数理の世界 (数学の考え方) — ゲーデルの不完全性定理

形式的証明，(第 VIII 回の講義)

Sakaé Fuchino (渕野 昌)

Dept. of Computer Sciences
Kobe University
(神戸大学大学院 システム情報学研究科)

http://kurt.scitec.kobe-u.ac.jp/~fuchino/

(2. Dezember 2012 (19:37 JST) version)

神戸大学 2012 年後期の講義
於 K302 教室，月曜 8:50 – 10:20

November 26, 2012

This presentation is typeset by pLATEX with beamer class.

恒真な文とトートロジー (復習 1/3)

- L をある言語とするとき，L-文 φ が **恒真** (こうしん) であるとは，すべての L-構造 $\mathfrak{A}$ に対し，$\mathfrak{A} \models \varphi$ が成り立つこととする．
- 任意の L-文が φ 与えられたときに，φ が恒真かどうかを判定する一般的なアルゴリズムは存在しない (このことは不完全性定理の系として証明できる)．
- たとえば，$(A \vee \neg A)$ は，$\vee$ と $\neg$ を，それぞれ "または"，"…でない" と解釈すると，A に真の値を代入しても偽の値を代入しても，全体の真偽値は常に真になる．このような表現のことを **トートロジー** とよぶ．

トートロジーの例:

$(A \to (B \to A))$ はトートロジーである．

恒真な文とトートロジー (復習 1/3)

- L をある言語とするとき, L-文 φ が **恒真** (こうしん) であるとは, すべての L-構造 $\mathfrak{A}$ に対し, $\mathfrak{A} \models \varphi$ が成り立つこととする.
- 任意の L-文が φ 与えられたときに, φ が恒真かどうかを判定する一般的なアルゴリズムは存在しない (このことは不完全性定理の系として証明できる).
- たとえば, $(A \vee \neg A)$ は, $\vee$ と $\neg$ を, それぞれ "または", "$\cdots$でない" と解釈すると, A に真の値を代入しても偽の値を代入しても, 全体の真偽値は常に真になる. このような表現のことを **トートロジー** とよぶ.

トートロジーの例:

$(A \to (B \to A))$ はトートロジーである.

恒真な文とトートロジー (復習 1/3)

- L をある言語とするとき，L-文 φ が **恒真** (こうしん) であるとは，すべての L-構造 $\mathfrak{A}$ に対し，$\mathfrak{A} \models \varphi$ が成り立つこととする．
- 任意の L-文が φ 与えられたときに，φ が恒真かどうかを判定する一般的なアルゴリズムは存在しない (このことは不完全性定理の系として証明できる)．
- たとえば，$(A \vee \neg A)$ は，$\vee$ と $\neg$ を，それぞれ "または"，"…でない" と解釈すると，A に真の値を代入しても偽の値を代入しても，全体の真偽値は常に真になる．このような表現のことを **トートロジー** とよぶ．

トートロジーの例:

$(A \to (B \to A))$ はトートロジーである．

恒真な文とトートロジー (復習 1/3)

- L をある言語とするとき，L-文 φ が **恒真** (こうしん) であるとは，すべての L-構造 $\mathfrak{A}$ に対し，$\mathfrak{A} \models \varphi$ が成り立つこととする．
- 任意の L-文が φ 与えられたときに，φ が恒真かどうかを判定する一般的なアルゴリズムは存在しない (このことは不完全性定理の系として証明できる).
- たとえば，$(A \vee \neg A)$ は，$\vee$ と $\neg$ を，それぞれ "または"，"…でない" と解釈すると，A に真の値を代入しても偽の値を代入しても，全体の真偽値は常に真になる．このような表現のことを **トートロジー** とよぶ.

トートロジーの例:

$(A \to (B \to A))$ はトートロジーである.

恒真な文とトートロジー (復習 1/3)

- L をある言語とするとき，L-文 φ が **恒真** (こうしん) であるとは，すべての L-構造 $\mathfrak{A}$ に対し，$\mathfrak{A} \models \varphi$ が成り立つこととする．
- 任意の L-文が φ 与えられたときに，φ が恒真かどうかを判定する一般的なアルゴリズムは存在しない (このことは不完全性定理の系として証明できる).
- たとえば，$(A \vee \neg A)$ は，$\vee$ と $\neg$ を，それぞれ “または”，“…でない” と解釈すると，A に真の値を代入しても偽の値を代入しても，全体の真偽値は常に真になる．このような表現のことを **トートロジー** とよぶ．

トートロジーの例:

$(A \to (B \to A))$ はトートロジーである．

恒真な文とトートロジー (復習 2/3)

$(A \to (B \to A))$ はトートロジーである．

- 一般に上のような表現 (命題論理の論理式) がトートロジーであるかどうかは，次のような **真偽値表** を使って調べることができる:

  1 で真，0 で偽をあらわすことにして

A	B	$(B \to A)$	$(A \to (B \to A))$
0	0	1	1
0	1	0	1
1	0	1	1
1	1	1	1

- トートロジーの各々の文字変数に任意の L-文を代入して得られる L-文は，恒真である．このような L-文のことも **トートロジー** とよぶことにする．

任意の L-文 φ について φ がトートロジーであるかどうかは判定できる．

恒真な文とトートロジー (復習 2/3)

$(A \to (B \to A))$ はトートロジーである.

- 一般に上のような表現 (命題論理の論理式) がトートロジーであるかどうかは, 次のような **真偽値表** を使って調べることができる:

1 で真, 0 で偽をあらわすことにして

A	B	$(B \to A)$	$(A \to (B \to A))$
0	0	1	1
0	1	0	1
1	0	1	1
1	1	1	1

- トートロジーの各々の文字変数に任意の L-文を代入して得られる L-文は, 恒真である. このような L-文のことも **トートロジー** とよぶことにする.

任意の L-文 φ について φ がトートロジーであるかどうかは判定できる.

恒真な文とトートロジー (復習 2/3)

$(A \to (B \to A))$ はトートロジーである.

- 一般に上のような表現 (命題論理の論理式) がトートロジーであるかどうかは, 次のような **真偽値表** を使って調べることができる:

  1 で真, 0 で偽をあらわすことにして

A	B	$(B \to A)$	$(A \to (B \to A))$
0	0	1	1
0	1	0	1
1	0	1	1
1	1	1	1

- トートロジーの各々の文字変数に任意の L-文を代入して得られる L-文は, 恒真である. このような L-文のことも **トートロジー** とよぶことにする.

任意の L-文 φ について φ がトートロジーであるかどうかは判定できる.

恒真な文とトートロジー (復習 2/3)

$(A \to (B \to A))$ はトートロジーである.

