ψ が成り立つ"、 "φ でない" をそれぞれ, $(\varphi \wedge \psi)$, $(\varphi \vee \psi)$, $(\varphi \rightarrow \psi)$, $\neg\varphi$ であらわす.
  - "すべての x に対し, φ である", "ある x に対し, φ が成り立つ" をそれぞれ $\forall x\, \varphi$, $\exists x\, \varphi$ であらわす.
  - 0, S, $+$, $\cdot$ と変数記号を組み合わせてできる表現 (項) に関する等式から出発して, 上の $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\neg$, $\forall$, $\exists$ を正しく組み合わせてできる表現を, **(PA の) 論理式** (formula of PA) とよぶことにする.
- これを使って, (形式論理での) ペアノの公理系 (PA) を, 次のように規定することができる.

論理の形式化

- 数学であらわれる論理的な表現を以下のようにして記号で置き換える:
  - “φ かつ ψ が成り立つ”, “φ または ψ が成り立つ”, “φ が成り立つなら ψ が成り立つ”、 “φ でない” をそれぞれ, $(\varphi \land \psi)$, $(\varphi \lor \psi)$, $(\varphi \to \psi)$, $\neg\varphi$ であらわす.
  - “すべての x に対し, φ である”, “ある x に対し, φ が成り立つ” をそれぞれ $\forall x\, \varphi$, $\exists x\, \varphi$ であらわす.
  - 0, S, $+$, $\cdot$ と変数記号を組み合わせてできる表現 (項) に関する等式から出発して, 上の $\land$, $\lor$, $\to$, $\neg$, $\forall$, $\exists$ を正しく組み合わせてできる表現を, **(PA の) 論理式** (formula of PA) とよぶことにする.
- これを使って, (形式論理での) ペアノの公理系 (PA) を, 次のように規定することができる.

論理の形式化

- 数学であらわれる論理的な表現を以下のようにして記号で置き換える:
  - “φ かつ ψ が成り立つ”, “φ または ψ が成り立つ”, “φ が成り立つなら ψ が成り立つ”、 “φ でない” をそれぞれ, $(\varphi \wedge \psi)$, $(\varphi \vee \psi)$, $(\varphi \to \psi)$, $\neg\varphi$ であらわす.
  - “すべての x に対し, φ である”, “ある x に対し, φ が成り立つ” をそれぞれ $\forall x\, \varphi$, $\exists x\, \varphi$ であらわす.
  - 0, S, $+$, $\cdot$ と変数記号を組み合わせてできる表現 (項) に関する等式から出発して, 上の $\wedge$, $\vee$, $\to$, $\neg$, $\forall$, $\exists$ を正しく組み合わせてできる表現を, **(PA の) 論理式** (formula of PA) とよぶことにする.
- これを使って, (形式論理での) ペアノの公理系 (PA) を, 次のように規定することができる.

論理の形式化

- 数学であらわれる論理的な表現を以下のようにして記号で置き換える:
  - "φ かつ ψ が成り立つ", "φ または ψ が成り立つ", "φ が成り立つなら ψ が成り立つ"、 "φ でない" をそれぞれ, $(\varphi \wedge \psi)$, $(\varphi \vee \psi)$, $(\varphi \to \psi)$, $\neg\varphi$ であらわす.
  - "すべての x に対し, φ である", "ある x に対し, φ が成り立つ" をそれぞれ $\forall x\, \varphi$, $\exists x\, \varphi$ であらわす.
  - 0, S, $+$, $\cdot$ と変数記号を組み合わせてできる表現 (項) に関する等式から出発して, 上の $\wedge$, $\vee$, $\to$, $\neg$, $\forall$, $\exists$ を正しく組み合わせてできる表現を, **(PA の) 論理式** (formula of PA) とよぶことにする.
- これを使って, (形式論理での) ペアノの公理系 (PA) を, 次のように規定することができる.

論理の形式化

- 数学であらわれる論理的な表現を以下のようにして記号で置き換える:
  - “φ かつ ψ が成り立つ”, “φ または ψ が成り立つ”, “φ が成り立つなら ψ が成り立つ”、 “φ でない” をそれぞれ, $(\varphi \wedge \psi)$, $(\varphi \vee \psi)$, $(\varphi \to \psi)$, $\neg\varphi$ であらわす.
  - “すべての x に対し, φ である”, “ある x に対し, φ が成り立つ” をそれぞれ $\forall x\, \varphi$, $\exists x\, \varphi$ であらわす.
  - 0, S, $+$, $\cdot$ と変数記号を組み合わせてできる表現 (項) に関する等式から出発して, 上の $\wedge$, $\vee$, $\to$, $\neg$, $\forall$, $\exists$ を正しく組み合わせてできる表現を, **(PA の) 論理式** (formula of PA) とよぶことにする.

- これを使って, (形式論理での) ペアノの公理系 (PA) を, 次のように規定することができる.

