数理の世界 (数学の考え方) — ゲーデルの不完全性定理

論理式の解釈とトートロジー，(第 VII 回の講義)

Sakaé Fuchino (渕野 昌)

Dept. of Computer Sciences
Kobe University
(神戸大学大学院 システム情報学研究科)

http://kurt.scitec.kobe-u.ac.jp/~fuchino/

(26. November 2012 (07:10 JST) version)

神戸大学 2012 年後期の講義
於 K302 教室，月曜 8:50 – 10:20

November 19, 2012

This presentation is typeset by pLATEX with beamer class.

参考文献の補足

- 近刊予定の
  R. デデキント著, 渕野 昌 翻訳・解説:
  「数とは何かそして何であるべきか」 (ちくま学芸文庫収録予定)
  の付録 C として書いた 『現代の視点からの数学の基礎付け』:

  http://kurt.scitec.kobe-u.ac.jp/~fuchino/tmp/dedekind-stetigkeit-was-appendix-c.pdf

- このファイルは, 講義の web page からもリンクされている.

記号と用語の準備

- x がある数学的な対象で, X が数学的な対象の集まりのとき,

$$x \in X$$

  と書いて,「x は X の要素である」 ことをあらわす.
- この記号は, 要素 (element) の ‘e’ に対応するギリシャ文字イプシロン (‘ϵ’) からきている.
- $x_1, \ldots, x_n$ がすべて X の要素であるときには, これを $x_1, \ldots, x_n \in X$ と書くことにする.
- 数学的な対象の集まりのことを **集合** という.
- 要素を一つも持たない集合も考えることがある. これを **空集合** (くうしゅうごう) という. 集合 X が空集合でないとき, このことを 「X は空 (くう) でない」と表現する.

論理式の解釈 (1/3)

- 言語 L が，定数記号 c_1, $c_2, \dots$, 関数記号 f_1, $f_2, \dots$, 関係記号 r_1, r_2, $\dots$, からなるとする．ただし，関数記号や関係記号の変数の数は，それぞれ，m_1, $m_2, \dots$, n_1, $n_2, \dots$ であるとする．
- このとき，$\mathfrak{A} = \langle A, c_1^{\mathfrak{A}}, c_2^{\mathfrak{A}}, \dots, f_1^{\mathfrak{A}}, f_2^{\mathfrak{A}}, \dots, r_1^{\mathfrak{A}}, r_2^{\mathfrak{A}}, \dots \rangle$ が L-構造であるとは，以下が成り立つことである:

  - A はある空でない集合である;
  - $c_1^{\mathfrak{A}}$, $c_2^{\mathfrak{A}}, \dots \in A$;
  - $f_1^{\mathfrak{A}}$, $f_2^{\mathfrak{A}}, \dots$ はそれぞれ A から A への m_1, $m_2, \dots$ 変数の関数である;
  - $r_1^{\mathfrak{A}}$, $r_2^{\mathfrak{A}}, \dots$ はそれぞれ A 上の n_1, $n_2, \dots$ 変数の関係である．

$\mathfrak{A} = \langle A, \dots \rangle$ が L-構造で，φ が L-論理式で，φ にあらわれる，$\forall$ や $\exists$ で束縛されていない変数記号が全部 $x_1, \dots, x_\ell$ の中に含まれていて，$a_1, \dots, a_\ell \in A$ のとき，「φ の $x_1, \dots, x_\ell$ に $a_1, \dots, a_\ell$ を代入したものが $\mathfrak{A}$ で成り立つ」ということを

$$\mathfrak{A} \models \varphi(a_1, \dots, a_\ell)$$

であらわす．

論理式の解釈 (2/3)

$\mathfrak{A} = \langle A, \dots \rangle$ が L-構造で，φ が L-論理式で，φ にあらわれる，$\forall$ や $\exists$ の束縛されていない変数記号が全部 $x_1, \dots, x_\ell$ の中に含まれていて，$a_1, \dots, a_\ell \in A$ のとき，「φ の $x_1, \dots, x_\ell$ に $a_1, \dots, a_\ell$ を代入したものが $\mathfrak{A}$ で成り立つ」ということを