- 一般に上のような表現 (命題論理の論理式) がトートロジーであるかどうかは, 次のような **真偽値表** を使って調べることができる:

  1 で真, 0 で偽をあらわすことにして

A	B	$(B \to A)$	$(A \to (B \to A))$
0	0	1	1
0	1	0	1
1	0	1	1
1	1	1	1

- トートロジーの各々の文字変数に任意の L-文を代入して得られる L-文は, 恒真である. このような L-文のことも **トートロジー** とよぶことにする.

任意の L-文 φ について φ がトートロジーであるかどうかは判定できる.

恒真な文とトートロジー (復習 2/3)

$(A \to (B \to A))$ はトートロジーである.

- 一般に上のような表現 (命題論理の論理式) がトートロジーであるかどうかは，次のような **真偽値表** を使って調べることができる:

1 で真，0 で偽をあらわすことにして

A	B	$(B \to A)$	$(A \to (B \to A))$
0	0	1	1
0	1	0	1
1	0	1	1
1	1	1	1

- トートロジーの各々の文字変数に任意の L-文を代入して得られる L-文は，恒真である．このような L-文のことも **トートロジー** とよぶことにする.

任意の L-文 φ について φ がトートロジーであるかどうかは判定できる.

恒真な文とトートロジー (復習 2/3)

$(A \to (B \to A))$ はトートロジーである.

- 一般に上のような表現 (命題論理の論理式) がトートロジーであるかどうかは, 次のような **真偽値表** を使って調べることができる:

  1 で真, 0 で偽をあらわすことにして

A	B	$(B \to A)$	$(A \to (B \to A))$
0	0	1	1
0	1	0	1
1	0	1	1
1	1	1	1

- トートロジーの各々の文字変数に任意の L-文を代入して得られる L-文は, 恒真である. このような L-文のことも **トートロジー** とよぶことにする.

任意の L-文 φ について φ がトートロジーであるかどうかは判定できる.

恒真な文とトートロジー (復習 2/3)

$(A \to (B \to A))$ はトートロジーである.

- 一般に上のような表現 (命題論理の論理式) がトートロジーであるかどうかは, 次のような **真偽値表** を使って調べることができる:

  1 で真, 0 で偽をあらわすことにして

A	B	$(B \to A)$	$(A \to (B \to A))$
0	0	1	1
0	1	0	1
1	0	1	1
1	1	1	1

- トートロジーの各々の文字変数に任意の L-文を代入して得られる L-文は, 恒真である. このような L-文のことも **トートロジー** とよぶことにする.

任意の L-文 φ について φ がトートロジーであるかどうかは判定できる.

恒真な文とトートロジー (復習 3/3)

任意の L-文 φ について φ がトートロジーであるかどうかは判定できる.

▷ L-文を代入することによって φ が得られる表現は有限個しかないから，それらの全部について，真偽値表を作ってトートロジーになっているかどうかを判定すればよい.

もしトートロジーになっているものがあれば，φ はトートロジーである．もしトートロジーとなるものが 1 つもなければ，φ もトートロジーでない.

恒真な文とトートロジー (復習 3/3)

任意の L-文 φ について φ がトートロジーであるかどうかは判定できる.

▷ L-文を代入することによって φ が得られる表現は有限個しかないから，それらの全部について，真偽値表を作ってトートロジーになっているかどうかを判定すればよい.

もしトートロジーになっているものがあれば，φ はトートロジーである．もしトートロジーとなるものが 1 つもなければ，φ もトートロジーでない.

恒真な文とトートロジー (復習 3/3)

任意の L-文 φ について φ がトートロジーであるかどうかは判定できる.

▷ L-文を代入することによって φ が得られる表現は有限個しかないから, それらの全部について, 真偽値表を作ってトートロジーになっているかどうかを判定すればよい.

もしトートロジーになっているものがあれば, φ はトートロジーである. もしトートロジーとなるものが 1 つもなければ, φ もトートロジーでない.

記法の補足

- $(\varphi_1 \to (\varphi_2 \to \varphi_3))$ を $\varphi_1 \to \varphi_2 \to \varphi_3$ と省略することにする.
- $\varphi_1 \to \varphi_2 \to \varphi_3$ は,

  "$(\varphi_1$ なら $(\varphi_2$ なら $\varphi_3))$"

  に対応する論理式だが, これは,

  "φ_1 かつ φ_2 なら φ_3 である"

  と (論理的に) 同値である.

- より一般には,

  $\varphi_1 \to \varphi_2 \to \cdots \to \varphi_n$ で,

  $$(\varphi_1 \to (\varphi_2 \to (\cdots \to (\varphi_{n-1} \to \varphi_n) \cdots)))$$

  をあらわす.

記法の補足

- $(\varphi_1 \to (\varphi_2 \to \varphi_3))$ を $\varphi_1 \to \varphi_2 \to \varphi_3$ と省略することにする.
- $\varphi_1 \to \varphi_2 \to \varphi_3$ は,

  "$(\varphi_1$ なら $(\varphi_2$ なら $\varphi_3))$"

  に対応する論理式だが, これは,

  "φ_1 かつ φ_2 なら φ_3 である"

  と (論理的に) 同値である.
- より一般には,

  $\varphi_1 \to \varphi_2 \to \cdots \to \varphi_n$ で,

  $$(\varphi_1 \to (\varphi_2 \to (\cdots \to (\varphi_{n-1} \to \varphi_n) \cdots)))$$

  をあらわす.

記法の補足

- $(\varphi_1 \to (\varphi_2 \to \varphi_3))$ を $\varphi_1 \to \varphi_2 \to \varphi_3$ と省略することにする.
- $\varphi_1 \to \varphi_2 \to \varphi_3$ は,

  "(φ_1 なら (φ_2 なら φ_3))"

  に対応する論理式だが, これは,

  "φ_1 かつ φ_2 なら φ_3 である"

  と (論理的に) 同値である.
- より一般には,

  $\varphi_1 \to \varphi_2 \to \cdots \to \varphi_n$ で,

  $$(\varphi_1 \to (\varphi_2 \to (\cdots \to (\varphi_{n-1} \to \varphi_n) \cdots)))$$

  をあらわす.

記法の補足

- $(\varphi_1 \to (\varphi_2 \to \varphi_3))$ を $\varphi_1 \to \varphi_2 \to \varphi_3$ と省略することにする.
- $\varphi_1 \to \varphi_2 \to \varphi_3$ は,

  "(φ_1 なら (φ_2 なら φ_3))"

  に対応する論理式だが, これは,

  "φ_1 かつ φ_2 なら φ_3 である"

  と (論理的に) 同値である.
- より一般には,

$\varphi_1 \to \varphi_2 \to \cdots \to \varphi_n$ で,

$$(\varphi_1 \to (\varphi_2 \to (\cdots \to (\varphi_{n-1} \to \varphi_n)\cdots)))$$

をあらわす.

