数理の世界 (数学の考え方)
— ゲーデルの不完全性定理

形式的証明，体系の無矛盾性と完全性，(第 IX 回の講義)

Sakaé Fuchino (渕野 昌)

Dept. of Computer Sciences
Kobe University
(神戸大学大学院 システム情報学研究科)

http://kurt.scitec.kobe-u.ac.jp/~fuchino/

(9. Dezember 2012 (08:22 JST) version)

神戸大学 2012 年後期の講義
於 K302 教室，月曜 8:50 – 10:20

December 03, 2012

This presentation is typeset by pLaTeX with beamer class.

述語論理の体系 K^* (復習 1/2)

言語 L に対する体系 K^* の論理公理

- トートロジーから得られた恒真な L-論理式,
- **(等号の公理)**

(a) $x \equiv x$; (b) $x \equiv y \to y \equiv x$; (c) $x \equiv y \to y \equiv z \to x \equiv z$;

(d) $x_1 \equiv y_1 \to \cdots \to x_m \equiv y_m \to f(x_1, \ldots, x_m) \equiv f(y_1, \ldots, y_m)$

(e) $x_1 \equiv y_1 \to \cdots \to x_n \equiv y_n \to r(x_1, \ldots, x_n) \to r(y_1, \ldots, y_n)$

- **(代入公理)** φ を L-論理式として, x 変数記号, t を L-項とするとき, $\varphi(t/x) \to \exists x\varphi$ の形の論理式で, 変数の「からまり」のないもの

言語 L に対する体系 K^* の推論規則

(三段論法) $$\frac{\varphi,\ \varphi \to \psi}{\psi}$$

(存在推論) $$\frac{\varphi \to \psi}{\exists x\varphi \to \psi}$$ ただし, x は ψ には自由変数としては現れないものとする.

述語論理の体系 K^* (復習 1/2)

言語 L に対する体系 K^* の論理公理

・ トートロジーから得られた恒真な L-論理式,

・ **(等号の公理)**

(a) $x \equiv x$; (b) $x \equiv y \to y \equiv x$; (c) $x \equiv y \to y \equiv z \to x \equiv z$;

(d) $x_1 \equiv y_1 \to \cdots \to x_m \equiv y_m \to f(x_1, \ldots, x_m) \equiv f(y_1, \ldots, y_m)$

(e) $x_1 \equiv y_1 \to \cdots \to x_n \equiv y_n \to r(x_1, \ldots, x_n) \to r(y_1, \ldots, y_n)$

・ **(代入公理)** φ を L-論理式として, x 変数記号, t を L-項とするとき, $\varphi(t/x) \to \exists x\varphi$ の形の論理式で, 変数の「からまり」のないもの

言語 L に対する体系 K^* の推論規則

(三段論法) $$\frac{\varphi,\ \varphi \to \psi}{\psi}$$

(存在推論) $$\frac{\varphi \to \psi}{\exists x\varphi \to \psi}$$ ただし, x は ψ には自由変数としては現れないものとする.

述語論理の体系 K^* (復習 1/2)

言語 L に対する体系 K^* の論理公理

- トートロジーから得られた恒真な L-論理式,
- **(等号の公理)**

(a) $x \equiv x$; (b) $x \equiv y \to y \equiv x$; (c) $x \equiv y \to y \equiv z \to x \equiv z$;

(d) $x_1 \equiv y_1 \to \cdots \to x_m \equiv y_m \to f(x_1, \ldots, x_m) \equiv f(y_1, \ldots, y_m)$

(e) $x_1 \equiv y_1 \to \cdots \to x_n \equiv y_n \to r(x_1, \ldots, x_n) \to r(y_1, \ldots, y_n)$

- **(代入公理)** φ を L-論理式として, x 変数記号, t を L-項とするとき, $\varphi(t/x) \to \exists x \varphi$ の形の論理式で, 変数の「からまり」のないもの

言語 L に対する体系 K^* の推論規則

(三段論法) $\dfrac{\varphi,\ \varphi \to \psi}{\psi}$

(存在推論) $\dfrac{\varphi \to \psi}{\exists x \varphi \to \psi}$ ただし, x は ψ には自由変数としては現れないものとする.

述語論理の体系 K^* (復習 2/2)

L-論理式の集合 Γ と L-論理式 φ に対し，L-論理式の列 $P = \langle \varphi_1, \ldots, \varphi_n \rangle$ が φ の Γ からの K^* での **証明** である，とは次の (α) と (β) が成り立つこととする:

(α) $\varphi_n = \varphi$;

(β) すべての $1 \leq i \leq n$ に対し，次が成り立つ:

(a) $\varphi_i \in \Gamma$ であるか， または，

(b) φ_i は K^* の論理公理であるか， または，

(c) $1 \leq j, k < i$ が存在して，$\dfrac{\varphi_j, \varphi_k}{\varphi_i}$ が 三段論法 になっているか， または，

(d) $1 \leq j < i$ が存在して，$\dfrac{\varphi_j}{\varphi_i}$ が 存在推論 になっているかのいずれかである．

- Γ からの φ の証明が存在するとき， これを $\Gamma \vdash \varphi$ とあらわす． P が φ の Γ からの証明のとき， これを $\Gamma \vdash^P \varphi$ とあらわす．

述語論理の体系 K^* (復習 2/2)

L-論理式の集合 Γ と L-論理式 φ に対し，L-論理式の列 $P = \langle \varphi_1, \dots, \varphi_n \rangle$ が φ の Γ からの K^* での **証明** である，とは次の (α) と (β) が成り立つこととする:

(α) $\varphi_n = \varphi$;

(β) すべての $1 \le i \le n$ に対し，次が成り立つ:

(a) $\varphi_i \in \Gamma$ であるか， または,

(b) φ_i は K^* の論理公理であるか， または,

(c) $1 \le j, k < i$ が存在して， $\dfrac{\varphi_j,\ \varphi_k}{\varphi_i}$ が 三段論法 になっているか， または,