$\mathfrak{A} \models \varphi(a_1, \dots, a_\ell)$ であらわす．

- 上の $\mathfrak{A} \models \varphi(a_1, \dots, a_\ell)$ では，
  - 記号 $c_1, c_2, \dots, f_1, f_2, \dots, r_1, r_2, \dots$ はそれぞれ，$c_1^{\mathfrak{A}}, c_2^{\mathfrak{A}}, \dots, f_1^{\mathfrak{A}}, f_2^{\mathfrak{A}}, \dots, r_1^{\mathfrak{A}}, r_2^{\mathfrak{A}}, \dots$ のことと解釈する;
  - 論理記号 $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\neg$ はそれぞれ "かつ", "または", "ならば", "⋯ でない" と解釈する;
  - $\forall x \cdots$, $\exists x \cdots$ はそれぞれ，"すべての A の要素 a に対し ⋯", "ある $a \in A$ があって ⋯" と解釈する．

論理式の解釈 (3/3)

- L-論理式 φ にあらわれる変数記号がすべて $\forall$ か $\exists$ の束縛範囲に入っているとき, φ は **L-文** であるという.

- φ を L-文とするとき, すべての L-構造 $\mathfrak{A}$ に対して, $\mathfrak{A} \models \varphi$ または $\mathfrak{A} \models \neg\varphi$ のどちらかが成り立つ.

例. $\mathfrak{N} = \langle \mathbb{N}, 0, ', +, \cdot \rangle$ とする. ただし, $\mathbb{N}$ は自然数の全体, 0 は数ゼロ, '′' は $n \in \mathbb{N}$ に対し $n+1$ を返す関数, '$+$' と '$\cdot$' はそれぞれ通常の加法と乗法とする.

> $\mathfrak{N}$ は L_{PA} 構造で, PA のすべての公理 φ に対して, $\mathfrak{N} \models \varphi$ である.

恒真な文とトートロジー (1/3)

- L をある言語とするとき，L-文 φ が **恒真** (こうしん) であるとは，すべての L-構造 $\mathfrak{A}$ に対し，$\mathfrak{A} \models \varphi$ が成り立つこととする．
- 任意の L-文が φ 与えられたときに，φ が恒真かどうかを判定する一般的なアルゴリズムは存在しない (このことは不完全性定理の系として証明できる)．
- たとえば，$(A \vee \neg A)$ は，$\vee$ と $\neg$ を，それぞれ “または”，“…でない” と解釈すると，A に真の値を代入しても偽の値を代入しても，全体の真偽値は常に真になる．このような表現のことを **トートロジー** とよぶ．

$(A \to (B \to A))$ はトートロジーである．

恒真な文とトートロジー (2/3)

$(A \to (B \to A))$ はトートロジーである.

- 一般に上のような表現 (命題論理の論理式) がトートロジーであるかどうかは, 次のような **真偽値表** を使って調べることができる:

  1 で真, 0 で偽をあらわすことにして

A	B	$(B \to A)$	$(A \to (B \to A))$
0	0	1	1
0	1	0	1
1	0	1	1
1	1	1	1

- トートロジーの各々の文字変数に任意の L-文を代入して得られる L-文は, 恒真である. このような L-文のことも **トートロジー** とよぶことにする.

任意の L-文 φ について φ がトートロジーであるかどうかは判定できる.

恒真な文とトートロジー (3/3)

任意の L-文 φ について φ がトートロジーであるかどうかは判定できる.

▷ L-文を代入することによって φ が得られる表現は有限個しかないから，それらの全部について，真偽値表を作ってトートロジーになっているかどうかを判定すればよい.

もしトートロジーになっているものがあれば， φ はトートロジーである．もしトートロジーとなるものが 1 つもなければ， φ もトートロジーでない.


KURT GÖDEL
1906 — 1978
DER BEDEUTENDSTE
LOGIKER SEINER ZEIT
WOHNTE HIER ALS STUDENT
DER MATHEMATIK
UND PHILOSOPHIE
VOM 6.10.1927
BIS ZUM 1.7.1928
$T \nvdash \bot \Leftrightarrow T \nvdash \mathrm{CONS}_T$