形式論理でのペアノの公理系 (PA)

p_1: $\forall x \forall y (\neg x \equiv y \to \neg S(x) \equiv S(y))$

p_2: $\forall x \neg 0 \equiv S(x)$

p_3: $\forall x (\neg x \equiv 0 \to \exists y\, S(y) \equiv x)$

a_1: $\forall x\, x + 0 \equiv x$

a_2: $\forall x \forall y\, x + S(y) \equiv S(x + y)$

m_1: $\forall x\, x \cdot 0 \equiv 0$

m_2: $\forall x \forall y\, x \cdot S(y) \equiv (x \cdot y) + x$

(帰納法の原理) すべての PA の論理式 $\varphi(x, x_1, \dots, x_n)$ に対し,

$$
\begin{aligned}
p_\varphi:\quad & \forall x_1 \cdots \forall x_n (\varphi(0, x_1, \dots, x_n) \\
& \wedge \forall x\, (\varphi(x, x_1, \dots, x_n) \to \varphi(S(x), x_1, \dots, x_n)) \\
& \to \forall x\, \varphi(x, x_1, \dots, x_n))
\end{aligned}
$$

演習問題 等号の公理を形式的論理で書き直してみてください.

形式論理でのペアノの公理系 (PA)

p_1: $\forall x \forall y (\neg x \equiv y \to \neg S(x) \equiv S(y))$

p_2: $\forall x\, \neg 0 \equiv S(x)$

p_3: $\forall x\, (\neg x \equiv 0 \to \exists y\, S(y) \equiv x)$

a_1: $\forall x\, x + 0 \equiv x$ m_1: $\forall x\, x \cdot 0 \equiv 0$

a_2: $\forall x \forall y\, x + S(y) \equiv S(x + y)$ m_2: $\forall x \forall y\, x \cdot S(y) \equiv (x \cdot y) + x$

(帰納法の原理) すべての PA の論理式 $\varphi(x, x_1, \ldots, x_n)$ に対し,

$$\begin{aligned} p_\varphi\colon\quad & \forall x_1 \cdots \forall x_n (\varphi(0, x_1, \ldots, x_n) \\ & \wedge \forall x\, (\varphi(x, x_1, \ldots, x_n) \to \varphi(S(x), x_1, \ldots, x_n)) \\ & \to \forall x\, \varphi(x, x_1, \ldots, x_n)) \end{aligned}$$

演習問題 等号の公理を形式的論理で書き直してみてください.

形式論理でのペアノの公理系 (PA)

p_1: $\forall x \forall y (\neg x \equiv y \to \neg S(x) \equiv S(y))$

p_2: $\forall x \neg 0 \equiv S(x)$

p_3: $\forall x (\neg x \equiv 0 \to \exists y\, S(y) \equiv x)$

a_1: $\forall x\, x + 0 \equiv x$

a_2: $\forall x \forall y\, x + S(y) \equiv S(x+y)$

m_1: $\forall x\, x \cdot 0 \equiv 0$

m_2: $\forall x \forall y\, x \cdot S(y) \equiv (x \cdot y) + x$

(帰納法の原理) すべての PA の論理式 $\varphi(x, x_1, \ldots, x_n)$ に対し,

$$p_\varphi: \quad \forall x_1 \cdots \forall x_n (\varphi(0, x_1, \ldots, x_n) \wedge \forall x (\varphi(x, x_1, \ldots, x_n) \to \varphi(S(x), x_1, \ldots, x_n)) \to \forall x\, \varphi(x, x_1, \ldots, x_n))$$

演習問題 等号の公理を形式的論理で書き直してみてください.

形式論理でのペアノの公理系 (PA)

p_1: $\forall x \forall y (\neg x \equiv y \to \neg S(x) \equiv S(y))$

p_2: $\forall x\, \neg 0 \equiv S(x)$

p_3: $\forall x\, (\neg x \equiv 0 \to \exists y\, S(y) \equiv x)$

a_1: $\forall x\, x + 0 \equiv x$ $\quad m_1$: $\forall x\, x \cdot 0 \equiv 0$

a_2: $\forall x \forall y\, x + S(y) \equiv S(x+y)$ $\quad m_2$: $\forall x \forall y\, x \cdot S(y) \equiv (x \cdot y) + x$

(帰納法の原理) すべての PA の論理式 $\varphi(x, x_1, \ldots, x_n)$ に対し,

$$
\begin{aligned}
p_\varphi:\quad & \forall x_1 \cdots \forall x_n (\varphi(0, x_1, \ldots, x_n) \\
& \wedge \forall x\, (\varphi(x, x_1, \ldots, x_n) \to \varphi(S(x), x_1, \ldots, x_n)) \\
& \to \forall x\, \varphi(x, x_1, \ldots, x_n))
\end{aligned}
$$

演習問題 等号の公理を形式的論理で書き直してみてください.