(d) $1 \le j < i$ が存在して， $\dfrac{\varphi_j}{\varphi_i}$ が 存在推論 になっているかのいずれかである．

- Γ からの φ の証明が存在するとき， これを $\Gamma \vdash \varphi$ とあらわす． P が φ の Γ からの証明のとき， これを $\Gamma \vdash^P \varphi$ とあらわす．

述語論理の体系 K^* (復習 2/2)

L-論理式の集合 Γ と L-論理式 φ に対し，L-論理式の列 $P = \langle \varphi_1, \dots, \varphi_n \rangle$ が φ の Γ からの K^* での **証明** である，とは次の (α) と (β) が成り立つこととする:

(α) $\varphi_n = \varphi$;

(β) すべての $1 \leq i \leq n$ に対し，次が成り立つ:

(a) $\varphi_i \in \Gamma$ であるか，　または，

(b) φ_i は K^* の論理公理であるか，　または，

(c) $1 \leq j, k < i$ が存在して，$\dfrac{\varphi_j, \varphi_k}{\varphi_i}$ が 三段論法 になっているか，　または，

(d) $1 \leq j < i$ が存在して，$\dfrac{\varphi_j}{\varphi_i}$ が 存在推論 になっているかのいずれかである．

- Γ からの φ の証明が存在するとき，これを $\Gamma \vdash \varphi$ とあらわす．P が φ の Γ からの証明のとき，これを $\Gamma \vdash^P \varphi$ とあらわす．

K^* での証明の例 (1/2)

- 以下の $\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_{13}$ を並べた，$P = \langle \varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_{13} \rangle$ は，$0 + 0 \equiv 0$ の PA からの証明になっている．

φ_0:	$(\neg 0 + 0 \equiv 0 \to \exists x \neg x + 0 \equiv x)$	代入公理
φ_1:	$(\neg 0 + 0 \equiv 0 \to \exists x \neg x + 0 \equiv x) \to (\neg \exists x \neg x + 0 \equiv x \to 0 + 0 \equiv 0)$	トートロジー
φ_2:	$(\neg \exists x \neg x + 0 \equiv x \to 0 + 0 \equiv 0)$	$\frac{\varphi_0, \varphi_1}{\varphi_2}$ 三段論法
φ_3:	$x + 0 \equiv x \to y + 0 \equiv y \to x + 0 \equiv x$	トートロジー
φ_4:	$x + 0 \equiv x$	a_1
φ_5:	$(y + 0 \equiv y \to x + 0 \equiv x)$	$\frac{\varphi_4, \varphi_3}{\varphi_5}$ 三段論法
φ_6:	$(y + 0 \equiv y \to x + 0 \equiv x) \to (\neg x + 0 \equiv x \to \neg y + 0 \equiv y)$	トートロジー
φ_7:	$(\neg x + 0 \equiv x \to \neg y + 0 \equiv y)$	$\frac{\varphi_5, \varphi_6}{\varphi_7}$ 三段論法
φ_8:	$(\exists x \neg x + 0 \equiv x \to \neg y + 0 \equiv y)$	$\frac{\varphi_7}{\varphi_8}$ 存在推論

K^* での証明の例 (1/2)

- 以下の $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_{13}$ を並べた, $P = \langle \varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_{13} \rangle$ は, $0 + 0 \equiv 0$ の PA からの証明になっている.

φ_0: $(\neg 0 + 0 \equiv 0 \to \exists x \neg x + 0 \equiv x)$ 代入公理

φ_1: $(\neg 0 + 0 \equiv 0 \to \exists x \neg x + 0 \equiv x) \to (\neg \exists x \neg x + 0 \equiv x \to 0 + 0 \equiv 0)$ トートロジー

φ_2: $(\neg \exists x \neg x + 0 \equiv x \to 0 + 0 \equiv 0)$ $\frac{\varphi_0, \varphi_1}{\varphi_2}$ 三段論法

φ_3: $x + 0 \equiv x \to y + 0 \equiv y \to x + 0 \equiv x$ トートロジー

φ_4: $x + 0 \equiv x$ a_1

φ_5: $(y + 0 \equiv y \to x + 0 \equiv x)$ $\frac{\varphi_4, \varphi_3}{\varphi_5}$ 三段論法

φ_6: $(y + 0 \equiv y \to x + 0 \equiv x) \to (\neg x + 0 \equiv x \to \neg y + 0 \equiv y)$ トートロジー

φ_7: $(\neg x + 0 \equiv x \to \neg y + 0 \equiv y)$ $\frac{\varphi_5, \varphi_6}{\varphi_7}$ 三段論法

φ_8: $(\exists x \neg x + 0 \equiv x \to \neg y + 0 \equiv y)$ $\frac{\varphi_7}{\varphi_8}$ 存在推論

K^* での証明の例 (1/2)

- 以下の $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_{13}$ を並べた, $P = \langle \varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_{13} \rangle$ は, $0 + 0 \equiv 0$ の PA からの証明になっている.

φ_0: $(\neg 0 + 0 \equiv 0 \to \exists x \neg x + 0 \equiv x)$ 代入公理

φ_1: $(\neg 0 + 0 \equiv 0 \to \exists x \neg x + 0 \equiv x) \to (\neg \exists x \neg x + 0 \equiv x \to 0 + 0 \equiv 0)$ トートロジー

φ_2: $(\neg \exists x \neg x + 0 \equiv x \to 0 + 0 \equiv 0)$ $\frac{\varphi_0, \varphi_1}{\varphi_2}$ 三段論法

φ_3: $x + 0 \equiv x \to y + 0 \equiv y \to x + 0 \equiv x$ トートロジー

φ_4: $x + 0 \equiv x$ a_1

φ_5: $(y + 0 \equiv y \to x + 0 \equiv x)$ $\frac{\varphi_4, \varphi_3}{\varphi_5}$ 三段論法

φ_6: $(y + 0 \equiv y \to x + 0 \equiv x) \to (\neg x + 0 \equiv x \to \neg y + 0 \equiv y)$ トートロジー