体系 K^* での形式的証明 (1/4)

- 言語 L ごとに，体系 K^* での証明は次の 論理公理 と 推論規則 を用いて次のように定義される．
- K^* の **論理公理** は次のような L-文からなる:
  - トートロジーから得られた恒真な L-論理式,
  - **(等号の公理)** $x, y, z, x_1, x_2, \ldots, y_1, y_2, \ldots$ を任意の変数記号とするとき，次の形の論理式:

    (a) $x \equiv x$; (b) $x \equiv y \rightarrow y \equiv x$; (c) $x \equiv y \rightarrow y \equiv z \rightarrow x \equiv z$;

    (d) $x_1 \equiv y_1 \rightarrow \cdots \rightarrow x_m \equiv y_m \rightarrow f(x_1, \ldots, x_m) \equiv f(y_1, \ldots, y_m)$, ただし f は L の m 変数関数記号 ;

    (e) $x_1 \equiv y_1 \rightarrow \cdots \rightarrow x_n \equiv y_n \rightarrow r(x_1, \ldots, x_n) \rightarrow r(y_1, \ldots, y_n)$, ただし r は L の n 変数関係記号 .
  - **(代入公理)** φ を L-論理式として， x 変数記号， t を L-項とするとき，$\varphi(t/x) \rightarrow \exists x \varphi$ の形の論理式.

体系 K^* での形式的証明 (1/4)

- 言語 L ごとに，体系 K^* での証明は次の 論理公理 と 推論規則 を用いて次のように定義される．
- K^* の **論理公理** は次のような L-文からなる:
  - トートロジーから得られた恒真な L-論理式,
  - **(等号の公理)** $x, y, z, x_1, x_2, \ldots, y_1, y_2, \ldots$ を任意の変数記号とするとき，次の形の論理式:

    (a) $x \equiv x$; (b) $x \equiv y \to y \equiv x$; (c) $x \equiv y \to y \equiv z \to x \equiv z$;

    (d) $x_1 \equiv y_1 \to \cdots \to x_m \equiv y_m \to f(x_1, \ldots, x_m) \equiv f(y_1, \ldots, y_m)$,
    ただし f は L の m 変数関数記号 ;

    (e) $x_1 \equiv y_1 \to \cdots \to x_n \equiv y_n \to r(x_1, \ldots, x_n) \to r(y_1, \ldots, y_n)$,
    ただし r は L の n 変数関係記号 .
  - **(代入公理)** φ を L-論理式として， x 変数記号， t を L-項とするとき， $\varphi(t/x) \to \exists x\varphi$ の形の論理式.

体系 K^* での形式的証明 (1/4)

- 言語 L ごとに，体系 K^* での証明は次の 論理公理 と 推論規則 を用いて次のように定義される．
- K^* の **論理公理** は次のような L-文からなる:

▷ トートロジーから得られた恒真な L-論理式,

▷ **(等号の公理)** $x, y, z, x_1, x_2, \ldots, y_1, y_2, \ldots$ を任意の変数記号とするとき，次の形の論理式:

(a) $x \equiv x$; (b) $x \equiv y \rightarrow y \equiv x$; (c) $x \equiv y \rightarrow y \equiv z \rightarrow x \equiv z$;

(d) $x_1 \equiv y_1 \rightarrow \cdots \rightarrow x_m \equiv y_m \rightarrow f(x_1, \ldots, x_m) \equiv f(y_1, \ldots, y_m)$,
ただし f は L の m 変数関数記号 ;

(e) $x_1 \equiv y_1 \rightarrow \cdots \rightarrow x_n \equiv y_n \rightarrow r(x_1, \ldots, x_n) \rightarrow r(y_1, \ldots, y_n)$,
ただし r は L の n 変数関係記号 .

▷ **(代入公理)** φ を L-論理式として， x 変数記号， t を L-項とするとき， $\varphi(t/x) \rightarrow \exists x \varphi$ の形の論理式.

体系 K^* での形式的証明 (1/4)

- 言語 L ごとに，体系 K^* での証明は次の 論理公理 と 推論規則 を用いて次のように定義される．
- K^* の **論理公理** は次のような L-文からなる:

▷ トートロジーから得られた恒真な L-論理式,

▷ **(等号の公理)** $x, y, z, x_1, x_2, \ldots, y_1, y_2, \ldots$ を任意の変数記号とするとき，次の形の論理式:

(a) $x \equiv x$; (b) $x \equiv y \rightarrow y \equiv x$; (c) $x \equiv y \rightarrow y \equiv z \rightarrow x \equiv z$;

(d) $x_1 \equiv y_1 \rightarrow \cdots \rightarrow x_m \equiv y_m \rightarrow f(x_1, \ldots, x_m) \equiv f(y_1, \ldots, y_m)$,
ただし f は L の m 変数関数記号 ;

(e) $x_1 \equiv y_1 \rightarrow \cdots \rightarrow x_n \equiv y_n \rightarrow r(x_1, \ldots, x_n) \rightarrow r(y_1, \ldots, y_n)$,
ただし r は L の n 変数関係記号 .

▷ **(代入公理)** φ を L-論理式として， x 変数記号， t を L-項とするとき，$\varphi(t/x) \rightarrow \exists x \varphi$ の形の論理式.

体系 K^* での形式的証明 (1/4)

- 言語 L ごとに，体系 K^* での証明は次の 論理公理 と 推論規則 を用いて次のように定義される．
- K^* の **論理公理** は次のような L-文からなる:
  - トートロジーから得られた恒真な L-論理式,
  - **(等号の公理)** x, y, z, x_1, $x_2, \ldots,$ y_1, $y_2, \ldots$ を任意の変数記号とするとき，次の形の論理式:

    (a) $x \equiv x$; (b) $x \equiv y \to y \equiv x$; (c) $x \equiv y \to y \equiv z \to x \equiv z$;

    (d) $x_1 \equiv y_1 \to \cdots \to x_m \equiv y_m \to f(x_1, \ldots, x_m) \equiv f(y_1, \ldots, y_m)$, ただし f は L の m 変数関数記号 ;

    (e) $x_1 \equiv y_1 \to \cdots \to x_n \equiv y_n \to r(x_1, \ldots, x_n) \to r(y_1, \ldots, y_n)$, ただし r は L の n 変数関係記号 .
  - **(代入公理)** φ を L-論理式として， x 変数記号， t を L-項とするとき，$\varphi(t/x) \to \exists x\varphi$ の形の論理式.

