数理の世界 (数学の考え方) — ゲーデルの不完全性定理

形式論理の厳密な導入，(第 VI 回の講義)

Sakaé Fuchino (渕野 昌)

Dept. of Computer Sciences
Kobe University
(神戸大学大学院 システム情報学研究科)

http://kurt.scitec.kobe-u.ac.jp/~fuchino/

(18. November 2012 (15:42 JST) version)

神戸大学 2012 年後期の講義
於 K302 教室，月曜 8:50 – 10:20

November 12, 2012

This presentation is typeset by pLATEX with beamer class.

論理の形式化 (前回の復習)

- 数学であらわれる論理的な表現を以下のようにして記号で置き換える:

“論理的表現”	記号表現
“φ かつ ψ が成り立つ”	$(\varphi \wedge \psi)$
“φ または ψ が成り立つ”	$(\varphi \vee \psi)$
“φ が成り立つなら ψ が成り立つ”	$(\varphi \rightarrow \psi)$
“φ が成り立たない”	$\neg\varphi$
“ある x に対して φ が成り立つ”	$\exists x\, \varphi$
“すべての x に対して φ が成り立つ”	$\forall x\, \varphi$

- 理論 T で用意されている，定数記号，関数記号，関係記号を使って作れる等式や関係式から出発して，$\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\neg$, $\exists$, $\forall$ の (正しい) 適用によって得られる表現のことを T の **論理式** (formula) とよぶ.
- 以上の概念を使うと，(形式論理での) ペアノの公理系 (PA) を，次のように規定することができる.

論理の形式化 (前回の復習)

- 数学であらわれる論理的な表現を以下のようにして記号で置き換える:

"論理的表現"	記号表現
"φ かつ ψ が成り立つ"	$(\varphi \land \psi)$
"φ または ψ が成り立つ"	$(\varphi \lor \psi)$
"φ が成り立つなら ψ が成り立つ"	$(\varphi \to \psi)$
"φ が成り立たない"	$\neg\varphi$
"ある x に対して φ が成り立つ"	$\exists x\, \varphi$
"すべての x に対して φ が成り立つ"	$\forall x\, \varphi$

- 理論 T で用意されている，定数記号，関数記号，関係記号を使って作れる等式や関係式から出発して，$\land$, $\lor$, $\to$, $\neg$, $\exists$, $\forall$ の (正しい) 適用によって得られる表現のことを T の **論理式** (formula) とよぶ.
- 以上の概念を使うと，(形式論理での) ペアノの公理系 (PA) を，次のように規定することができる.

論理の形式化 (前回の復習)

- 数学であらわれる論理的な表現を以下のようにして記号で置き換える:

“論理的表現”	記号表現
“φ かつ ψ が成り立つ”	$(\varphi \wedge \psi)$
“φ または ψ が成り立つ”	$(\varphi \vee \psi)$
“φ が成り立つなら ψ が成り立つ”	$(\varphi \rightarrow \psi)$
“φ が成り立たない”	$\neg\varphi$
“ある x に対して φ が成り立つ”	$\exists x\, \varphi$
“すべての x に対して φ が成り立つ”	$\forall x\, \varphi$

- 理論 T で用意されている，定数記号，関数記号，関係記号を使って作れる等式や関係式から出発して，$\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\neg$, $\exists$, $\forall$ の (正しい) 適用によって得られる表現のことを T の **論理式** (formula) とよぶ.
- 以上の概念を使うと，(形式論理での) ペアノの公理系 (PA) を，次のように規定することができる.

論理の形式化 (前回の復習)

- 数学であらわれる論理的な表現を以下のようにして記号で置き換える:

“論理的表現”	記号表現
“φ かつ ψ が成り立つ”	$(\varphi \land \psi)$
“φ または ψ が成り立つ”	$(\varphi \lor \psi)$
“φ が成り立つなら ψ が成り立つ”	$(\varphi \to \psi)$
“φ が成り立たない”	$\neg\varphi$
“ある x に対して φ が成り立つ”	$\exists x\, \varphi$
“すべての x に対して φ が成り立つ”	$\forall x\, \varphi$

- 理論 T で用意されている, 定数記号, 関数記号, 関係記号を使って作れる等式や関係式から出発して, $\land$, $\lor$, $\to$, $\neg$, $\exists$, $\forall$ の (正しい) 適用によって得られる表現のことを T の **論理式** (formula) とよぶ.
- 以上の概念を使うと, (形式論理での) ペアノの公理系 (PA) を, 次のように規定することができる.

論理の形式化 (前回の復習)

- 数学であらわれる論理的な表現を以下のようにして記号で置き換える:

“論理的表現”		記号表現
“φ かつ ψ が成り立つ”	....	$(\varphi \wedge \psi)$
“φ または ψ が成り立つ”	....	$(\varphi \vee \psi)$
“φ が成り立つなら ψ が成り立つ”	....	$(\varphi \to \psi)$
“φ が成り立たない”	....	$\neg\varphi$
“ある x に対して φ が成り立つ”	....	$\exists x\, \varphi$
“すべての x に対して φ が成り立つ”	....	$\forall x\, \varphi$

- 理論 T で用意されている，定数記号，関数記号，関係記号を使って作れる等式や関係式から出発して，$\wedge$, $\vee$, $\to$, $\neg$, $\exists$, $\forall$ の (正しい) 適用によって得られる表現のことを T の **論理式** (formula) とよぶ.
- 以上の概念を使うと，(形式論理での) ペアノの公理系 (PA) を，次のように規定することができる.

論理の形式化 (前回の復習)

- 数学であらわれる論理的な表現を以下のようにして記号で置き換える:

“論理的表現”	記号表現
“φ かつ ψ が成り立つ”	$(\varphi \wedge \psi)$
“φ または ψ が成り立つ”	$(\varphi \vee \psi)$
“φ が成り立つなら ψ が成り立つ”	$(\varphi \rightarrow \psi)$
“φ が成り立たない”	$\neg\varphi$
“ある x に対して φ が成り立つ”	$\exists x\, \varphi$
“すべての x に対して φ が成り立つ”	$\forall x\, \varphi$

- 理論 T で用意されている，定数記号，関数記号，関係記号を使って作れる等式や関係式から出発して，$\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\neg$, $\exists$, $\forall$ の (正しい) 適用によって得られる表現のことを T の **論理式** (formula) とよぶ.
- 以上の概念を使うと，(形式論理での) ペアノの公理系 (PA) を，次のように規定することができる.

論理の形式化 (前回の復習)

- 数学であらわれる論理的な表現を以下のようにして記号で置き換える:

“論理的表現”	記号表現
“φ かつ ψ が成り立つ”	$(\varphi \land \psi)$
“φ または ψ が成り立つ”	$(\varphi \lor \psi)$
“φ が成り立つなら ψ が成り立つ”	$(\varphi \to \psi)$
“φ が成り立たない”	$\neg\varphi$
“ある x に対して φ が成り立つ”	$\exists x\, \varphi$
“すべての x に対して φ が成り立つ”	$\forall x\, \varphi$

- 理論 T で用意されている，定数記号，関数記号，関係記号を使って作れる等式や関係式から出発して，$\land$, $\lor$, $\to$, $\neg$, $\exists$, $\forall$ の (正しい) 適用によって得られる表現のことを T の **論理式** (formula) とよぶ.
- 以上の概念を使うと，(形式論理での) ペアノの公理系 (PA) を，次のように規定することができる.

論理の形式化 (前回の復習)

- 数学であらわれる論理的な表現を以下のようにして記号で置き換える:

“論理的表現”	記号表現
“φ かつ ψ が成り立つ”	$(\varphi \wedge \psi)$
“φ または ψ が成り立つ”	$(\varphi \vee \psi)$
“φ が成り立つなら ψ が成り立つ”	$(\varphi \rightarrow \psi)$
“φ が成り立たない”	$\neg\varphi$
“ある x に対して φ が成り立つ”	$\exists x\, \varphi$
“すべての x に対して φ が成り立つ”	$\forall x\, \varphi$

- 理論 T で用意されている，定数記号，関数記号，関係記号を使って作れる等式や関係式から出発して，$\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\neg$, $\exists$, $\forall$ の (正しい) 適用によって得られる表現のことを T の **論理式** (formula) とよぶ.
- 以上の概念を使うと，(形式論理での) ペアノの公理系 (PA) を，次のように規定することができる.