φ_7: $(\neg x + 0 \equiv x \to \neg y + 0 \equiv y)$ $\frac{\varphi_5, \varphi_6}{\varphi_7}$ 三段論法

φ_8: $(\exists x \neg x + 0 \equiv x \to \neg y + 0 \equiv y)$ $\frac{\varphi_7}{\varphi_8}$ 存在推論

K^* での証明の例 (1/2)

- 以下の $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_{13}$ を並べた，$P = \langle \varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_{13} \rangle$ は，$0+0 \equiv 0$ の PA からの証明になっている．

φ_0: $(\neg 0+0 \equiv 0 \to \exists x \neg x+0 \equiv x)$ 代入公理

φ_1: $(\neg 0+0 \equiv 0 \to \exists x \neg x+0 \equiv x) \to (\neg \exists x \neg x+0 \equiv x \to 0+0 \equiv 0)$ トートロジー

φ_2: $(\neg \exists x \neg x+0 \equiv x \to 0+0 \equiv 0)$ $\frac{\varphi_0, \varphi_1}{\varphi_2}$ 三段論法

φ_3: $x+0 \equiv x \to y+0 \equiv y \to x+0 \equiv x$ トートロジー

φ_4: $x+0 \equiv x$ a_1

φ_5: $(y+0 \equiv y \to x+0 \equiv x)$ $\frac{\varphi_4, \varphi_3}{\varphi_5}$ 三段論法

φ_6: $(y+0 \equiv y \to x+0 \equiv x) \to (\neg x+0 \equiv x \to \neg y+0 \equiv y)$ トートロジー

φ_7: $(\neg x+0 \equiv x \to \neg y+0 \equiv y)$ $\frac{\varphi_5, \varphi_6}{\varphi_7}$ 三段論法

φ_8: $(\exists x \neg x+0 \equiv x \to \neg y+0 \equiv y)$ $\frac{\varphi_7}{\varphi_8}$ 存在推論

K^* での証明の例 (1/2)

- 以下の $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_{13}$ を並べた, $P = \langle \varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_{13} \rangle$ は, $0+0 \equiv 0$ の PA からの証明になっている.

φ_0: $(\neg 0+0 \equiv 0 \to \exists x \neg x+0 \equiv x)$ 代入公理

φ_1: $(\neg 0+0 \equiv 0 \to \exists x \neg x+0 \equiv x)$
$\to (\neg \exists x \neg x+0 \equiv x \to 0+0 \equiv 0)$ トートロジー

φ_2: $(\neg \exists x \neg x+0 \equiv x \to 0+0 \equiv 0)$ $\frac{\varphi_0, \varphi_1}{\varphi_2}$ 三段論法

φ_3: $x+0 \equiv x \to y+0 \equiv y \to x+0 \equiv x$ トートロジー

φ_4: $x+0 \equiv x$ a_1

φ_5: $(y+0 \equiv y \to x+0 \equiv x)$ $\frac{\varphi_4, \varphi_3}{\varphi_5}$ 三段論法

φ_6: $(y+0 \equiv y \to x+0 \equiv x)$
$\to (\neg x+0 \equiv x \to \neg y+0 \equiv y)$ トートロジー

φ_7: $(\neg x+0 \equiv x \to \neg y+0 \equiv y)$ $\frac{\varphi_5, \varphi_6}{\varphi_7}$ 三段論法

φ_8: $(\exists x \neg x+0 \equiv x \to \neg y+0 \equiv y)$ $\frac{\varphi_7}{\varphi_8}$ 存在推論

K^* での証明の例 (1/2)

- 以下の $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_{13}$ を並べた, $P = \langle \varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_{13} \rangle$ は, $0 + 0 \equiv 0$ の PA からの証明になっている.

φ_0:	$(\neg 0 + 0 \equiv 0 \to \exists x \neg x + 0 \equiv x)$	代入公理
φ_1:	$(\neg 0 + 0 \equiv 0 \to \exists x \neg x + 0 \equiv x) \to (\neg \exists x \neg x + 0 \equiv x \to 0 + 0 \equiv 0)$	トートロジー
φ_2:	$(\neg \exists x \neg x + 0 \equiv x \to 0 + 0 \equiv 0)$	$\frac{\varphi_0, \varphi_1}{\varphi_2}$ 三段論法
φ_3:	$x + 0 \equiv x \to y + 0 \equiv y \to x + 0 \equiv x$	トートロジー
φ_4:	$x + 0 \equiv x$	a_1
φ_5:	$(y + 0 \equiv y \to x + 0 \equiv x)$	$\frac{\varphi_4, \varphi_3}{\varphi_5}$ 三段論法
φ_6:	$(y + 0 \equiv y \to x + 0 \equiv x) \to (\neg x + 0 \equiv x \to \neg y + 0 \equiv y)$	トートロジー
φ_7:	$(\neg x + 0 \equiv x \to \neg y + 0 \equiv y)$	$\frac{\varphi_5, \varphi_6}{\varphi_7}$ 三段論法
φ_8:	$(\exists x \neg x + 0 \equiv x \to \neg y + 0 \equiv y)$	$\frac{\varphi_7}{\varphi_8}$ 存在推論

K^* での証明の例 (1/2)

- 以下の $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_{13}$ を並べた，$P = \langle \varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_{13} \rangle$ は，$0 + 0 \equiv 0$ の PA からの証明になっている．