体系 K^* での形式的証明 (1/4)

- 言語 L ごとに，体系 K^* での証明は次の 論理公理 と 推論規則 を用いて次のように定義される．
- K^* の **論理公理** は次のような L-文からなる:
  - トートロジーから得られた恒真な L-論理式,
  - **(等号の公理)** x, y, z, x_1, x_2,..., y_1, y_2,... を任意の変数記号とするとき，次の形の論理式:

    (a) $x \equiv x$; (b) $x \equiv y \rightarrow y \equiv x$; (c) $x \equiv y \rightarrow y \equiv z \rightarrow x \equiv z$;

    (d) $x_1 \equiv y_1 \rightarrow \cdots \rightarrow x_m \equiv y_m \rightarrow f(x_1, \ldots, x_m) \equiv f(y_1, \ldots, y_m)$, ただし f は L の m 変数関数記号 ;

    (e) $x_1 \equiv y_1 \rightarrow \cdots \rightarrow x_n \equiv y_n \rightarrow r(x_1, \ldots, x_n) \rightarrow r(y_1, \ldots, y_n)$, ただし r は L の n 変数関係記号 .
  - **(代入公理)** φ を L-論理式として， x 変数記号， t を L-項とするとき，$\varphi(t/x) \rightarrow \exists x \varphi$ の形の論理式.

体系 K^* での形式的証明 (1/4)

- 言語 L ごとに，体系 K^* での証明は次の 論理公理 と 推論規則 を用いて次のように定義される．
- K^* の **論理公理** は次のような L-文からなる:
  - ▷ トートロジーから得られた恒真な L-論理式,
  - ▷ **(等号の公理)** x, y, z, x_1, x_2,…, y_1, y_2,… を任意の変数記号とするとき，次の形の論理式:

    (a) $x \equiv x$;　(b) $x \equiv y \to y \equiv x$;　(c) $x \equiv y \to y \equiv z \to x \equiv z$;

    (d) $x_1 \equiv y_1 \to \cdots \to x_m \equiv y_m \to f(x_1, \ldots, x_m) \equiv f(y_1, \ldots, y_m)$,
    ただし f は L の m 変数関数記号 ;

    (e) $x_1 \equiv y_1 \to \cdots \to x_n \equiv y_n \to r(x_1, \ldots, x_n) \to r(y_1, \ldots, y_n)$,
    ただし r は L の n 変数関係記号 .
  - ▷ **(代入公理)** φ を L-論理式として，x 変数記号，t を L-項とするとき，$\varphi(t/x) \to \exists x \varphi$ の形の論理式.

体系 K^* での形式的証明 (1/4)

- 言語 L ごとに, 体系 K^* での証明は次の 論理公理 と 推論規則 を用いて次のように定義される.
- K^* の **論理公理** は次のような L-文からなる:

▷ トートロジーから得られた恒真な L-論理式,

▷ **(等号の公理)** $x, y, z, x_1, x_2, \dots, y_1, y_2, \dots$ を任意の変数記号とするとき, 次の形の論理式:

(a) $x \equiv x$; (b) $x \equiv y \to y \equiv x$; (c) $x \equiv y \to y \equiv z \to x \equiv z$;

(d) $x_1 \equiv y_1 \to \cdots \to x_m \equiv y_m \to f(x_1, \dots, x_m) \equiv f(y_1, \dots, y_m)$, ただし f は L の m 変数関数記号 ;

(e) $x_1 \equiv y_1 \to \cdots \to x_n \equiv y_n \to r(x_1, \dots, x_n) \to r(y_1, \dots, y_n)$, ただし r は L の n 変数関係記号 .

▷ **(代入公理)** φ を L-論理式として, x 変数記号, t を L-項とするとき, $\varphi(t/x) \to \exists x \varphi$ の形の論理式.

体系 K^* での形式的証明 (1/4)

- 言語 L ごとに，体系 K^* での証明は次の 論理公理 と 推論規則 を用いて次のように定義される．
- K^* の **論理公理** は次のような L-文からなる:

▷ トートロジーから得られた恒真な L-論理式,

▷ **(等号の公理)** $x, y, z, x_1, x_2, \ldots, y_1, y_2, \ldots$ を任意の変数記号とするとき，次の形の論理式:

(a) $x \equiv x$; (b) $x \equiv y \to y \equiv x$; (c) $x \equiv y \to y \equiv z \to x \equiv z$;

(d) $x_1 \equiv y_1 \to \cdots \to x_m \equiv y_m \to f(x_1, \ldots, x_m) \equiv f(y_1, \ldots, y_m)$,
ただし f は L の m 変数関数記号 ;

(e) $x_1 \equiv y_1 \to \cdots \to x_n \equiv y_n \to r(x_1, \ldots, x_n) \to r(y_1, \ldots, y_n)$,
ただし r は L の n 変数関係記号 .

▷ **(代入公理)** φ を L-論理式として， x 変数記号， t を L-項とするとき， $\varphi(t/x) \to \exists x \varphi$ の形の論理式.

体系 K^* での形式的証明 (1/4)

- 言語 L ごとに，体系 K^* での証明は次の 論理公理 と 推論規則 を用いて次のように定義される．
- K^* の **論理公理** は次のような L-文からなる:
  - トートロジーから得られた恒真な L-論理式,
  - **(等号の公理)** x, y, z, x_1, x_2,..., y_1, y_2,... を任意の変数記号とするとき，次の形の論理式:

    (a) $x \equiv x$; (b) $x \equiv y \to y \equiv x$; (c) $x \equiv y \to y \equiv z \to x \equiv z$;

    (d) $x_1 \equiv y_1 \to \cdots \to x_m \equiv y_m \to f(x_1, \ldots, x_m) \equiv f(y_1, \ldots, y_m)$,
    ただし f は L の m 変数関数記号 ;

    (e) $x_1 \equiv y_1 \to \cdots \to x_n \equiv y_n \to r(x_1, \ldots, x_n) \to r(y_1, \ldots, y_n)$,
    ただし r は L の n 変数関係記号 .
  - **(代入公理)** φ を L-論理式として， x 変数記号， t を L-項とするとき， $\varphi(t/x) \to \exists x\varphi$ の形の論理式.

体系 K^* での形式的証明 (1/4)

- 言語 L ごとに, 体系 K^* での証明は次の 論理公理 と 推論規則 を用いて次のように定義される.
- K^* の **論理公理** は次のような L-文からなる:
  - トートロジーから得られた恒真な L-論理式,
  - **(等号の公理)** $x, y, z, x_1, x_2, \ldots, y_1, y_2, \ldots$ を任意の変数記号とするとき, 次の形の論理式:
    (a) $x \equiv x$; (b) $x \equiv y \to y \equiv x$; (c) $x \equiv y \to y \equiv z \to x \equiv z$;
    (d) $x_1 \equiv y_1 \to \cdots \to x_m \equiv y_m \to f(x_1, \ldots, x_m) \equiv f(y_1, \ldots, y_m)$,
    ただし f は L の m 変数関数記号 ;
    (e) $x_1 \equiv y_1 \to \cdots \to x_n \equiv y_n \to r(x_1, \ldots, x_n) \to r(y_1, \ldots, y_n)$,
    ただし r は L の n 変数関係記号 .
  - **(代入公理)** φ を L-論理式として, x 変数記号, t を L-項とするとき, $\varphi(t/x) \to \exists x \varphi$ の形の論理式.