論理の形式化 (前回の復習)

- 数学であらわれる論理的な表現を以下のようにして記号で置き換える:

“論理的表現”	記号表現
“φ かつ ψ が成り立つ”	$(\varphi \wedge \psi)$
“φ または ψ が成り立つ”	$(\varphi \vee \psi)$
“φ が成り立つなら ψ が成り立つ”	$(\varphi \rightarrow \psi)$
“φ が成り立たない”	$\neg\varphi$
“ある x に対して φ が成り立つ”	$\exists x\, \varphi$
“すべての x に対して φ が成り立つ”	$\forall x\, \varphi$

- 理論 T で用意されている，定数記号，関数記号，関係記号を使って作れる等式や関係式から出発して，$\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\neg$, $\exists$, $\forall$ の (正しい) 適用によって得られる表現のことを T の **論理式** (formula) とよぶ.
- 以上の概念を使うと，(形式論理での) ペアノの公理系 (PA) を，次のように規定することができる.

論理の形式化 (前回の復習)

- 数学であらわれる論理的な表現を以下のようにして記号で置き換える:

“論理的表現”		記号表現
“φ かつ ψ が成り立つ”	....	$(\varphi \wedge \psi)$
“φ または ψ が成り立つ”	....	$(\varphi \vee \psi)$
“φ が成り立つなら ψ が成り立つ”	....	$(\varphi \rightarrow \psi)$
“φ が成り立たない”	....	$\neg\varphi$
“ある x に対して φ が成り立つ”	....	$\exists x\, \varphi$
“すべての x に対して φ が成り立つ”	....	$\forall x\, \varphi$

- 理論 T で用意されている，定数記号，関数記号，関係記号を使って作れる等式や関係式から出発して，$\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\neg$, $\exists$, $\forall$ の (正しい) 適用によって得られる表現のことを T の **論理式** (formula) とよぶ.
- 以上の概念を使うと，(形式論理での) ペアノの公理系 (PA) を，次のように規定することができる.

論理の形式化 (前回の復習)

- 数学であらわれる論理的な表現を以下のようにして記号で置き換える:

“論理的表現”		記号表現
“φ かつ ψ が成り立つ”	....	$(\varphi \land \psi)$
“φ または ψ が成り立つ”	....	$(\varphi \lor \psi)$
“φ が成り立つなら ψ が成り立つ”	....	$(\varphi \to \psi)$
“φ が成り立たない”	....	$\neg\varphi$
“ある x に対して φ が成り立つ”	....	$\exists x\,\varphi$
“すべての x に対して φ が成り立つ”	....	$\forall x\,\varphi$

- 理論 T で用意されている，定数記号，関数記号，関係記号を使って作れる等式や関係式から出発して，$\land$, $\lor$, $\to$, $\neg$, $\exists$, $\forall$ の (正しい) 適用によって得られる表現のことを T の **論理式** (formula) とよぶ.
- 以上の概念を使うと，(形式論理での) ペアノの公理系 (PA) を，次のように規定することができる.

形式論理でのペアノの公理系 (復習)

p_1: $\forall x \forall y (\neg x \equiv y \to \neg S(x) \equiv S(y))$

p_2: $\forall x \, \neg 0 \equiv S(x)$

p_3: $\forall x \, (\neg x \equiv 0 \to \exists y \, S(y) \equiv x)$

a_1: $\forall x \, x + 0 \equiv x$

a_2: $\forall x \forall y \, x + S(y) \equiv S(x + y)$

m_1: $\forall x \, x \cdot 0 \equiv 0$

m_2: $\forall x \forall y \, x \cdot S(y) \equiv (x \cdot y) + x$

(帰納法の原理) すべての PA の論理式 $\varphi(x, x_1, \dots, x_n)$ に対し,

$$
\begin{aligned}
p_\varphi: \quad & \forall x_1 \cdots \forall x_n ((\varphi(0, x_1, \dots, x_n) \\
& \wedge \forall x \, (\varphi(x, x_1, \dots, x_n) \to \varphi(S(x), x_1, \dots, x_n))) \\
& \to \forall x \, \varphi(x, x_1, \dots, x_n))
\end{aligned}
$$

形式論理でのペアノの公理系 (復習)

p_1: $\forall x \forall y (\neg x \equiv y \to \neg S(x) \equiv S(y))$

p_2: $\forall x \neg 0 \equiv S(x)$

p_3: $\forall x (\neg x \equiv 0 \to \exists y\, S(y) \equiv x)$

a_1: $\forall x\, x + 0 \equiv x$

a_2: $\forall x \forall y\, x + S(y) \equiv S(x + y)$

m_1: $\forall x\, x \cdot 0 \equiv 0$

m_2: $\forall x \forall y\, x \cdot S(y) \equiv (x \cdot y) + x$

(帰納法の原理) すべての PA の論理式 $\varphi(x, x_1, \ldots, x_n)$ に対し,

$$p_\varphi: \quad \forall x_1 \cdots \forall x_n ((\varphi(0, x_1, \ldots, x_n) \land \forall x (\varphi(x, x_1, \ldots, x_n) \to \varphi(S(x), x_1, \ldots, x_n))) \to \forall x\, \varphi(x, x_1, \ldots, x_n))$$

形式論理でのペアノの公理系 (復習)

p_1: $\forall x \forall y (\neg x \equiv y \to \neg S(x) \equiv S(y))$

p_2: $\forall x \, \neg 0 \equiv S(x)$

p_3: $\forall x \, (\neg x \equiv 0 \to \exists y \, S(y) \equiv x)$

a_1: $\forall x \, x + 0 \equiv x$

a_2: $\forall x \forall y \, x + S(y) \equiv S(x+y)$

m_1: $\forall x \, x \cdot 0 \equiv 0$

m_2: $\forall x \forall y \, x \cdot S(y) \equiv (x \cdot y) + x$

(帰納法の原理) すべての PA の論理式 $\varphi(x, x_1, \ldots, x_n)$ に対し,

$$
\begin{aligned}
p_\varphi: \quad & \forall x_1 \cdots \forall x_n ((\varphi(0, x_1, \ldots, x_n) \\
& \wedge \forall x \, (\varphi(x, x_1, \ldots, x_n) \to \varphi(S(x), x_1, \ldots, x_n))) \\
& \to \forall x \, \varphi(x, x_1, \ldots, x_n))
\end{aligned}
$$

形式論理でのペアノの公理系 (復習)

$$p_1: \quad \forall x \forall y(\neg x \equiv y \to \neg S(x) \equiv S(y))$$
$$p_2: \quad \forall x \, \neg 0 \equiv S(x)$$
$$p_3: \quad \forall x \, (\neg x \equiv 0 \to \exists y \, S(y) \equiv x)$$

$a_1: \quad \forall x \, x + 0 \equiv x$ $\qquad$ $m_1: \quad \forall x \, x \cdot 0 \equiv 0$

$a_2: \quad \forall x \forall y \, x + S(y) \equiv S(x+y)$ $\qquad$ $m_2: \quad \forall x \forall y \, x \cdot S(y) \equiv (x \cdot y) + x$

(帰納法の原理) すべての PA の論理式 $\varphi(x, x_1, \ldots, x_n)$ に対し,

$$\begin{aligned} p_\varphi: \quad & \forall x_1 \cdots \forall x_n ((\varphi(0, x_1, \ldots, x_n) \\ & \wedge \forall x \, (\varphi(x, x_1, \ldots, x_n) \to \varphi(S(x), x_1, \ldots, x_n))) \\ & \to \forall x \, \varphi(x, x_1, \ldots, x_n)) \end{aligned}$$