φ_0:	$(\neg 0 + 0 \equiv 0 \rightarrow \exists x \neg x + 0 \equiv x)$	代入公理
φ_1:	$(\neg 0 + 0 \equiv 0 \rightarrow \exists x \neg x + 0 \equiv x) \rightarrow (\neg \exists x \neg x + 0 \equiv x \rightarrow 0 + 0 \equiv 0)$	トートロジー
φ_2:	$(\neg \exists x \neg x + 0 \equiv x \rightarrow 0 + 0 \equiv 0)$	$\frac{\varphi_0, \varphi_1}{\varphi_2}$ 三段論法
φ_3:	$x + 0 \equiv x \rightarrow y + 0 \equiv y \rightarrow x + 0 \equiv x$	トートロジー
φ_4:	$x + 0 \equiv x$	a_1
φ_5:	$(y + 0 \equiv y \rightarrow x + 0 \equiv x)$	$\frac{\varphi_4, \varphi_3}{\varphi_5}$ 三段論法
φ_6:	$(y + 0 \equiv y \rightarrow x + 0 \equiv x) \rightarrow (\neg x + 0 \equiv x \rightarrow \neg y + 0 \equiv y)$	トートロジー
φ_7:	$(\neg x + 0 \equiv x \rightarrow \neg y + 0 \equiv y)$	$\frac{\varphi_5, \varphi_6}{\varphi_7}$ 三段論法
φ_8:	$(\exists x \neg x + 0 \equiv x \rightarrow \neg y + 0 \equiv y)$	$\frac{\varphi_7}{\varphi_8}$ 存在推論

K^* での証明の例 (1/2)

- 以下の $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_{13}$ を並べた，$P = \langle \varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_{13} \rangle$ は，$0+0 \equiv 0$ の PA からの証明になっている．

φ_0: $(\neg 0+0 \equiv 0 \to \exists x \neg x+0 \equiv x)$ 代入公理

φ_1: $(\neg 0+0 \equiv 0 \to \exists x \neg x+0 \equiv x) \to (\neg \exists x \neg x+0 \equiv x \to 0+0 \equiv 0)$ トートロジー

φ_2: $(\neg \exists x \neg x+0 \equiv x \to 0+0 \equiv 0)$ $\frac{\varphi_0, \varphi_1}{\varphi_2}$ 三段論法

φ_3: $x+0 \equiv x \to y+0 \equiv y \to x+0 \equiv x$ トートロジー

φ_4: $x+0 \equiv x$ a_1

φ_5: $(y+0 \equiv y \to x+0 \equiv x)$ $\frac{\varphi_4, \varphi_3}{\varphi_5}$ 三段論法

φ_6: $(y+0 \equiv y \to x+0 \equiv x) \to (\neg x+0 \equiv x \to \neg y+0 \equiv y)$ トートロジー

φ_7: $(\neg x+0 \equiv x \to \neg y+0 \equiv y)$ $\frac{\varphi_5, \varphi_6}{\varphi_7}$ 三段論法

φ_8: $(\exists x \neg x+0 \equiv x \to \neg y+0 \equiv y)$ $\frac{\varphi_7}{\varphi_8}$ 存在推論

K^* での証明の例 (1/2)

- 以下の $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_{13}$ を並べた，$P = \langle \varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_{13} \rangle$ は，$0+0 \equiv 0$ の PA からの証明になっている．

φ_0: $(\neg 0+0 \equiv 0 \to \exists x \neg x+0 \equiv x)$ 代入公理

φ_1: $(\neg 0+0 \equiv 0 \to \exists x \neg x+0 \equiv x) \to (\neg \exists x \neg x+0 \equiv x \to 0+0 \equiv 0)$ トートロジー

φ_2: $(\neg \exists x \neg x+0 \equiv x \to 0+0 \equiv 0)$ $\frac{\varphi_0, \varphi_1}{\varphi_2}$ 三段論法

φ_3: $x+0 \equiv x \to y+0 \equiv y \to x+0 \equiv x$ トートロジー

φ_4: $x+0 \equiv x$ a_1

φ_5: $(y+0 \equiv y \to x+0 \equiv x)$ $\frac{\varphi_4, \varphi_3}{\varphi_5}$ 三段論法

φ_6: $(y+0 \equiv y \to x+0 \equiv x) \to (\neg x+0 \equiv x \to \neg y+0 \equiv y)$ トートロジー

φ_7: $(\neg x+0 \equiv x \to \neg y+0 \equiv y)$ $\frac{\varphi_5, \varphi_6}{\varphi_7}$ 三段論法

φ_8: $(\exists x \neg x+0 \equiv x \to \neg y+0 \equiv y)$ $\frac{\varphi_7}{\varphi_8}$ 存在推論

K^* での証明の例 (1/2)

- 以下の $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_{13}$ を並べた，$P = \langle \varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_{13} \rangle$ は，$0 + 0 \equiv 0$ の PA からの証明になっている．

φ_0: $(\neg 0 + 0 \equiv 0 \to \exists x \neg x + 0 \equiv x)$ 代入公理

φ_1: $(\neg 0 + 0 \equiv 0 \to \exists x \neg x + 0 \equiv x) \to (\neg \exists x \neg x + 0 \equiv x \to 0 + 0 \equiv 0)$ トートロジー

φ_2: $(\neg \exists x \neg x + 0 \equiv x \to 0 + 0 \equiv 0)$ $\frac{\varphi_0, \varphi_1}{\varphi_2}$ 三段論法

φ_3: $x + 0 \equiv x \to y + 0 \equiv y \to x + 0 \equiv x$ トートロジー

φ_4: $x + 0 \equiv x$ a_1

φ_5: $(y + 0 \equiv y \to x + 0 \equiv x)$ $\frac{\varphi_4, \varphi_3}{\varphi_5}$ 三段論法

φ_6: $(y + 0 \equiv y \to x + 0 \equiv x) \to (\neg x + 0 \equiv x \to \neg y + 0 \equiv y)$ トートロジー

φ_7: $(\neg x + 0 \equiv x \to \neg y + 0 \equiv y)$ $\frac{\varphi_5, \varphi_6}{\varphi_7}$ 三段論法

φ_8: $(\exists x \neg x + 0 \equiv x \to \neg y + 0 \equiv y)$ $\frac{\varphi_7}{\varphi_8}$ 存在推論

K^* での証明の例 (1/2)

- 以下の $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_{13}$ を並べた, $P = \langle \varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_{13} \rangle$ は, $0+0 \equiv 0$ の PA からの証明になっている.