体系 K^* での形式的証明 (2/4)

- K^* の **論理公理** は次のような L-文からなる:
  - トートロジーから得られた恒真な L-論理式,
  - **(等号の公理)** x, y, z, x_1, x_2,..., y_1, y_2,... を任意の変数記号とするとき，次の形の論理式:
    (a) $x \equiv x$; (b) $x \equiv y \rightarrow y \equiv x$; (c) $x \equiv y \rightarrow y \equiv z \rightarrow x \equiv z$;
    (d) $x_1 \equiv y_1 \rightarrow \cdots \rightarrow x_m \equiv y_m \rightarrow f(x_1, \ldots, x_m) \equiv f(y_1, \ldots, y_m)$,
    ただし f は L の m 変数関数記号 ;
    (e) $x_1 \equiv y_1 \rightarrow \cdots \rightarrow x_n \equiv y_n \rightarrow r(x_1, \ldots, x_n) \rightarrow r(y_1, \ldots, y_n)$,
    ただし r は L の n 変数関係記号 .
  - **(代入公理)** φ を L-論理式として， x 変数記号， t を L-項とするとき， $\varphi(t/x) \rightarrow \exists x \varphi$ の形の論理式.
- ただし， $\varphi(t/x)$ で φ の中にあらわれる x をすべて t で置き換えて得られる表現をあらわす.
- また，上の「代入公理」の論理式は，厳密には， t に現れる変数記号が， φ にも現れていて，そのために，代入によりそれらの変数が “からみあわない” ものに限る．この条件は正確に書き出せるが，ここではその記述は省略する.

体系 K^* での形式的証明 (2/4)

- K^* の **論理公理** は次のような L-文からなる:
  - トートロジーから得られた恒真な L-論理式,
  - **(等号の公理)** x, y, z, x_1, x_2,..., y_1, y_2,... を任意の変数記号とするとき，次の形の論理式:

    (a) $x \equiv x$; (b) $x \equiv y \to y \equiv x$; (c) $x \equiv y \to y \equiv z \to x \equiv z$;

    (d) $x_1 \equiv y_1 \to \cdots \to x_m \equiv y_m \to f(x_1, \ldots, x_m) \equiv f(y_1, \ldots, y_m)$, ただし f は L の m 変数関数記号 ;

    (e) $x_1 \equiv y_1 \to \cdots \to x_n \equiv y_n \to r(x_1, \ldots, x_n) \to r(y_1, \ldots, y_n)$, ただし r は L の n 変数関係記号 .
  - **(代入公理)** φ を L-論理式として， x 変数記号， t を L-項とするとき，$\varphi(t/x) \to \exists x\varphi$ の形の論理式.
- ただし，$\varphi(t/x)$ で φ の中にあらわれる x をすべて t で置き換えて得られる表現をあらわす.
- また，上の「代入公理」の論理式は，厳密には，t に現れる変数記号が，φ にも現れていて，そのために，代入によりそれらの変数が “からみあわない” ものに限る．この条件は正確に書き出せるが，ここではその記述は省略する.

体系 K^* での形式的証明 (2/4)

- K^* の **論理公理** は次のような L-文からなる:
  - トートロジーから得られた恒真な L-論理式,
  - **(等号の公理)** x, y, z, x_1, x_2,..., y_1, y_2,... を任意の変数記号とするとき，次の形の論理式:
    (a) $x \equiv x$; (b) $x \equiv y \to y \equiv x$; (c) $x \equiv y \to y \equiv z \to x \equiv z$;
    (d) $x_1 \equiv y_1 \to \cdots \to x_m \equiv y_m \to f(x_1, \ldots, x_m) \equiv f(y_1, \ldots, y_m)$,
    ただし f は L の m 変数関数記号 ;
    (e) $x_1 \equiv y_1 \to \cdots \to x_n \equiv y_n \to r(x_1, \ldots, x_n) \to r(y_1, \ldots, y_n)$,
    ただし r は L の n 変数関係記号 .
  - **(代入公理)** φ を L-論理式として， x 変数記号， t を L-項とするとき， $\varphi(t/x) \to \exists x \varphi$ の形の論理式.
- ただし， $\varphi(t/x)$ で φ の中にあらわれる x をすべて t で置き換えて得られる表現をあらわす.
- また，上の「代入公理」の論理式は，厳密には， t に現れる変数記号が， φ にも現れていて，そのために，代入によりそれらの変数が “からみあわない” ものに限る. この条件は正確に書き出せるが，ここではその記述は省略する.

体系 K^* での形式的証明 (2/4)

- K^* の **論理公理** は次のような L-文からなる:
  - トートロジーから得られた恒真な L-論理式,
  - **(等号の公理)** x, y, z, x_1, x_2,..., y_1, y_2,... を任意の変数記号とするとき，次の形の論理式:
    (a) $x \equiv x$; (b) $x \equiv y \to y \equiv x$; (c) $x \equiv y \to y \equiv z \to x \equiv z$;
    (d) $x_1 \equiv y_1 \to \cdots \to x_m \equiv y_m \to f(x_1, \ldots, x_m) \equiv f(y_1, \ldots, y_m)$,
    ただし f は L の m 変数関数記号 ;
    (e) $x_1 \equiv y_1 \to \cdots \to x_n \equiv y_n \to r(x_1, \ldots, x_n) \to r(y_1, \ldots, y_n)$,
    ただし r は L の n 変数関係記号 .
  - **(代入公理)** φ を L-論理式として， x 変数記号， t を L-項とするとき，$\varphi(t/x) \to \exists x \varphi$ の形の論理式.
- ただし，$\varphi(t/x)$ で φ の中にあらわれる x をすべて t で置き換えて得られる表現をあらわす.
- また，上の「代入公理」の論理式は，厳密には， t に現れる変数記号が，φ にも現れていて，そのために，代入によりそれらの変数が “からみあわない” ものに限る． この条件は正確に書き出せるが， ここではその記述は省略する.

体系 K^* での形式的証明 (3/4)

- K^* の **推論規則** は以下のような二種類の図式からなる:

(三段論法) すべての L-論理式 φ, ψ に対し, $\dfrac{\varphi, \varphi \to \psi}{\psi}$ は K^* の推論規則である;

(存在推論) すべての L-論理式 φ, ψ と変数記号 x に対し, $\dfrac{\varphi \to \psi}{\exists x \varphi \to \psi}$ は K^* の推論規則である. ただし, x は ψ には自由変数として現われないものとする.