形式論理でのペアノの公理系 (復習)

$$p_1\colon \quad \forall x \forall y (\neg x \equiv y \to \neg S(x) \equiv S(y))$$
$$p_2\colon \quad \forall x\, \neg 0 \equiv S(x)$$
$$p_3\colon \quad \forall x\, (\neg x \equiv 0 \to \exists y\, S(y) \equiv x)$$

$$a_1\colon \quad \forall x\, x + 0 \equiv x \qquad m_1\colon \quad \forall x\, x \cdot 0 \equiv 0$$
$$a_2\colon \quad \forall x \forall y\, x + S(y) \equiv S(x + y) \qquad m_2\colon \quad \forall x \forall y\, x \cdot S(y) \equiv (x \cdot y) + x$$

(帰納法の原理) すべての PA の論理式 $\varphi(x, x_1, \ldots, x_n)$ に対し,

$$\begin{aligned} p_\varphi\colon \quad & \forall x_1 \cdots \forall x_n ((\varphi(0, x_1, \ldots, x_n) \\ & \wedge \forall x\, (\varphi(x, x_1, \ldots, x_n) \to \varphi(S(x), x_1, \ldots, x_n))) \\ & \to \forall x\, \varphi(x, x_1, \ldots, x_n)) \end{aligned}$$

形式論理でのペアノの公理系 (復習)

p_1: $\forall x \forall y (\neg x \equiv y \to \neg S(x) \equiv S(y))$

p_2: $\forall x \, \neg 0 \equiv S(x)$

p_3: $\forall x \, (\neg x \equiv 0 \to \exists y \, S(y) \equiv x)$

a_1: $\forall x \, x + 0 \equiv x$

a_2: $\forall x \forall y \, x + S(y) \equiv S(x + y)$

m_1: $\forall x \, x \cdot 0 \equiv 0$

m_2: $\forall x \forall y \, x \cdot S(y) \equiv (x \cdot y) + x$

(帰納法の原理) すべての PA の論理式 $\varphi(x, x_1, \ldots, x_n)$ に対し,

$$
\begin{aligned}
p_\varphi\colon \quad & \forall x_1 \cdots \forall x_n ((\varphi(0, x_1, \ldots, x_n) \\
& \wedge \forall x \, (\varphi(x, x_1, \ldots, x_n) \to \varphi(S(x), x_1, \ldots, x_n))) \\
& \to \forall x \, \varphi(x, x_1, \ldots, x_n))
\end{aligned}
$$

論理式の厳密な導入 (1/4)

▷ 形式的体系の論理式の概念は，次のようにして厳密に導入することができる．

- 変数記号 $x, y, z, \ldots, x_1, x_2, \ldots$ etc. を無限個用意しておく．
- 定数記号，関数記号，関係記号 (たとえば大小関係をあらわす記号 $\leq$ など) を集めたものを **言語** (language) とよぶ．
- L を言語とするとき，L-項を，次で帰納的に得られる記号列のこととする．(L-項の概念は多項式の概念の一般化である)

a) 変数記号や L の定数記号 (からなる長さ 1 の記号列) は L-項である

b) f が L の n 変数の関数記号で，$t_1, \ldots, t_n$ が L-項のとき，$f(t_1, \ldots, t_n)$ は L-項である．

c) L-項は 上の *a*), *b*) の繰り返し適用によって得られる記号列に限る．

論理式の厳密な導入 (1/4)

▷ 形式的体系の論理式の概念は，次のようにして厳密に導入することができる．

▶ 変数記号 $x, y, z, \ldots, x_1, x_2, \ldots$ etc. を無限個用意しておく．

▶ 定数記号，関数記号，関係記号 (たとえば大小関係をあらわす記号 $\leq$ など) を集めたものを **言語** (language) とよぶ．

▶ L を言語とするとき，L-項を，次で帰納的に得られる記号列のこととする．(L-項の概念は多項式の概念の一般化である)

a) 変数記号や L の定数記号 (からなる長さ 1 の記号列) は L-項である

b) f が L の n 変数の関数記号で，$t_1, \ldots, t_n$ が L-項のとき，$f(t_1, \ldots, t_n)$ は L-項である．

c) L-項は 上の a), b) の繰り返し適用によって得られる記号列に限る．

論理式の厳密な導入 (1/4)

▷ 形式的体系の論理式の概念は，次のようにして厳密に導入することができる．

▶ 変数記号 x, y, z,..., x_1, x_2,... etc. を無限個用意しておく．

▶ 定数記号，関数記号，関係記号 (たとえば大小関係をあらわす記号 $\leq$ など) を集めたものを **言語** (language) とよぶ．

▶ L を言語とするとき，L-項を，次で帰納的に得られる記号列のこととする．(L-項の概念は多項式の概念の一般化である)

a) 変数記号や L の定数記号 (からなる長さ 1 の記号列) は L-項である

b) f が L の n 変数の関数記号で，$t_1, \ldots, t_n$ が L-項のとき，$f(t_1, \ldots, t_n)$ は L-項である．

c) L-項は 上の a), b) の繰り返し適用によって得られる記号列に限る．

論理式の厳密な導入 (1/4)

▷ 形式的体系の論理式の概念は，次のようにして厳密に導入することができる．

- 変数記号 x, y, z,..., x_1, x_2,... etc. を無限個用意しておく．
- 定数記号，関数記号，関係記号 (たとえば大小関係をあらわす記号 $\leq$ など) を集めたものを **言語** (language) とよぶ．
- L を言語とするとき，L-項を，次で帰納的に得られる記号列のこととする．(L-項の概念は多項式の概念の一般化である)

a) 変数記号や L の定数記号 (からなる長さ 1 の記号列) は L-項である

b) f が L の n 変数の関数記号で，$t_1, \ldots, t_n$ が L-項のとき，$f(t_1, \ldots, t_n)$ は L-項である．

c) L-項は 上の a), b) の繰り返し適用によって得られる記号列に限る．

論理式の厳密な導入 (1/4)

▷ 形式的体系の論理式の概念は，次のようにして厳密に導入することができる．

- 変数記号 x, y, z,…, x_1, x_2,… etc. を無限個用意しておく．
- 定数記号，関数記号，関係記号 (たとえば大小関係をあらわす記号 $\leq$ など) を集めたものを **言語** (language) とよぶ．
- L を言語とするとき，L-項を，次で帰納的に得られる記号列のこととする．(L-項の概念は多項式の概念の一般化である)

a) 変数記号や L の定数記号 (からなる長さ 1 の記号列) は L-項である

b) f が L の n 変数の関数記号で，$t_1, \ldots, t_n$ が L-項のとき，$f(t_1, \ldots, t_n)$ は L-項である．

c) L-項は 上の a), b) の繰り返し適用によって得られる記号列に限る．

論理式の厳密な導入 (1/4)

▷ 形式的体系の論理式の概念は，次のようにして厳密に導入することができる．

- 変数記号 x, y, z,..., x_1, x_2,... etc. を無限個用意しておく．
- 定数記号，関数記号，関係記号 (たとえば大小関係をあらわす記号 $\leq$ など) を集めたものを **言語** (language) とよぶ．
- L を言語とするとき，L-項を，次で帰納的に得られる記号列のこととする．(L-項の概念は多項式の概念の一般化である)

a) 変数記号や L の定数記号 (からなる長さ 1 の記号列) は L-項である

b) f が L の n 変数の関数記号で，$t_1, \ldots, t_n$ が L-項のとき，$f(t_1, \ldots, t_n)$ は L-項である．

c) L-項は 上の a), b) の繰り返し適用によって得られる記号列に限る．

論理式の厳密な導入 (1/4)