φ_0:	$(\neg 0+0 \equiv 0 \to \exists x \neg x+0 \equiv x)$	代入公理
φ_1:	$(\neg 0+0 \equiv 0 \to \exists x \neg x+0 \equiv x) \to (\neg \exists x \neg x+0 \equiv x \to 0+0 \equiv 0)$	トートロジー
φ_2:	$(\neg \exists x \neg x+0 \equiv x \to 0+0 \equiv 0)$	$\frac{\varphi_0, \varphi_1}{\varphi_2}$ 三段論法
φ_3:	$x+0 \equiv x \to y+0 \equiv y \to x+0 \equiv x$	トートロジー
φ_4:	$x+0 \equiv x$	a_1
φ_5:	$(y+0 \equiv y \to x+0 \equiv x)$	$\frac{\varphi_4, \varphi_3}{\varphi_5}$ 三段論法
φ_6:	$(y+0 \equiv y \to x+0 \equiv x) \to (\neg x+0 \equiv x \to \neg y+0 \equiv y)$	トートロジー
φ_7:	$(\neg x+0 \equiv x \to \neg y+0 \equiv y)$	$\frac{\varphi_5, \varphi_6}{\varphi_7}$ 三段論法
φ_8:	$(\exists x \neg x+0 \equiv x \to \neg y+0 \equiv y)$	$\frac{\varphi_7}{\varphi_8}$ 存在推論

K^* での証明の例 (2/2)

φ_9: $(\exists x \neg x + 0 \equiv x \to \neg y + 0 \equiv y)$
$\to (y + 0 \equiv y \to \neg \exists x \neg x + 0 \equiv x)$ トートロジー

φ_{10}: $(y + 0 \equiv y \to \neg \exists x \neg x + 0 \equiv x)$ $\frac{\varphi_8, \varphi_9}{\varphi_{10}}$ 三段論法

φ_{11}: $y + 0 \equiv y$ a_1

φ_{12}: $\neg \exists x \neg x + 0 \equiv x$ $\frac{\varphi_{11}, \varphi_{10}}{\varphi_{12}}$ 三段論法

φ_{13}: $0 + 0 \equiv 0$ $\frac{\varphi_{12}, \varphi_2}{\varphi_{13}}$ 三段論法

□

- PA では, $S(0)$, $S(S(0))$, $S(S(S(0)))$ を, 数表記 1, 2, 3,... のことと考えられるのだった.

演習問題. PA $\vdash \neg 0 \equiv S(0)$ となることを示せ.

K^* での証明の例 (2/2)

φ_9: $(\exists x \neg x + 0 \equiv x \to \neg y + 0 \equiv y)$
$\to (y + 0 \equiv y \to \neg\exists x \neg x + 0 \equiv x)$ トートロジー

φ_{10}: $(y + 0 \equiv y \to \neg\exists x \neg x + 0 \equiv x)$ $\frac{\varphi_8,\varphi_9}{\varphi_{10}}$ 三段論法

φ_{11}: $y + 0 \equiv y$ a_1

φ_{12}: $\neg\exists x \neg x + 0 \equiv x$ $\frac{\varphi_{11},\varphi_{10}}{\varphi_{12}}$ 三段論法

φ_{13}: $0 + 0 \equiv 0$ $\frac{\varphi_{12},\varphi_2}{\varphi_{13}}$ 三段論法

□

- PA では，$S(0)$, $S(S(0))$, $S(S(S(0)))$ を，数表記 1, 2, 3,... のことと考えられるのだった．

演習問題． $\mathrm{PA} \vdash \neg 0 \equiv S(0)$ となることを示せ．

K^* での証明の例 (2/2)

φ_9: $(\exists x \neg x + 0 \equiv x \to \neg y + 0 \equiv y)$
$\to (y + 0 \equiv y \to \neg \exists x \neg x + 0 \equiv x)$ トートロジー

φ_{10}: $(y + 0 \equiv y \to \neg \exists x \neg x + 0 \equiv x)$ $\frac{\varphi_8, \varphi_9}{\varphi_{10}}$ 三段論法

φ_{11}: $y + 0 \equiv y$ a_1

φ_{12}: $\neg \exists x \neg x + 0 \equiv x$ $\frac{\varphi_{11}, \varphi_{10}}{\varphi_{12}}$ 三段論法

φ_{13}: $0 + 0 \equiv 0$ $\frac{\varphi_{12}, \varphi_2}{\varphi_{13}}$ 三段論法

$\square$

- PA では，$S(0)$, $S(S(0))$, $S(S(S(0)))$ を，数表記 1, 2, 3,... のことと考えられるのだった．

演習問題． PA $\vdash \neg 0 \equiv S(0)$ となることを示せ．

K^* での証明の例 (2/2)

φ_9: $(\exists x \neg x + 0 \equiv x \to \neg y + 0 \equiv y)$
$\to (y + 0 \equiv y \to \neg \exists x \neg x + 0 \equiv x)$ トートロジー

φ_{10}: $(y + 0 \equiv y \to \neg \exists x \neg x + 0 \equiv x)$ $\frac{\varphi_8, \varphi_9}{\varphi_{10}}$ 三段論法

φ_{11}: $y + 0 \equiv y$ a_1

φ_{12}: $\neg \exists x \neg x + 0 \equiv x$ $\frac{\varphi_{11}, \varphi_{10}}{\varphi_{12}}$ 三段論法

φ_{13}: $0 + 0 \equiv 0$ $\frac{\varphi_{12}, \varphi_2}{\varphi_{13}}$ 三段論法

$\square$

- PA では，$S(0)$, $S(S(0))$, $S(S(S(0)))$ を，数表記 1, 2, 3,... のことと考えられるのだった．

演習問題． $\mathrm{PA} \vdash \neg 0 \equiv S(0)$ となることを示せ．

K^* での証明の例 (2/2)

φ_9: $(\exists x \neg x + 0 \equiv x \to \neg y + 0 \equiv y)$
$\to (y + 0 \equiv y \to \neg \exists x \neg x + 0 \equiv x)$ トートロジー

φ_{10}: $(y + 0 \equiv y \to \neg \exists x \neg x + 0 \equiv x)$ $\frac{\varphi_8, \varphi_9}{\varphi_{10}}$ 三段論法

φ_{11}: $y + 0 \equiv y$ a_1

φ_{12}: $\neg \exists x \neg x + 0 \equiv x$ $\frac{\varphi_{11}, \varphi_{10}}{\varphi_{12}}$ 三段論法

φ_{13}: $0 + 0 \equiv 0$ $\frac{\varphi_{12}, \varphi_2}{\varphi_{13}}$ 三段論法

□

- PA では, $S(0)$, $S(S(0))$, $S(S(S(0)))$ を, 数表記 1, 2, 3,... のことと考えられるのだった.