体系 K^* での形式的証明 (3/4)

- K^* の **推論規則** は以下のような二種類の図式からなる:

(三段論法) すべての L-論理式 φ, ψ に対し, $\dfrac{\varphi, \varphi \to \psi}{\psi}$ は K^* の推論規則である;

(存在推論) すべての L-論理式 φ, ψ と変数記号 x に対し, $\dfrac{\varphi \to \psi}{\exists x \varphi \to \psi}$ は K^* の推論規則である．ただし，x は ψ には自由変数として現われないものとする．

体系 K^* での形式的証明 (3/4)

- K^* の **推論規則** は以下のような二種類の図式からなる:

(三段論法) すべての L-論理式 φ, ψ に対し， $\dfrac{\varphi, \varphi \to \psi}{\psi}$ は K^* の推論規則である;

(存在推論) すべての L-論理式 φ, ψ と変数記号 x に対し， $\dfrac{\varphi \to \psi}{\exists x \varphi \to \psi}$ は K^* の推論規則である．ただし，x は ψ には自由変数として現われないものとする．

体系 K^* での形式的証明 (3/4)

- K^* の **推論規則** は以下のような二種類の図式からなる:

(三段論法) すべての L-論理式 φ, ψ に対し, $\dfrac{\varphi, \varphi \to \psi}{\psi}$ は K^* の推論規則である;

(存在推論) すべての L-論理式 φ, ψ と変数記号 x に対し, $\dfrac{\varphi \to \psi}{\exists x \varphi \to \psi}$ は K^* の推論規則である. ただし, x は ψ には自由変数として現われないものとする.

体系 K^* での形式的証明 (4/4)

- L-論理式の集合 Γ と L-論理式 φ に対し，L-論理式の列 $P = \langle \varphi_1, \ldots, \varphi_n \rangle$ が φ の Γ からの K^* での **証明** である，とは次の (α) と (β) が成り立つこととする:

(α) $\varphi_n = \varphi$;

(β) すべての $1 \leq i \leq n$ に対し，次が成り立つ:

(a) $\varphi_i \in \Gamma$ であるか，または，

(b) φ_i は K^* の論理公理であるか，または，

(c) $1 \leq j, k < i$ が存在して，$\dfrac{\varphi_j, \varphi_k}{\varphi_i}$ が 三段論法 になっているか，または，

(d) $1 \leq j < i$ が存在して，$\dfrac{\varphi_j}{\varphi_i}$ が 存在推論 になっているかのいずれかである．

体系 K^* での形式的証明 (4/4)

- L-論理式の集合 Γ と L-論理式 φ に対し，L-論理式の列 $P = \langle \varphi_1, \ldots, \varphi_n \rangle$ が φ の Γ からの K^* での **証明** である，とは次の (α) と (β) が成り立つこととする:

(α) $\varphi_n = \varphi$;

(β) すべての $1 \leq i \leq n$ に対し，次が成り立つ:

(a) $\varphi_i \in \Gamma$ であるか，または，

(b) φ_i は K^* の論理公理であるか，または，

(c) $1 \leq j, k < i$ が存在して，$\dfrac{\varphi_j, \varphi_k}{\varphi_i}$ が 三段論法 になっているか，または，

(d) $1 \leq j < i$ が存在して，$\dfrac{\varphi_j}{\varphi_i}$ が 存在推論 になっているかのいずれかである．

体系 K^* での形式的証明 (4/4)

- L-論理式の集合 Γ と L-論理式 φ に対し，L-論理式の列 $P = \langle \varphi_1, \ldots, \varphi_n \rangle$ が φ の Γ からの K^* での **証明** である，とは次の (α) と (β) が成り立つこととする:

(α) $\varphi_n = \varphi$;

(β) すべての $1 \leq i \leq n$ に対し，次が成り立つ:

(a) $\varphi_i \in \Gamma$ であるか，または，

(b) φ_i は K^* の論理公理であるか，または，

(c) $1 \leq j, k < i$ が存在して，$\dfrac{\varphi_j, \varphi_k}{\varphi_i}$ が 三段論法 になっているか，または，

(d) $1 \leq j < i$ が存在して，$\dfrac{\varphi_j}{\varphi_i}$ が 存在推論 になっているかのいずれかである．

体系 K^* での形式的証明 (4/4)

- L-論理式の集合 Γ と L-論理式 φ に対し，L-論理式の列 $P = \langle \varphi_1, \dots, \varphi_n \rangle$ が φ の Γ からの K^* での **証明** である，とは次の (α) と (β) が成り立つこととする:

(α) $\varphi_n = \varphi$;

(β) すべての $1 \leq i \leq n$ に対し，次が成り立つ:

(a) $\varphi_i \in \Gamma$ であるか，または，

(b) φ_i は K^* の論理公理であるか，または，

(c) $1 \leq j, k < i$ が存在して，$\dfrac{\varphi_j, \varphi_k}{\varphi_i}$ が 三段論法 になっているか，または，

(d) $1 \leq j < i$ が存在して，$\dfrac{\varphi_j}{\varphi_i}$ が 存在推論 になっているかのいずれかである．

体系 K^* での形式的証明 (4/4)

- L-論理式の集合 Γ と L-論理式 φ に対し，L-論理式の列 $P = \langle \varphi_1, \dots, \varphi_n \rangle$ が φ の Γ からの K^* での **証明** である，とは次の (α) と (β) が成り立つこととする:

(α) $\varphi_n = \varphi$;

(β) すべての $1 \leq i \leq n$ に対し，次が成り立つ:

(a) $\varphi_i \in \Gamma$ であるか，または，

(b) φ_i は K^* の論理公理であるか，または，

(c) $1 \leq j, k < i$ が存在して，$\dfrac{\varphi_j, \varphi_k}{\varphi_i}$ が 三段論法 になっているか，または，

(d) $1 \leq j < i$ が存在して，$\dfrac{\varphi_j}{\varphi_i}$ が 存在推論 になっているかのいずれかである．

体系 K^* での形式的証明 (4/4)

- L-論理式の集合 Γ と L-論理式 φ に対し，L-論理式の列 $P = \langle \varphi_1, \ldots, \varphi_n \rangle$ が φ の Γ からの K^* での **証明** である，とは次の (α) と (β) が成り立つこととする:

(α) $\varphi_n = \varphi$;

(β) すべての $1 \leq i \leq n$ に対し，次が成り立つ:

(a) $\varphi_i \in \Gamma$ であるか，または，

(b) φ_i は K^* の論理公理であるか，または，

(c) $1 \leq j, k < i$ が存在して，$\dfrac{\varphi_j, \varphi_k}{\varphi_i}$ が 三段論法 になっているか，または，

(d) $1 \leq j < i$ が存在して，$\dfrac{\varphi_j}{\varphi_i}$ が 存在推論 になっているかのいずれかである．

体系 K^* での形式的証明 (4/4)

- L-論理式の集合 Γ と L-論理式 φ に対し，L-論理式の列 $P = \langle \varphi_1, \dots, \varphi_n \rangle$ が φ の Γ からの K^* での **証明** である，とは次の (α) と (β) が成り立つこととする:

(α) $\varphi_n = \varphi$;

(β) すべての $1 \leq i \leq n$ に対し，次が成り立つ:

(a) $\varphi_i \in \Gamma$ であるか，または，

(b) φ_i は K^* の論理公理であるか，または，

(c) $1 \leq j, k < i$ が存在して，$\dfrac{\varphi_j, \varphi_k}{\varphi_i}$ が 三段論法 になっているか，または，

(d) $1 \leq j < i$ が存在して，$\dfrac{\varphi_j}{\varphi_i}$ が 存在推論 になっているかのいずれかである．

体系 K^* での形式的証明 (4/4)

- L-論理式の集合 Γ と L-論理式 φ に対し，L-論理式の列 $P = \langle \varphi_1, \ldots, \varphi_n \rangle$ が φ の Γ からの K^* での **証明** である，とは次の (α) と (β) が成り立つこととする:

(α) $\varphi_n = \varphi$;

(β) すべての $1 \leq i \leq n$ に対し，次が成り立つ:

(a) $\varphi_i \in \Gamma$ であるか，または，

(b) φ_i は K^* の論理公理であるか，または，

(c) $1 \leq j, k < i$ が存在して，$\dfrac{\varphi_j, \varphi_k}{\varphi_i}$ が 三段論法 になっているか，または，

(d) $1 \leq j < i$ が存在して，$\dfrac{\varphi_j}{\varphi_i}$ が 存在推論 になっているかのいずれかである．

意味論的な導出と形式的な体系での証明可能性

- L-論理式 $\varphi = \varphi(x_1, \ldots, x_n)$ に対し，L-文 $\forall x_1 \cdots \forall x_n \varphi(x_1, \ldots, x_n)$ を $\forall \overline{x} \varphi$ とあらわすことにする．
- Γ を L-文の集合として φ を L-論理式とする．
  - L-構造 $\mathfrak{A}$ に対し $\mathfrak{A} \models \Gamma$ ($\mathfrak{A}$ は Γ のモデルである) を，すべての $\psi \in \Gamma$ に対して，$\mathfrak{A} \models \psi$ となること，とする．

すべての L-構造 $\mathfrak{A}$ に対し，$\mathfrak{A} \models \Gamma$ なら $\mathfrak{A} \models \forall \overline{x} \varphi$ となるとき，これを $\Gamma \models \varphi$ とあらわす．

Γ から φ の K^* での証明が存在するとき，これを $\Gamma \vdash \varphi$ とあらわす．

意味論的な導出と形式的な体系での証明可能性

- L-論理式 $\varphi = \varphi(x_1, \ldots, x_n)$ に対し，L-文 $\forall x_1 \cdots \forall x_n \varphi(x_1, \ldots, x_n)$ を $\forall \overline{x} \varphi$ とあらわすことにする．
- Γ を L-文の集合として φ を L-論理式とする．
  - L-構造 $\mathfrak{A}$ に対し $\mathfrak{A} \models \Gamma$ ($\mathfrak{A}$ は Γ のモデルである) を，すべての $\psi \in \Gamma$ に対して，$\mathfrak{A} \models \psi$ となること，とする．

すべての L-構造 $\mathfrak{A}$ に対し，$\mathfrak{A} \models \Gamma$ なら $\mathfrak{A} \models \forall \overline{x} \varphi$ となるとき，これを $\Gamma \models \varphi$ とあらわす．

Γ から φ の K^* での証明が存在するとき，これを $\Gamma \vdash \varphi$ とあらわす．

意味論的な導出と形式的な体系での証明可能性

- L-論理式 $\varphi = \varphi(x_1, \ldots, x_n)$ に対し，L-文 $\forall x_1 \cdots \forall x_n \varphi(x_1, \ldots, x_n)$ を $\forall \overline{x} \varphi$ とあらわすことにする．
- Γ を L-文の集合として φ を L-論理式とする．
- L-構造 $\mathfrak{A}$ に対し $\mathfrak{A} \models \Gamma$ ($\mathfrak{A}$ は Γ のモデルである) を，すべての $\psi \in \Gamma$ に対して，$\mathfrak{A} \models \psi$ となること，とする．

すべての L-構造 $\mathfrak{A}$ に対し，$\mathfrak{A} \models \Gamma$ なら $\mathfrak{A} \models \forall \overline{x} \varphi$ となるとき，これを $\Gamma \models \varphi$ とあらわす．

Γ から φ の K^* での証明が存在するとき，これを $\Gamma \vdash \varphi$ とあらわす．

意味論的な導出と形式的な体系での証明可能性

- L-論理式 $\varphi = \varphi(x_1, \ldots, x_n)$ に対し，L-文 $\forall x_1 \cdots \forall x_n \varphi(x_1, \ldots, x_n)$ を $\forall \overline{x} \varphi$ とあらわすことにする．
- Γ を L-文の集合として φ を L-論理式とする．
- L-構造 $\mathfrak{A}$ に対し $\mathfrak{A} \models \Gamma$ ($\mathfrak{A}$ は Γ のモデルである) を，すべての $\psi \in \Gamma$ に対して，$\mathfrak{A} \models \psi$ となること，とする．

すべての L-構造 $\mathfrak{A}$ に対し，$\mathfrak{A} \models \Gamma$ なら $\mathfrak{A} \models \forall \overline{x} \varphi$ となるとき，これを $\Gamma \models \varphi$ とあらわす．

Γ から φ の K^* での証明が存在するとき，これを $\Gamma \vdash \varphi$ とあらわす．

意味論的な導出と形式的な体系での証明可能性

- L-論理式 $\varphi = \varphi(x_1, \ldots, x_n)$ に対し，L-文 $\forall x_1 \cdots \forall x_n \varphi(x_1, \ldots, x_n)$ を $\forall \overline{x} \varphi$ とあらわすことにする．
- Γ を L-文の集合として φ を L-論理式とする．
  - L-構造 $\mathfrak{A}$ に対し $\mathfrak{A} \models \Gamma$ ($\mathfrak{A}$ は Γ のモデルである) を，すべての $\psi \in \Gamma$ に対して，$\mathfrak{A} \models \psi$ となること，とする．

すべての L-構造 $\mathfrak{A}$ に対し，$\mathfrak{A} \models \Gamma$ なら $\mathfrak{A} \models \forall \overline{x} \varphi$ となるとき，これを $\Gamma \models \varphi$ とあらわす．

Γ から φ の K^* での証明が存在するとき，これを $\Gamma \vdash \varphi$ とあらわす．

意味論的な導出と形式的な体系での証明可能性

- L-論理式 $\varphi = \varphi(x_1, \dots, x_n)$ に対し，L-文 $\forall x_1 \cdots \forall x_n \varphi(x_1, \dots, x_n)$ を $\forall \overline{x} \varphi$ とあらわすことにする．
- Γ を L-文の集合として φ を L-論理式とする．
  - L-構造 $\mathfrak{A}$ に対し $\mathfrak{A} \models \Gamma$ ($\mathfrak{A}$ は Γ のモデルである) を，すべての $\psi \in \Gamma$ に対して，$\mathfrak{A} \models \psi$ となること，とする．

すべての L-構造 $\mathfrak{A}$ に対し，$\mathfrak{A} \models \Gamma$ なら $\mathfrak{A} \models \forall \overline{x} \varphi$ となるとき，これを $\Gamma \models \varphi$ とあらわす．

Γ から φ の K^* での証明が存在するとき，これを $\Gamma \vdash \varphi$ とあらわす．

K^* の健全性と完全性

健全性定理. $\Gamma \vdash \varphi$ なら $\Gamma \models \varphi$ である.