形式論理でのペアノの公理系 (PA)

$$p_1\colon\quad \forall x \forall y(\neg x \equiv y \rightarrow \neg S(x) \equiv S(y))$$
$$p_2\colon\quad \forall x\, \neg 0 \equiv S(x)$$
$$p_3\colon\quad \forall x\, (\neg x \equiv 0 \rightarrow \exists y\, S(y) \equiv x)$$

$$a_1\colon\quad \forall x\, x + 0 \equiv x \qquad m_1\colon\quad \forall x\, x \cdot 0 \equiv 0$$
$$a_2\colon\quad \forall x \forall y\, x + S(y) \equiv S(x+y) \qquad m_2\colon\quad \forall x \forall y\, x \cdot S(y) \equiv (x \cdot y) + x$$

(帰納法の原理) すべての PA の論理式 $\varphi(x, x_1, \ldots, x_n)$ に対し,

$$\begin{aligned} p_\varphi\colon\quad & \forall x_1 \cdots \forall x_n (\varphi(0, x_1, \ldots, x_n) \\ & \wedge \forall x\, (\varphi(x, x_1, \ldots, x_n) \rightarrow \varphi(S(x), x_1, \ldots, x_n)) \\ & \rightarrow \forall x\, \varphi(x, x_1, \ldots, x_n)) \end{aligned}$$

演習問題 等号の公理を形式的論理で書き直してみてください.

形式論理でのペアノの公理系 (PA)

p_1: $\forall x \forall y (\neg x \equiv y \to \neg S(x) \equiv S(y))$

p_2: $\forall x \, \neg 0 \equiv S(x)$

p_3: $\forall x \, (\neg x \equiv 0 \to \exists y \, S(y) \equiv x)$

a_1: $\forall x \, x + 0 \equiv x$ $\quad$ m_1: $\forall x \, x \cdot 0 \equiv 0$

a_2: $\forall x \forall y \, x + S(y) \equiv S(x + y)$ $\quad$ m_2: $\forall x \forall y \, x \cdot S(y) \equiv (x \cdot y) + x$

(帰納法の原理) すべての PA の論理式 $\varphi(x, x_1, \ldots, x_n)$ に対し,

$$
\begin{aligned}
p_\varphi\colon \quad & \forall x_1 \cdots \forall x_n (\varphi(0, x_1, \ldots, x_n) \\
& \wedge \forall x \, (\varphi(x, x_1, \ldots, x_n) \to \varphi(S(x), x_1, \ldots, x_n)) \\
& \to \forall x \, \varphi(x, x_1, \ldots, x_n))
\end{aligned}
$$

演習問題 等号の公理を形式的論理で書き直してみてください.

形式論理でのペアノの公理系 (PA)

p_1: $\forall x \forall y (\neg x \equiv y \to \neg S(x) \equiv S(y))$

p_2: $\forall x \, \neg 0 \equiv S(x)$

p_3: $\forall x \, (\neg x \equiv 0 \to \exists y \, S(y) \equiv x)$

a_1: $\forall x \, x + 0 \equiv x$ $\quad$ m_1: $\forall x \, x \cdot 0 \equiv 0$

a_2: $\forall x \forall y \, x + S(y) \equiv S(x + y)$ $\quad$ m_2: $\forall x \forall y \, x \cdot S(y) \equiv (x \cdot y) + x$

(帰納法の原理) すべての PA の論理式 $\varphi(x, x_1, \ldots, x_n)$ に対し,

$$
\begin{aligned}
p_\varphi: \quad & \forall x_1 \cdots \forall x_n (\varphi(0, x_1, \ldots, x_n) \\
& \wedge \forall x \, (\varphi(x, x_1, \ldots, x_n) \to \varphi(S(x), x_1, \ldots, x_n)) \\
& \to \forall x \, \varphi(x, x_1, \ldots, x_n))
\end{aligned}
$$

演習問題 等号の公理を形式的論理で書き直してみてください.

Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme I[1]).

Von **Kurt Gödel** in Wien.

1.

Die Entwicklung der Mathematik in der Richtung zu größerer Exaktheit hat bekanntlich dazu geführt, daß weite Gebiete von ihr formalisiert wurden, in der Art, daß das Beweisen nach einigen wenigen mechanischen Regeln vollzogen werden kann. Die umfassendsten derzeit aufgestellten formalen Systeme sind das System der Principia Mathematica (PM)[2]) einerseits, das Zermelo-Fraenkelsche (von J. v. Neumann weiter ausgebildete) Axiomensystem der Mengenlehre[3]) andererseits. Diese beiden Systeme sind so weit, daß alle heute in der Mathematik angewendeten Beweismethoden in ihnen formalisiert, d. h. auf einige wenige Axiome und Schlußregeln zurückgeführt sind. Es liegt daher die Vermutung nahe, daß diese Axiome und Schlußregeln dazu ausreichen, alle mathematischen Fragen, die sich in den betreffenden Systemen überhaupt formal ausdrücken lassen, auch zu entscheiden. Im folgenden wird gezeigt, daß dies

２つの不完全性定理が証明されたゲーデルの 1931(昭和 6) 年の論文の最初のページ．ただし，この論文では,「不完全性定理」という名称はまだ使われていない．