演習問題. $\mathrm{PA} \vdash \neg 0 \equiv S(0)$ となることを示せ.

K^* での証明の例 (2/2)

φ_9:	$(\exists x \neg x + 0 \equiv x \to \neg y + 0 \equiv y)$ $\to (y + 0 \equiv y \to \neg\exists x \neg x + 0 \equiv x)$	トートロジー
φ_{10}:	$(y + 0 \equiv y \to \neg\exists x \neg x + 0 \equiv x)$	$\dfrac{\varphi_8, \varphi_9}{\varphi_{10}}$ 三段論法
φ_{11}:	$y + 0 \equiv y$	a_1
φ_{12}:	$\neg\exists x \neg x + 0 \equiv x$	$\dfrac{\varphi_{11}, \varphi_{10}}{\varphi_{12}}$ 三段論法
φ_{13}:	$0 + 0 \equiv 0$	$\dfrac{\varphi_{12}, \varphi_2}{\varphi_{13}}$ 三段論法

$\square$

- PA では，$S(0)$, $S(S(0))$, $S(S(S(0)))$ を，数表記 1, 2, 3,... のことと考えられるのだった．

演習問題． PA $\vdash \neg 0 \equiv S(0)$ となることを示せ．

K^* での証明の例 (2/2)

φ_9: $(\exists x \neg x + 0 \equiv x \to \neg y + 0 \equiv y)$
$\to (y + 0 \equiv y \to \neg \exists x \neg x + 0 \equiv x)$ トートロジー

φ_{10}: $(y + 0 \equiv y \to \neg \exists x \neg x + 0 \equiv x)$ $\frac{\varphi_8, \varphi_9}{\varphi_{10}}$ 三段論法

φ_{11}: $y + 0 \equiv y$ a_1

φ_{12}: $\neg \exists x \neg x + 0 \equiv x$ $\frac{\varphi_{11}, \varphi_{10}}{\varphi_{12}}$ 三段論法

φ_{13}: $0 + 0 \equiv 0$ $\frac{\varphi_{12}, \varphi_2}{\varphi_{13}}$ 三段論法

$\square$

- PA では，$S(0)$, $S(S(0))$, $S(S(S(0)))$ を，数表記 1, 2, 3,... のことと考えられるのだった.

演習問題. $\mathrm{PA} \vdash \neg 0 \equiv S(0)$ となることを示せ.

理論の無矛盾性 (1/3)

- L をある言語とするとき，L-論理式 φ が **L-文** であるとは φ にあらわれるすべての変数 x が，$\exists x(\cdots)$ という形の部分表現に含まれていることである．
- L-文の集まり T を **L-理論** とよぶことにする．
  - たとえば PA は L_{PA}-理論である．

定理 1. T を L-理論とするとき，次は同値である:
(a) $T \vdash \neg x \equiv x$;
(b) すべての L-論理式 φ に対し，$T \vdash \varphi$ が成り立つ．

理論の無矛盾性 (1/3)

- L をある言語とするとき，L-論理式 φ が **L-文** であるとは φ にあらわれるすべての変数 x が，$\exists x(\cdots)$ という形の部分表現に含まれていることである．
- L-文の集まり T を **L-理論** とよぶことにする．
  - たとえば PA は L_{PA}-理論である．

定理 1. T を L-理論とするとき，次は同値である:
(a) $T \vdash \neg x \equiv x$;
(b) すべての L-論理式 φ に対し，$T \vdash \varphi$ が成り立つ．

理論の無矛盾性 (1/3)

- L をある言語とするとき，L-論理式 φ が **L-文** であるとは φ にあらわれるすべての変数 x が，$\exists x(\cdots)$ という形の部分表現に含まれていることである．
- L-文の集まり T を **L-理論** とよぶことにする．
- たとえば PA は L_{PA}-理論である．

定理 1. T を L-理論とするとき，次は同値である:
(a) $T \vdash \neg x \equiv x$;
(b) すべての L-論理式 φ に対し，$T \vdash \varphi$ が成り立つ．

理論の無矛盾性 (1/3)

- L をある言語とするとき, L-論理式 φ が **L-文** であるとは φ にあらわれるすべての変数 x が, $\exists x(\cdots)$ という形の部分表現に含まれていることである.
- L-文の集まり T を **L-理論** とよぶことにする.
  - たとえば PA は L_{PA}-理論である.

定理 1. T を L-理論とするとき, 次は同値である:
(a) $T \vdash \neg x \equiv x$;
(b) すべての L-論理式 φ に対し, $T \vdash \varphi$ が成り立つ.

理論の無矛盾性 (1/3)

- L をある言語とするとき，L-論理式 φ が **L-文** であるとは φ にあらわれるすべての変数 x が，$\exists x(\cdots)$ という形の部分表現に含まれていることである．
- L-文の集まり T を **L-理論** とよぶことにする．
  - たとえば PA は L_{PA}-理論である．

定理 1. T を L-理論とするとき，次は同値である:
(a) $T \vdash \neg x \equiv x$;
(b) すべての L-論理式 φ に対し，$T \vdash \varphi$ が成り立つ．

理論の無矛盾性 (2/3)

定理 1. T を L-理論とするとき，次は同値である:
(a) $T \vdash \neg x \equiv x$;
(b) すべての L-論理式 φ に対し，$T \vdash \varphi$ が成り立つ.