完全性定理 (ゲーデル, 1929(昭和 4) 年). $\Gamma \models \varphi$ なら $\Gamma \vdash \varphi$ である.

- 健全性定理と完全性定理は, K^* での形式的証明が, 数学での証明の完全な形式化になっていることを示していると解釈できる.
- 特に, K^* での形式的な公理系として書き下せる数学体系での, すべての証明は, K^* での形式的証明に翻訳できる, と考えてよい.

K^* の健全性と完全性

健全性定理. $\Gamma \vdash \varphi$ なら $\Gamma \models \varphi$ である.

完全性定理 (ゲーデル, 1929(昭和 4) 年). $\Gamma \models \varphi$ なら $\Gamma \vdash \varphi$ である.

- 健全性定理と完全性定理は, K^* での形式的証明が, 数学での証明の完全な形式化になっていることを示していると解釈できる.
- 特に, K^* での形式的な公理系として書き下せる数学体系での, すべての証明は, K^* での形式的証明に翻訳できる, と考えてよい.

K^* の健全性と完全性

健全性定理. $\Gamma \vdash \varphi$ なら $\Gamma \models \varphi$ である.

完全性定理 (ゲーデル，1929(昭和 4) 年). $\Gamma \models \varphi$ なら $\Gamma \vdash \varphi$ である.

- 健全性定理と完全性定理は，K^* での形式的証明が，数学での証明の完全な形式化になっていることを示していると解釈できる.
- 特に，K^* での形式的な公理系として書き下せる数学体系での，すべての証明は，K^* での形式的証明に翻訳できる，と考えてよい.

K^* の健全性と完全性

健全性定理． $\Gamma \vdash \varphi$ なら $\Gamma \models \varphi$ である．

完全性定理 (ゲーデル，1929(昭和 4) 年)． $\Gamma \models \varphi$ なら $\Gamma \vdash \varphi$ である．

- 健全性定理と完全性定理は，K^* での形式的証明が，数学での証明の完全な形式化になっていることを示していると解釈できる．
- 特に，K^* での形式的な公理系として書き下せる数学体系での，すべての証明は，K^* での形式的証明に翻訳できる，と考えてよい．

K^* の健全性と完全性

健全性定理. $\Gamma \vdash \varphi$ なら $\Gamma \models \varphi$ である.

完全性定理 (ゲーデル, 1929(昭和 4) 年). $\Gamma \models \varphi$ なら $\Gamma \vdash \varphi$ である.

- 健全性定理と完全性定理は, K^* での形式的証明が, 数学での証明の完全な形式化になっていることを示していると解釈できる.
- 特に, K^* での形式的な公理系として書き下せる数学体系での, すべての証明は, K^* での形式的証明に翻訳できる, と考えてよい.

K^* での形式的証明の例

- K^* での形式的証明は，普通に数学で行なう証明よりずっと複雑になってしまうことが多い．
- もっと普通に数学で行なう証明に近い形で証明が形式化できる (K^* と同値な) 体系が色々工夫されている．
- これらの体系は，コンピュータ上に実装することも可能である．(このようなプログラムは proof checker とよばれることがある)

K^* での形式的証明の例:

$\mathsf{PA} \vdash 0 + 0 \equiv 0.$

K^* での形式的証明の例

- K^* での形式的証明は，普通に数学で行なう証明よりずっと複雑になってしまうことが多い．
- もっと普通に数学で行なう証明に近い形で証明が形式化できる (K^* と同値な) 体系が色々工夫されている．
- これらの体系は，コンピュータ上に実装することも可能である．(このようなプログラムは proof checker とよばれることがある)

K^* での形式的証明の例:

$\mathsf{PA} \vdash 0 + 0 \equiv 0.$

K^* での形式的証明の例

- K^* での形式的証明は，普通に数学で行なう証明よりずっと複雑になってしまうことが多い．
- もっと普通に数学で行なう証明に近い形で証明が形式化できる (K^* と同値な) 体系が色々工夫されている．
- これらの体系は，コンピュータ上に実装することも可能である．(このようなプログラムは proof checker とよばれることがある)

K^* での形式的証明の例:

$\mathrm{PA} \vdash 0 + 0 \equiv 0.$

K^* での形式的証明の例

- K^* での形式的証明は，普通に数学で行なう証明よりずっと複雑になってしまうことが多い．
- もっと普通に数学で行なう証明に近い形で証明が形式化できる (K^* と同値な) 体系が色々工夫されている．
- これらの体系は，コンピュータ上に実装することも可能である．(このようなプログラムは proof checker とよばれることがある)

K^* での形式的証明の例:

$\mathrm{PA} \vdash 0 + 0 \equiv 0.$

K^* での形式的証明の例

- K^* での形式的証明は，普通に数学で行なう証明よりずっと複雑になってしまうことが多い．
- もっと普通に数学で行なう証明に近い形で証明が形式化できる (K^* と同値な) 体系が色々工夫されている．
- これらの体系は，コンピュータ上に実装することも可能である．(このようなプログラムは proof checker とよばれることがある)

K^* での形式的証明の例:

$\mathsf{PA} \vdash 0 + 0 \equiv 0.$

K^* での形式的証明の例

- K^* での形式的証明は，普通に数学で行なう証明よりずっと複雑になってしまうことが多い.
- もっと普通に数学で行なう証明に近い形で証明が形式化できる (K^* と同値な) 体系が色々工夫されている.
- これらの体系は，コンピュータ上に実装することも可能である. (このようなプログラムは proof checker とよばれることがある)

K^* での形式的証明の例:

$\mathsf{PA} \vdash 0 + 0 \equiv 0.$

クルト・ゲーデル
1906 - 1978
この彼の時代の最も重要な論理学者は，数学と哲学の学生として，1927 年 10 月 6 日から 1928 年 7 月 1 日までここに住んだ．

$$T \nvdash \perp \quad \Leftrightarrow \quad T \nvdash \mathrm{CONS}_T$$