▷ 形式的体系の論理式の概念は，次のようにして厳密に導入することができる．

- 変数記号 $x, y, z, \ldots, x_1, x_2, \ldots$ etc. を無限個用意しておく．
- 定数記号，関数記号，関係記号 (たとえば大小関係をあらわす記号 $\leq$ など) を集めたものを **言語** (language) とよぶ．
- L を言語とするとき，L-項を，次で帰納的に得られる記号列のこととする．(L-項の概念は多項式の概念の一般化である)

a) 変数記号や L の定数記号 (からなる長さ 1 の記号列) は L-項である

b) f が L の n 変数の関数記号で，$t_1, \ldots, t_n$ が L-項のとき，$f(t_1, \ldots, t_n)$ は L-項である．

c) L-項は 上の a), b) の繰り返し適用によって得られる記号列に限る．

論理式の厳密な導入 (1/4)

- 形式的体系の論理式の概念は，次のようにして厳密に導入することができる．

- 変数記号 x, y, z,..., x_1, x_2,... etc. を無限個用意しておく．
- 定数記号，関数記号，関係記号 (たとえば大小関係をあらわす記号 $\leq$ など) を集めたものを **言語** (language) とよぶ．
- L を言語とするとき，L-項を，次で帰納的に得られる記号列のこととする．(L-項の概念は多項式の概念の一般化である)

a) 変数記号や L の定数記号 (からなる長さ 1 の記号列) は L-項である

b) f が L の n 変数の関数記号で，$t_1, \ldots, t_n$ が L-項のとき，$f(t_1, \ldots, t_n)$ は L-項である．

c) L-項は 上の a), b) の繰り返し適用によって得られる記号列に限る．

論理式の厳密な導入 (2/4)

a) 変数記号や L の定数記号 (からなる長さ 1 の記号列) は L-項である

b) f が L の n 変数の関数記号で, $t_1, \ldots, t_n$ が L-項のとき, $f(t_1, \ldots, t_n)$ は L-項である.

c) L-項は 上の a), b) の繰り返し適用によって得られる記号列に限る.

- L_{PA} を PA の言語とするとき, b) を厳格に適用すると, L-項 t_0 と t_1 に, 2 変数の関数記号 $+$ を適用すると, $+(t_0, t_1)$ という表現が得られることになるが, 読みやすいように, これを $t_0 + t_1$ あるいは $(t_0 + t_1)$ などと書くことにする.
- 同様に, $t_0 \cdot t_1$ も $\cdot(t_0, t_1)$ の略記と考える.

論理式の厳密な導入 (2/4)

a) 変数記号や L の定数記号 (からなる長さ 1 の記号列) は L-項である

b) f が L の n 変数の関数記号で，$t_1, \dots, t_n$ が L-項のとき，$f(t_1, \dots, t_n)$ は L-項である．

c) L-項は 上の a), b) の繰り返し適用によって得られる記号列に限る．

- L_{PA} を PA の言語とするとき，b) を厳格に適用すると，L-項 t_0 と t_1 に，2 変数の関数記号 $+$ を適用すると，$+(t_0, t_1)$ という表現が得られることになるが，読みやすいように，これを $t_0 + t_1$ あるいは $(t_0 + t_1)$ などと書くことにする．
- 同様に，$t_0 \cdot t_1$ も $\cdot(t_0, t_1)$ の略記と考える．

論理式の厳密な導入 (2/4)

a) 変数記号や L の定数記号 (からなる長さ 1 の記号列) は L-項である

b) f が L の n 変数の関数記号で, $t_1, \ldots, t_n$ が L-項のとき, $f(t_1, \ldots, t_n)$ は L-項である.

c) L-項は 上の a), b) の繰り返し適用によって得られる記号列に限る.

- L_{PA} を PA の言語とするとき, b) を厳格に適用すると, L-項 t_0 と t_1 に, 2 変数の関数記号 $+$ を適用すると, $+(t_0, t_1)$ という表現が得られることになるが, 読みやすいように, これを $t_0 + t_1$ あるいは $(t_0 + t_1)$ などと書くことにする.
- 同様に, $t_0 \cdot t_1$ も $\cdot(t_0, t_1)$ の略記と考える.

論理式の厳密な導入 (3/4)

- L-項の概念を使って，記号列が L-論理式 (L-formula) である，ということを次のように帰納的に定義する:

d) t_0, t_1 が L-項のとき，$t_0 \equiv t_1$ は L-論理式である．

e) r が L の n 変数の関係記号で，$t_1, \ldots t_n$ が L-項のとき，$r(t_1, \ldots, t_n)$ は L-論理式である．

f) φ, ψ が L-論理式のとき，$(\varphi \wedge \psi)$, $(\varphi \vee \psi)$, $(\varphi \to \psi)$, $\neg\varphi$ は L-論理式である．

g) φ が L-論理式で，x が変数記号のとき，$\exists x \varphi$, $\forall x \varphi$ は L-論理式である．

h) L-論理式は，上の d) ～ g) の繰り返しの適用によって得られる表現に限る．

- d) と e) で得られる論理式を L の **原子論理式** (atomic formulas) とよぶことにする．

論理式の厳密な導入 (3/4)

- L-項の概念を使って，記号列が L-論理式 (L-formula) である，ということを次のように帰納的に定義する:

d) t_0, t_1 が L-項のとき，$t_0 \equiv t_1$ は L-論理式である．

e) r が L の n 変数の関係記号で，$t_1, \ldots t_n$ が L-項のとき，$r(t_1, \ldots, t_n)$ は L-論理式である．

f) φ, ψ が L-論理式のとき，$(\varphi \wedge \psi)$, $(\varphi \vee \psi)$, $(\varphi \rightarrow \psi)$, $\neg\varphi$ は L-論理式である．

g) φ が L-論理式で，x が変数記号のとき，$\exists x\varphi$, $\forall x\varphi$ は L-論理式である．

h) L-論理式は，上の d) ∼ g) の繰り返しの適用によって得られる表現に限る．

- d) と e) で得られる論理式を L の **原子論理式** (atomic formulas) とよぶことにする．

論理式の厳密な導入 (3/4)

- L-項の概念を使って，記号列が L-論理式 (L-formula) である，ということを次のように帰納的に定義する:

$d)$ t_0, t_1 が L-項のとき，$t_0 \equiv t_1$ は L-論理式である．

$e)$ r が L の n 変数の関係記号で，$t_1, \dots t_n$ が L-項のとき，$r(t_1, \dots, t_n)$ は L-論理式である．

$f)$ φ, ψ が L-論理式のとき，$(\varphi \wedge \psi)$, $(\varphi \vee \psi)$, $(\varphi \to \psi)$, $\neg\varphi$ は L-論理式である．

$g)$ φ が L-論理式で，x が変数記号のとき，$\exists x\varphi$, $\forall x\varphi$ は L-論理式である．

$h)$ L-論理式は，上の $d) \sim g)$ の繰り返しの適用によって得られる表現に限る．

- $d)$ と $e)$ で得られる論理式を L の **原子論理式** (atomic formulas) とよぶことにする．

論理式の厳密な導入 (3/4)

- L-項の概念を使って，記号列が L-論理式 (L-formula) である，ということを次のように帰納的に定義する:

d) t_0, t_1 が L-項のとき，$t_0 \equiv t_1$ は L-論理式である．

e) r が L の n 変数の関係記号で，$t_1, \ldots t_n$ が L-項のとき，$r(t_1, \ldots, t_n)$ は L-論理式である．

f) φ, ψ が L-論理式のとき，$(\varphi \wedge \psi)$, $(\varphi \vee \psi)$, $(\varphi \to \psi)$, $\neg\varphi$ は L-論理式である．

g) φ が L-論理式で，x が変数記号のとき，$\exists x\varphi$, $\forall x\varphi$ は L-論理式である．

h) L-論理式は，上の d) ∼ g) の繰り返しの適用によって得られる表現に限る．

- d) と e) で得られる論理式を L の **原子論理式** (atomic formulas) とよぶことにする．

論理式の厳密な導入 (3/4)