証明. (b) $\Rightarrow$ (a) は明らかである.

(a) $\Rightarrow$ (b): (a) を仮定して，P を $\neg x \equiv x$ の T からの証明とする.

φ を任意の L-論理式とするとき，P に次の $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ と φ をつなげた列は φ の T からの証明になる:

φ_1:	$x \equiv x \to \neg x \equiv x \to \varphi$	トートロジー
φ_2:	$x \equiv x$	等式の公理 (a)
φ_3:	$\neg x \equiv x \to \varphi$	$\frac{\varphi_2, \varphi_1}{\varphi_3}$ 三段論法
	φ	$\frac{\neg x \equiv x, \varphi_3}{\varphi}$ 三段論法

□

理論の無矛盾性 (2/3)

定理 1. T を L-理論とするとき，次は同値である:
(a) $T \vdash \neg x \equiv x$;
(b) すべての L-論理式 φ に対し，$T \vdash \varphi$ が成り立つ.

証明. (b) $\Rightarrow$ (a) は明らかである.

(a) $\Rightarrow$ (b): (a) を仮定して，P を $\neg x \equiv x$ の T からの証明とする.

φ を任意の L-論理式とするとき，P に次の $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ と φ をつなげた列は φ の T からの証明になる:

φ_1:	$x \equiv x \to \neg x \equiv x \to \varphi$	トートロジー
φ_2:	$x \equiv x$	等式の公理 (a)
φ_3:	$\neg x \equiv x \to \varphi$	$\frac{\varphi_2, \varphi_1}{\varphi_3}$ 三段論法
	φ	$\frac{\neg x \equiv x, \varphi_3}{\varphi}$ 三段論法

$\square$

理論の無矛盾性 (2/3)

定理 1. T を L-理論とするとき，次は同値である:
(a) $T \vdash \neg x \equiv x$;
(b) すべての L-論理式 φ に対し，$T \vdash \varphi$ が成り立つ.

証明. (b) $\Rightarrow$ (a) は明らかである.

(a) $\Rightarrow$ (b): (a) を仮定して，P を $\neg x \equiv x$ の T からの証明とする.

φ を任意の L-論理式とするとき，P に次の $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ と φ をつなげた列は φ の T からの証明になる:

φ_1:	$x \equiv x \to \neg x \equiv x \to \varphi$	トートロジー
φ_2:	$x \equiv x$	等式の公理 (a)
φ_3:	$\neg x \equiv x \to \varphi$	$\dfrac{\varphi_2, \varphi_1}{\varphi_3}$ 三段論法
	φ	$\dfrac{\neg x \equiv x, \varphi_3}{\varphi}$ 三段論法

$\square$

理論の無矛盾性 (2/3)

定理 1. T を L-理論とするとき，次は同値である:
(a) $T \vdash \neg x \equiv x$;
(b) すべての L-論理式 φ に対し，$T \vdash \varphi$ が成り立つ.

証明. (b) $\Rightarrow$ (a) は明らかである.

(a) $\Rightarrow$ (b): (a) を仮定して，P を $\neg x \equiv x$ の T からの証明とする.

φ を任意の L-論理式とするとき，P に次の $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ と φ をつなげた列は φ の T からの証明になる:

φ_1:	$x \equiv x \to \neg x \equiv x \to \varphi$	トートロジー
φ_2:	$x \equiv x$	等式の公理 (a)
φ_3:	$\neg x \equiv x \to \varphi$	$\frac{\varphi_2, \varphi_1}{\varphi_3}$ 三段論法
	φ	$\frac{\neg x \equiv x, \varphi_3}{\varphi}$ 三段論法

$\square$

理論の無矛盾性 (2/3)

定理 1. T を L-理論とするとき，次は同値である:
(a) $T \vdash \neg x \equiv x$;
(b) すべての L-論理式 φ に対し，$T \vdash \varphi$ が成り立つ．

証明． (b) ⇒ (a) は明らかである．

(a) ⇒ (b): (a) を仮定して，P を $\neg x \equiv x$ の T からの証明とする．

φ を任意の L-論理式とするとき，P に次の $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ と φ をつなげた列は φ の T からの証明になる:

φ_1:	$x \equiv x \to \neg x \equiv x \to \varphi$	トートロジー
φ_2:	$x \equiv x$	等式の公理 (a)
φ_3:	$\neg x \equiv x \to \varphi$	$\dfrac{\varphi_2, \varphi_1}{\varphi_3}$ 三段論法
	φ	$\dfrac{\neg x \equiv x, \varphi_3}{\varphi}$ 三段論法

□

理論の無矛盾性 (2/3)

定理 1. T を L-理論とするとき，次は同値である:
(a) $T \vdash \neg x \equiv x$;
(b) すべての L-論理式 φ に対し，$T \vdash \varphi$ が成り立つ.

証明. (b) $\Rightarrow$ (a) は明らかである.

(a) $\Rightarrow$ (b): (a) を仮定して，P を $\neg x \equiv x$ の T からの証明とする.

φ を任意の L-論理式とするとき，P に次の $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ と φ をつなげた列は φ の T からの証明になる:

φ_1:	$x \equiv x \to \neg x \equiv x \to \varphi$	トートロジー
φ_2:	$x \equiv x$	等式の公理 (a)
φ_3:	$\neg x \equiv x \to \varphi$	$\frac{\varphi_2, \varphi_1}{\varphi_3}$ 三段論法
	φ	$\frac{\neg x \equiv x, \varphi_3}{\varphi}$ 三段論法

□

理論の無矛盾性 (2/3)

定理 1. T を L-理論とするとき，次は同値である:
(a) $T \vdash \neg x \equiv x$;
(b) すべての L-論理式 φ に対し，$T \vdash \varphi$ が成り立つ.

証明. (b) $\Rightarrow$ (a) は明らかである.