- L-項の概念を使って，記号列が L-論理式 (L-formula) である，ということを次のように帰納的に定義する:

d) t_0, t_1 が L-項のとき，$t_0 \equiv t_1$ は L-論理式である．

e) r が L の n 変数の関係記号で，$t_1, \dots t_n$ が L-項のとき，$r(t_1, \dots, t_n)$ は L-論理式である．

f) φ, ψ が L-論理式のとき，$(\varphi \wedge \psi)$, $(\varphi \vee \psi)$, $(\varphi \rightarrow \psi)$, $\neg\varphi$ は L-論理式である．

g) φ が L-論理式で，x が変数記号のとき，$\exists x\varphi$, $\forall x\varphi$ は L-論理式である．

h) L-論理式は，上の d) ∼ g) の繰り返しの適用によって得られる表現に限る．

- d) と e) で得られる論理式を L の **原子論理式** (atomic formulas) とよぶことにする．

論理式の厳密な導入 (3/4)

- L-項の概念を使って，記号列が L-論理式 (L-formula) である，ということを次のように帰納的に定義する:

d) t_0, t_1 が L-項のとき，$t_0 \equiv t_1$ は L-論理式である．

e) r が L の n 変数の関係記号で，$t_1, \ldots t_n$ が L-項のとき，$r(t_1, \ldots, t_n)$ は L-論理式である．

f) φ, ψ が L-論理式のとき，$(\varphi \wedge \psi)$, $(\varphi \vee \psi)$, $(\varphi \rightarrow \psi)$, $\neg\varphi$ は L-論理式である．

g) φ が L-論理式で，x が変数記号のとき，$\exists x\varphi$, $\forall x\varphi$ は L-論理式である．

h) L-論理式は，上の *d*) ∼ *g*) の繰り返しの適用によって得られる表現に限る．

- *d*) と *e*) で得られる論理式を L の **原子論理式** (atomic formulas) とよぶことにする．

論理式の厳密な導入 (3/4)

- L-項の概念を使って，記号列が L-論理式 (L-formula) である，ということを次のように帰納的に定義する:

d) t_0, t_1 が L-項のとき，$t_0 \equiv t_1$ は L-論理式である.

e) r が L の n 変数の関係記号で，$t_1,\dots t_n$ が L-項のとき，$r(t_1,\dots,t_n)$ は L-論理式である.

f) φ, ψ が L-論理式のとき，$(\varphi \wedge \psi)$, $(\varphi \vee \psi)$, $(\varphi \rightarrow \psi)$, $\neg\varphi$ は L-論理式である.

g) φ が L-論理式で，x が変数記号のとき，$\exists x\varphi$, $\forall x\varphi$ は L-論理式である.

h) L-論理式は，上の *d*) ~ *g*) の繰り返しの適用によって得られる表現に限る.

- *d*) と *e*) で得られる論理式を L の **原子論理式** (atomic formulas) とよぶことにする.

論理式の厳密な導入 (3/4)

- L-項の概念を使って，記号列が L-論理式 (L-formula) である，ということを次のように帰納的に定義する:

d) t_0, t_1 が L-項のとき，$t_0 \equiv t_1$ は L-論理式である．

e) r が L の n 変数の関係記号で，$t_1, \ldots t_n$ が L-項のとき，$r(t_1, \ldots, t_n)$ は L-論理式である．

f) φ, ψ が L-論理式のとき，$(\varphi \wedge \psi)$, $(\varphi \vee \psi)$, $(\varphi \to \psi)$, $\neg\varphi$ は L-論理式である．

g) φ が L-論理式で，x が変数記号のとき，$\exists x\varphi$, $\forall x\varphi$ は L-論理式である．

h) L-論理式は，上の d) ∼ g) の繰り返しの適用によって得られる表現に限る．

- d) と e) で得られる論理式を L の **原子論理式** (atomic formulas) とよぶことにする．

論理式の厳密な導入 (4/4)

- d) と e) で得られる論理式を L の **原子論理式** (atomic formulas) とよぶことにする.

- L_{PA} には関係記号が含まれていないので, L_{PA} の原子論理式は, 等式のみである.

- 例えば L に 2 変数の関係記号 $\leqq$ が通常の大小関係をあらわす記号として含まれているとき, 2 つの項 t_0, t_1 に対し, $\leqq(t_0, t_1)$ という原子論理式が作られることになるが, 項のときと同様に, これを数学での通常の書き方に合せて $t_0 \leqq t_1$ と略記することもある. ただし, これは可読性のための略記で, 本当の表現は, $\leqq(t_0, t_1)$ の方であると考えることにする.

論理式の厳密な導入 (4/4)

- d) と e) で得られる論理式を L の **原子論理式** (atomic formulas) とよぶことにする.

- L_{PA} には関係記号が含まれていないので, L_{PA} の原子論理式は, 等式のみである.

- 例えば L に 2 変数の関係記号 $\leqq$ が通常の大小関係をあらわす記号として含まれているとき, 2 つの項 t_0, t_1 に対し, $\leqq(t_0, t_1)$ という原子論理式が作られることになるが, 項のときと同様に, これを数学での通常の書き方に合せて $t_0 \leqq t_1$ と略記することもある. ただし, これは可読性のための略記で, 本当の表現は, $\leqq(t_0, t_1)$ の方であると考えることにする.

論理式の厳密な導入 (4/4)

▷ d) と e) で得られる論理式を L の **原子論理式** (atomic formulas) とよぶことにする.

- L_{PA} には関係記号が含まれていないので, L_{PA} の原子論理式は, 等式のみである.
- 例えば L に 2 変数の関係記号 $\leqq$ が通常の大小関係をあらわす記号として含まれているとき, 2 つの項 t_0, t_1 に対し, $\leqq(t_0, t_1)$ という原子論理式が作られることになるが, 項のときと同様に, これを数学での通常の書き方に合せて $t_0 \leqq t_1$ と略記することもある. ただし, これは可読性のための略記で, 本当の表現は, $\leqq(t_0, t_1)$ の方であると考えることにする.

L_{PA}-論理式で表現できる性質 (1/3)

▷ PA の論理式で表現できる数学は一見したときの印象よりずっと広いものである．簡単な例を見てみる:

- 数 n は L_{PA}-項 $S^n(0) = \underbrace{S(S(\cdots S(}_{n\text{個}} 0 \underbrace{)\cdots))}_{n\text{個}}$ により表現できる．
- "$x \leqq y$" は，論理式 $\varphi(x, y) = \exists z\,(y \equiv x + z)$ で表現できる．特に，任意の数 m, n に対し，$\varphi(S^m(0), S^n(0))$ が PA から証明できるのは $m \leqq n$ となるちょうどそのときである．
- "$x < y$" も上と同じ意味で表現できる (演習).
- "x は y の約数である" は，$\exists z\,(\neg z \equiv 0 \wedge y \equiv x \cdot z)$ あるいは，$\exists z\,(y \equiv x \cdot S(z))$ で表現できる．
- 上の例でも "表現できる" と言ったのは，たとえば $\psi(x, y) = \exists z\,(y \equiv x \cdot S(z))$ として,「すべての自然数 m, n に対し，$\psi(S^m(0), S^n(0))$ が PA で証明できるのは，m が n の約数になっているちょうどそのときである」ということが示せる，という意味である．ここでの "PA で証明できる" ことの意味は後で厳密に定義する．

L_{PA}-論理式で表現できる性質 (1/3)

▷ PA の論理式で表現できる数学は一見したときの印象よりずっと広いものである．簡単な例を見てみる:

- 数 n は L_{PA}-項 $S^n(0) = \underbrace{S(S(\cdots S(}_{n\text{個}}0\underbrace{)\cdots))}_{n\text{個}}$ により表現できる．
- “$x \leqq y$” は，論理式 $\varphi(x, y) = \exists z\,(y \equiv x + z)$ で表現できる．特に，任意の数 m, n に対し，$\varphi(S^m(0), S^n(0))$ が PA から証明できるのは $m \leqq n$ となるちょうどそのときである．
- “$x < y$” も上と同じ意味で表現できる (演習).
- “x は y の約数である” は，$\exists z\,(\neg z \equiv 0 \wedge y \equiv x \cdot z)$ あるいは，$\exists z\,(y \equiv x \cdot S(z))$ で表現できる．
- 上の例でも “表現できる” と言ったのは，たとえば $\psi(x, y) = \exists z\,(y \equiv x \cdot S(z))$ として,「すべての自然数 m, n に対し，$\psi(S^m(0), S^n(0))$ が PA で証明できるのは，m が n の約数になっているちょうどそのときである」 ということが示せる，という意味である．ここでの “PA で証明できる” ことの意味は後で厳密に定義する．

L_{PA}-論理式で表現できる性質 (1/3)

- PA の論理式で表現できる数学は一見したときの印象よりずっと広いものである．簡単な例を見てみる:

- 数 n は L_{PA}-項 $S^n(0) = \underbrace{S(S(\cdots S(}_{n\text{個}} 0 \underbrace{)\cdots))}_{n\text{個}}$ により表現できる．
- "$x \leq y$" は，論理式 $\varphi(x, y) = \exists z\,(y \equiv x + z)$ で表現できる．特に，任意の数 m, n に対し，$\varphi(S^m(0), S^n(0))$ が PA から証明できるのは $m \leq n$ となるちょうどそのときである．
- "$x < y$" も上と同じ意味で表現できる (演習).
- "x は y の約数である" は，$\exists z\,(\neg z \equiv 0 \wedge y \equiv x \cdot z)$ あるいは，$\exists z\,(y \equiv x \cdot S(z))$ で表現できる．
- 上の例でも "表現できる" と言ったのは，たとえば $\psi(x, y) = \exists z\,(y \equiv x \cdot S(z))$ として,「すべての自然数 m, n に対し，$\psi(S^m(0), S^n(0))$ が PA で証明できるのは，m が n の約数になっているちょうどそのときである」ということが示せる，という意味である．ここでの "PA で証明できる" ことの意味は後で厳密に定義する．

L_{PA}-論理式で表現できる性質 (1/3)

▷ PA の論理式で表現できる数学は一見したときの印象よりずっと広いものである．簡単な例を見てみる:

- 数 n は L_{PA}-項 $S^n(0) = \underbrace{S(S(\cdots S(}_{n\text{ 個}}0\underbrace{)\cdots))}_{n\text{ 個}}$ により表現できる．
- "$x \leqq y$" は，論理式 $\varphi(x,y) = \exists z\,(y \equiv x + z)$ で表現できる．特に，任意の数 m, n に対し，$\varphi(S^m(0), S^n(0))$ が PA から証明できるのは $m \leqq n$ となるちょうどそのときである．
- "$x < y$" も上と同じ意味で表現できる (演習).
- "x は y の約数である" は，$\exists z\,(\neg z \equiv 0 \wedge y \equiv x \cdot z)$ あるいは，$\exists z\,(y \equiv x \cdot S(z))$ で表現できる．
- 上の例でも "表現できる" と言ったのは，たとえば $\psi(x,y) = \exists z\,(y \equiv x \cdot S(z))$ として,「すべての自然数 m, n に対し，$\psi(S^m(0), S^n(0))$ が PA で証明できるのは，m が n の約数になっているちょうどそのときである」ということが示せる，という意味である．ここでの "PA で証明できる" ことの意味は後で厳密に定義する．

L_{PA}-論理式で表現できる性質 (1/3)

- PA の論理式で表現できる数学は一見したときの印象よりずっと広いものである．簡単な例を見てみる:

- 数 n は L_{PA}-項 $S^n(0) = \underbrace{S(S(\cdots S(}_{n\text{ 個}} 0 \underbrace{)\cdots))}_{n\text{ 個}}$ により表現できる．
- "$x \leqq y$" は，論理式 $\varphi(x, y) = \exists z\,(y \equiv x + z)$ で表現できる．特に，任意の数 m, n に対し，$\varphi(S^m(0), S^n(0))$ が PA から証明できるのは $m \leqq n$ となるちょうどそのときである．
- "$x < y$" も上と同じ意味で表現できる (演習).
- "x は y の約数である" は，$\exists z\,(\neg z \equiv 0 \wedge y \equiv x \cdot z)$ あるいは，$\exists z\,(y \equiv x \cdot S(z))$ で表現できる．
- 上の例でも "表現できる" と言ったのは，たとえば $\psi(x, y) = \exists z\,(y \equiv x \cdot S(z))$ として,「すべての自然数 m, n に対し，$\psi(S^m(0), S^n(0))$ が PA で証明できるのは，m が n の約数になっているちょうどそのときである」ということが示せる，という意味である．ここでの "PA で証明できる" ことの意味は後で厳密に定義する．

L_{PA}-論理式で表現できる性質 (1/3)

- PA の論理式で表現できる数学は一見したときの印象よりずっと広いものである．簡単な例を見てみる:

- 数 n は L_{PA}-項 $S^n(0) = \underbrace{S(S(\cdots S(}_{n\text{ 個}}0\underbrace{)\cdots))}_{n\text{ 個}}$ により表現できる．
- "$x \leqq y$" は，論理式 $\varphi(x, y) = \exists z\,(y \equiv x + z)$ で表現できる．特に，任意の数 m, n に対し，$\varphi(S^m(0), S^n(0))$ が PA から証明できるのは $m \leqq n$ となるちょうどそのときである．
- "$x < y$" も上と同じ意味で表現できる (演習).
- "x は y の約数である" は，$\exists z\,(\neg z \equiv 0 \wedge y \equiv x \cdot z)$ あるいは，$\exists z\,(y \equiv x \cdot S(z))$ で表現できる．
- 上の例でも "表現できる" と言ったのは，たとえば $\psi(x, y) = \exists z\,(y \equiv x \cdot S(z))$ として,「すべての自然数 m, n に対し，$\psi(S^m(0), S^n(0))$ が PA で証明できるのは，m が n の約数になっているちょうどそのときである」 ということが示せる，という意味である．ここでの "PA で証明できる" ことの意味は後で厳密に定義する．

L_{PA}-論理式で表現できる性質 (1/3)

▷ PA の論理式で表現できる数学は一見したときの印象よりずっと広いものである．簡単な例を見てみる:

- 数 n は L_{PA}-項 $S^n(0) = \underbrace{S(S(\cdots S(}_{n\text{個}} 0 \underbrace{)\cdots))}_{n\text{個}}$ により表現できる．
- "$x \leqq y$" は，論理式 $\varphi(x, y) = \exists z\,(y \equiv x + z)$ で表現できる．特に，任意の数 m, n に対し，$\varphi(S^m(0), S^n(0))$ が PA から証明できるのは $m \leqq n$ となるちょうどそのときである．
- "$x < y$" も上と同じ意味で表現できる (演習).
- "x は y の約数である" は，$\exists z\,(\neg z \equiv 0 \wedge y \equiv x \cdot z)$ あるいは，$\exists z\,(y \equiv x \cdot S(z))$ で表現できる．
- 上の例でも "表現できる" と言ったのは，たとえば $\psi(x, y) = \exists z\,(y \equiv x \cdot S(z))$ として,「すべての自然数 m, n に対し，$\psi(S^m(0), S^n(0))$ が PA で証明できるのは，m が n の約数になっているちょうどそのときである」 ということが示せる，という意味である．ここでの "PA で証明できる" ことの意味は後で厳密に定義する．

L_{PA}-論理式で表現できる性質 (1/3)

- PA の論理式で表現できる数学は一見したときの印象よりずっと広いものである．簡単な例を見てみる:

- 数 n は L_{PA}-項 $S^n(0) = \underbrace{S(S(\cdots S(}_{n\,個}0\underbrace{)\cdots))}_{n\,個}$ により表現できる．
- “$x \leqq y$” は，論理式 $\varphi(x,y) = \exists z\,(y \equiv x + z)$ で表現できる．特に，任意の数 m, n に対し，$\varphi(S^m(0), S^n(0))$ が PA から証明できるのは $m \leqq n$ となるちょうどそのときである．
- “$x < y$” も上と同じ意味で表現できる (演習).
- “x は y の約数である” は，$\exists z\,(\neg z \equiv 0 \wedge y \equiv x \cdot z)$ あるいは，$\exists z\,(y \equiv x \cdot S(z))$ で表現できる．
- 上の例でも “表現できる” と言ったのは，たとえば $\psi(x,y) = \exists z\,(y \equiv x \cdot S(z))$ として,「すべての自然数 m, n に対し，$\psi(S^m(0), S^n(0))$ が PA で証明できるのは，m が n の約数になっているちょうどそのときである」 ということが示せる，という意味である．ここでの “PA で証明できる” ことの意味は後で厳密に定義する．

L_{PA}-論理式で表現できる性質 (2/3)

- “x は素数である” は,
  $(S^2(0) \leq x \wedge \forall y\,((S^2(0) \leq y \wedge y < x) \rightarrow \neg$“$y$ は x の約数である”$))$
  で表現できる．ただし，“$S^2(0)$” や “$S^2(0) \leq x$” などは上で与えたような論理式による表現の略記で，実際の L_{PA}-論理式はもっとずっと長いものになる，
- 固定した自然数 $n > 0$ に対し，“x^n” は $\underbrace{(x \cdot x(\cdots(x\cdot}_{n-1\text{ 個}} x \underbrace{)\cdots))}_{n-1\text{ 個}}$ と表現できる．
- “フェルマーの定理が $n = 3$ で成り立つ” は,
  $\forall x \forall y\,((0 < x \wedge 0 < y) \rightarrow \neg \exists z\,(x^3 + y^3 \equiv z^3))$ で表現できる．
- 実は自然数上の指数関数 $(m, n) \mapsto m^n$ は (L_{PA} 論理式で) 表現することができる (この証明はかなり難しい — 不完全性定理の証明のための補題の一部を用いて証明する)
- 上の事実を用いるとフェルマーの定理は,
  $\forall u \forall x \forall y\,((S^2(0) < u \wedge 0 < x \wedge 0 < y) \rightarrow \neg \exists z\,(x^u + y^u \equiv z^u))$ で表現できる．

$\mathcal{L}_{\mathrm{PA}}$-論理式で表現できる性質 (2/3)

- "x は素数である" は,
  $(S^2(0) \leq x \wedge \forall y\,((S^2(0) \leq y \wedge y < x) \to \neg$"$y$ は x の約数である"$))$
  で表現できる. ただし, "$S^2(0)$" や "$S^2(0) \leq x$" などは上で与えたような論理式による表現の略記で, 実際の $\mathcal{L}_{\mathrm{PA}}$-論理式はもっとずっと長いものになる,
- 固定した自然数 $n > 0$ に対し, "x^n" は $\underbrace{(x \cdot x(\cdots(x\cdot}_{n-1\text{ 個}}x\underbrace{)\cdots))}_{n-1\text{ 個}}$ と表現できる.
- "フェルマーの定理が $n = 3$ で成り立つ" は,
  $\forall x \forall y\,((0 < x \wedge 0 < y) \to \neg\exists z\,(x^3 + y^3 \equiv z^3))$ で表現できる.
- 実は自然数上の指数関数 $(m, n) \mapsto m^n$ は ($\mathcal{L}_{\mathrm{PA}}$ 論理式で) 表現することができる (この証明はかなり難しい — 不完全性定理の証明のための補題の一部を用いて証明する)
- 上の事実を用いるとフェルマーの定理は,
  $\forall u \forall x \forall y\,((S^2(0) < u \wedge 0 < x \wedge 0 < y) \to \neg\exists z\,(x^u + y^u \equiv z^u))$ で表現できる.

- "x は素数である" は,
  $(S^2(0) \leq x \wedge \forall y\,((S^2(0) \leq y \wedge y < x) \rightarrow \neg$"$y$ は x の約数である"$))$
  で表現できる．ただし，"$S^2(0)$" や "$S^2(0) \leq x$" などは上で与えたような論理式による表現の略記で，実際の L_{PA}-論理式はもっとずっと長いものになる,
- 固定した自然数 $n > 0$ に対し，"x^n" は $\underbrace{(x \cdot x(\cdots(x}_{n-1\text{ 個}} \cdot x\underbrace{)\cdots))}_{n-1\text{ 個}}$ と表現できる.
- "フェルマーの定理が $n = 3$ で成り立つ" は,
  $\forall x \forall y\,((0 < x \wedge 0 < y) \rightarrow \neg \exists z\,(x^3 + y^3 \equiv z^3))$ で表現できる.
- 実は自然数上の指数関数 $(m, n) \mapsto m^n$ は (L_{PA} 論理式で) 表現することができる (この証明はかなり難しい — 不完全性定理の証明のための補題の一部を用いて証明する)
- 上の事実を用いるとフェルマーの定理は,
  $\forall u \forall x \forall y\,((S^2(0) < u \wedge 0 < x \wedge 0 < y) \rightarrow \neg \exists z\,(x^u + y^u \equiv z^u))$ で表現できる.

L_{PA}-論理式で表現できる性質 (2/3)

- “x は素数である” は,
  $(S^2(0) \leq x \wedge \forall y\,((S^2(0) \leq y \wedge y < x) \to \neg$“$y$ は x の約数である”$))$
  で表現できる. ただし, “$S^2(0)$” や “$S^2(0) \leq x$” などは上で与えたような論理式による表現の略記で, 実際の L_{PA}-論理式はもっとずっと長いものになる,
- 固定した自然数 $n > 0$ に対し, “x^n” は $\underbrace{(x \cdot x(\cdots(x\cdot}_{n-1\text{ 個}} x \underbrace{)\cdots))}_{n-1\text{ 個}}$ と表現できる.
- “フェルマーの定理が $n = 3$ で成り立つ” は,
  $\forall x \forall y\,((0 < x \wedge 0 < y) \to \neg\exists z\,(x^3 + y^3 \equiv z^3))$ で表現できる.
- 実は自然数上の指数関数 $(m, n) \mapsto m^n$ は (L_{PA} 論理式で) 表現することができる (この証明はかなり難しい — 不完全性定理の証明のための補題の一部を用いて証明する)
- 上の事実を用いるとフェルマーの定理は,
  $\forall u \forall x \forall y\,((S^2(0) < u \wedge 0 < x \wedge 0 < y) \to \neg\exists z\,(x^u + y^u \equiv z^u))$ で表現できる.

L_{PA}-論理式で表現できる性質 (2/3)

- “x は素数である” は,
  $(S^2(0) \leq x \wedge \forall y\,((S^2(0) \leq y \wedge y < x) \rightarrow \neg$“$y$ は x の約数である”$))$
  で表現できる．ただし，“$S^2(0)$” や “$S^2(0) \leq x$” などは上で与えたような論理式による表現の略記で，実際の L_{PA}-論理式はもっとずっと長いものになる,
- 固定した自然数 $n > 0$ に対し，“x^n” は $\underbrace{(x \cdot x(\cdots(x \cdot}_{n-1\text{ 個}} x \underbrace{)\cdots))}_{n-1\text{ 個}}$ と表現できる.
- “フェルマーの定理が $n = 3$ で成り立つ” は,
  $\forall x \forall y\,((0 < x \wedge 0 < y) \rightarrow \neg\exists z\,(x^3 + y^3 \equiv z^3))$ で表現できる.
- 実は自然数上の指数関数 $(m, n) \mapsto m^n$ は (L_{PA} 論理式で) 表現することができる (この証明はかなり難しい — 不完全性定理の証明のための補題の一部を用いて証明する)
- 上の事実を用いるとフェルマーの定理は,
  $\forall u \forall x \forall y\,((S^2(0) < u \wedge 0 < x \wedge 0 < y) \rightarrow \neg\exists z\,(x^u + y^u \equiv z^u))$ で表現できる.

L_{PA}-論理式で表現できる性質 (2/3)

- "x は素数である" は,
  $(S^2(0) \leq x \wedge \forall y\,((S^2(0) \leq y \wedge y < x) \rightarrow \neg$"$y$ は x の約数である"$))$
  で表現できる. ただし, "$S^2(0)$" や "$S^2(0) \leq x$" などは上で与えたような論理式による表現の略記で, 実際の L_{PA}-論理式はもっとずっと長いものになる,
- 固定した自然数 $n > 0$ に対し, "x^n" は $\underbrace{(x \cdot x(\cdots (x}_{n-1\ 個} \cdot\, x \underbrace{)\cdots))}_{n-1\ 個}$ と表現できる.
- "フェルマーの定理が $n = 3$ で成り立つ" は,
  $\forall x \forall y\,((0 < x \wedge 0 < y) \rightarrow \neg \exists z\,(x^3 + y^3 \equiv z^3))$ で表現できる.
- 実は自然数上の指数関数 $(m, n) \mapsto m^n$ は (L_{PA} 論理式で) 表現することができる (この証明はかなり難しい — 不完全性定理の証明のための補題の一部を用いて証明する)
- 上の事実を用いるとフェルマーの定理は,
  $\forall u \forall x \forall y\,((S^2(0) < u \wedge 0 < x \wedge 0 < y) \rightarrow \neg \exists z\,(x^u + y^u \equiv z^u))$ で表現できる.

L_{PA}-論理式で表現できる性質 (2/3)

- "x は素数である" は,
  $(S^2(0) \leq x \wedge \forall y\,((S^2(0) \leq y \wedge y < x) \to \neg$"$y$ は x の約数である"$))$
  で表現できる. ただし, "$S^2(0)$" や "$S^2(0) \leq x$" などは上で与えたような論理式による表現の略記で, 実際の L_{PA}-論理式はもっとずっと長いものになる,
- 固定した自然数 $n > 0$ に対し, "x^n" は $\underbrace{(x \cdot x(\cdots(x\cdot}_{n-1\text{ 個}} x \underbrace{)\cdots))}_{n-1\text{ 個}}$ と表現できる.
- "フェルマーの定理が $n = 3$ で成り立つ" は,
  $\forall x \forall y\,((0 < x \wedge 0 < y) \to \neg\exists z\,(x^3 + y^3 \equiv z^3))$ で表現できる.
- 実は自然数上の指数関数 $(m, n) \mapsto m^n$ は (L_{PA} 論理式で) 表現することができる (この証明はかなり難しい — 不完全性定理の証明のための補題の一部を用いて証明する)
- 上の事実を用いるとフェルマーの定理は,
  $\forall u \forall x \forall y\,((S^2(0) < u \wedge 0 < x \wedge 0 < y) \to \neg\exists z\,(x^u + y^u \equiv z^u))$ で表現できる.

L_{PA}-論理式で表現できる性質 (2/3)

- “x は素数である” は,
  $(S^2(0) \leq x \wedge \forall y\,((S^2(0) \leq y \wedge y < x) \rightarrow \neg$“$y$ は x の約数である”$))$
  で表現できる．ただし，“$S^2(0)$” や “$S^2(0) \leq x$” などは上で与えたような論理式による表現の略記で，実際の L_{PA}-論理式はもっとずっと長いものになる,
- 固定した自然数 $n > 0$ に対し，“x^n” は $\underbrace{(x \cdot x(\cdots(x\cdot}_{n-1\text{ 個}} x \underbrace{)\cdots))}_{n-1\text{ 個}}$ と表現できる.
- “フェルマーの定理が $n = 3$ で成り立つ” は,
  $\forall x \forall y\,((0 < x \wedge 0 < y) \rightarrow \neg \exists z\,(x^3 + y^3 \equiv z^3))$ で表現できる.
- 実は自然数上の指数関数 $(m, n) \mapsto m^n$ は (L_{PA} 論理式で) 表現することができる (この証明はかなり難しい — 不完全性定理の証明のための補題の一部を用いて証明する)
- 上の事実を用いるとフェルマーの定理は,
  $\forall u \forall x \forall y\,((S^2(0) < u \wedge 0 < x \wedge 0 < y) \rightarrow \neg \exists z\,(x^u + y^u \equiv z^u))$ で表現できる.

L_{PA}-論理式で表現できる性質 (3/3)

- 実は自然数上の指数関数 $(m, n) \mapsto m^n$ は (L_{PA} 論理式で) 表現することができる (この証明はかなり難しい — 不完全性定理の証明のための補題の一部を用いて証明する)
- 上の事実を用いるとフェルマーの定理は, $\forall u \forall x \forall y\, ((S^2(0) < u \land 0 < x \land 0 < y) \to \neg \exists z\, (x^u + y^u \equiv z^u))$ で表現できる.
- フェルマーの定理は，1994(平成 6) 年にイギリスの数学者アンドリュー・ワイルズ (Andrew Wiles, 1953(昭和 28) 年 –) によって証明された.

  フェルマーの定理が PA で証明できるかどうかは未解決である.

L_{PA}-論理式で表現できる性質 (3/3)

- 実は自然数上の指数関数 $(m, n) \mapsto m^n$ は (L_{PA} 論理式で) 表現することができる (この証明はかなり難しい — 不完全性定理の証明のための補題の一部を用いて証明する)
- 上の事実を用いるとフェルマーの定理は, $\forall u \forall x \forall y\, ((S^2(0) < u \wedge 0 < x \wedge 0 < y) \rightarrow \neg \exists z\, (x^u + y^u \equiv z^u))$ で表現できる.
- フェルマーの定理は, 1994(平成 6) 年にイギリスの数学者アンドリュー・ワイルズ (Andrew Wiles, 1953(昭和 28) 年 –) によって証明された.

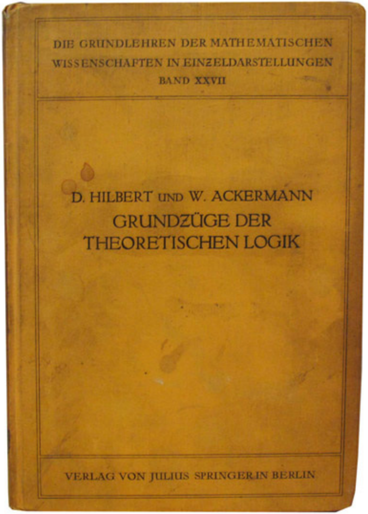
  フェルマーの定理が PA で証明できるかどうかは未解決である.

L_{PA}-論理式で表現できる性質 (3/3)

- 実は自然数上の指数関数 $(m, n) \mapsto m^n$ は (L_{PA} 論理式で) 表現することができる (この証明はかなり難しい — 不完全性定理の証明のための補題の一部を用いて証明する)
- 上の事実を用いるとフェルマーの定理は,
  $\forall u \forall x \forall y\, ((S^2(0) < u \wedge 0 < x \wedge 0 < y) \to \neg \exists z\, (x^u + y^u \equiv z^u))$ で表現できる.
- フェルマーの定理は, 1994(平成 6) 年にイギリスの数学者アンドリュー・ワイルズ (Andrew Wiles, 1953(昭和 28) 年 –) によって証明された.

  フェルマーの定理が PA で証明できるかどうかは未解決である.

Grundzüge der Theoretischen Logik



今回の講義で導入した「述語論理の論理式」の概念や，来週の講義で扱かうことになる「形式的証明の体系」が完全な形ではじめて定式化されたのは Hilbert と Ackermann による „Grundzüge der Theoretischen Logik“ (理論論理学概論, 1928(昭和 3) 年) においてだった．