(a) $\Rightarrow$ (b): (a) を仮定して，P を $\neg x \equiv x$ の T からの証明とする.

φ を任意の L-論理式とするとき，P に次の $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ と φ をつなげた列は φ の T からの証明になる:

φ_1:	$x \equiv x \to \neg x \equiv x \to \varphi$	トートロジー
φ_2:	$x \equiv x$	等式の公理 (a)
φ_3:	$\neg x \equiv x \to \varphi$	$\frac{\varphi_2, \varphi_1}{\varphi_3}$ 三段論法
	φ	$\frac{\neg x \equiv x, \varphi_3}{\varphi}$ 三段論法

$\square$

理論の無矛盾性 (2/3)

定理 1. T を L-理論とするとき，次は同値である:
(a) $T \vdash \neg x \equiv x$;
(b) すべての L-論理式 φ に対し，$T \vdash \varphi$ が成り立つ.

証明. (b) $\Rightarrow$ (a) は明らかである.

(a) $\Rightarrow$ (b): (a) を仮定して，P を $\neg x \equiv x$ の T からの証明とする.

φ を任意の L-論理式とするとき，P に次の $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ と φ をつなげた列は φ の T からの証明になる:

φ_1: $x \equiv x \to \neg x \equiv x \to \varphi$ トートロジー

φ_2: $x \equiv x$ 等式の公理 (a)

φ_3: $\neg x \equiv x \to \varphi$ $\dfrac{\varphi_2, \varphi_1}{\varphi_3}$ 三段論法

φ $\dfrac{\neg x \equiv x, \varphi_3}{\varphi}$ 三段論法

$\square$

理論の無矛盾性 (2/3)

定理 1. T を L-理論とするとき，次は同値である:
(a) $T \vdash \neg x \equiv x$;
(b) すべての L-論理式 φ に対し，$T \vdash \varphi$ が成り立つ.

証明. (b) ⇒ (a) は明らかである.

(a) ⇒ (b): (a) を仮定して，P を $\neg x \equiv x$ の T からの証明とする.

φ を任意の L-論理式とするとき，P に次の $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ と φ をつなげた列は φ の T からの証明になる:

φ_1:	$x \equiv x \to \neg x \equiv x \to \varphi$	トートロジー
φ_2:	$x \equiv x$	等式の公理 (a)
φ_3:	$\neg x \equiv x \to \varphi$	$\frac{\varphi_2, \varphi_1}{\varphi_3}$ 三段論法
	φ	$\frac{\neg x \equiv x, \varphi_3}{\varphi}$ 三段論法

□

理論の無矛盾性 (3/3)

- 同様の証明で，上の (a), (b) は次とも同値になることが示せる:

  (c) ある L-論理式 φ に対し $T \vdash \varphi$ かつ $T \vdash \neg\varphi$.

- L-理論 T が (a) (または/かつ (b), (c)) を満たすとき，T は **矛盾する** という．そうでないとき，T は **無矛盾である**，という．

- T を無矛盾な L-理論とするとき，T が **完全** であるとは，すべての L-文 φ に対し，$T \vdash \varphi$ か $T \vdash \neg\varphi$ のどちらか片方が必ず成り立つこととする．

理論の無矛盾性 (3/3)

- 同様の証明で，上の (a), (b) は次とも同値になることが示せる:

  (c) ある L-論理式 φ に対し $T \vdash \varphi$ かつ $T \vdash \neg\varphi$.

- L-理論 T が (a) (または/かつ (b), (c)) を満たすとき，T は **矛盾する** という．そうでないとき，T は **無矛盾である**，という．

- T を無矛盾な L-理論とするとき，T が **完全** であるとは，すべての L-文 φ に対し，$T \vdash \varphi$ か $T \vdash \neg\varphi$ のどちらか片方が必ず成り立つこととする．

理論の無矛盾性 (3/3)

- 同様の証明で，上の (a), (b) は次とも同値になることが示せる:

(c) ある L-論理式 φ に対し $T \vdash \varphi$ かつ $T \vdash \neg\varphi$.

- L-理論 T が (a) (または/かつ (b), (c)) を満たすとき，T は **矛盾する** という．そうでないとき，T は **無矛盾である**，という．
- T を無矛盾な L-理論とするとき，T が **完全** であるとは，すべての L-文 φ に対し，$T \vdash \varphi$ か $T \vdash \neg\varphi$ のどちらか片方が必ず成り立つこととする．

理論の無矛盾性 (3/3)

- 同様の証明で，上の (a), (b) は次とも同値になることが示せる:

  (c) ある L-論理式 φ に対し $T \vdash \varphi$ かつ $T \vdash \neg\varphi$.

- L-理論 T が (a) (または/かつ (b), (c)) を満たすとき，T は **矛盾する** という．そうでないとき，T は **無矛盾である**，という．

- T を無矛盾な L-理論とするとき，T が **完全** であるとは，すべての L-文 φ に対し，$T \vdash \varphi$ か $T \vdash \neg\varphi$ のどちらか片方が必ず成り立つこととする．

理論の無矛盾性 (3/3)

- 同様の証明で，上の (a), (b) は次とも同値になることが示せる:

  (c) ある L-論理式 φ に対し $T \vdash \varphi$ かつ $T \vdash \neg\varphi$.

- L-理論 T が (a) (または/かつ (b), (c)) を満たすとき，T は **矛盾する** という．そうでないとき，T は **無矛盾である**，という．

- T を無矛盾な L-理論とするとき，T が **完全** であるとは，すべての L-文 φ に対し，$T \vdash \varphi$ か $T \vdash \neg\varphi$ のどちらか片方が必ず成り立つこととする．

第１不完全性定理

- 以上で第１不完全性定理を厳密に述べることが可能になった:

定理 2 (第１不完全性定理，ゲーデル 1931(昭和 6)，ロッサー 1936(昭和 11)).

PA を含み，矛盾しない，(具体的に与えられた) どんな理論 T も完全でない.

- 第１不完全性定理から，特に PA 自身も完全でないことがわかる.

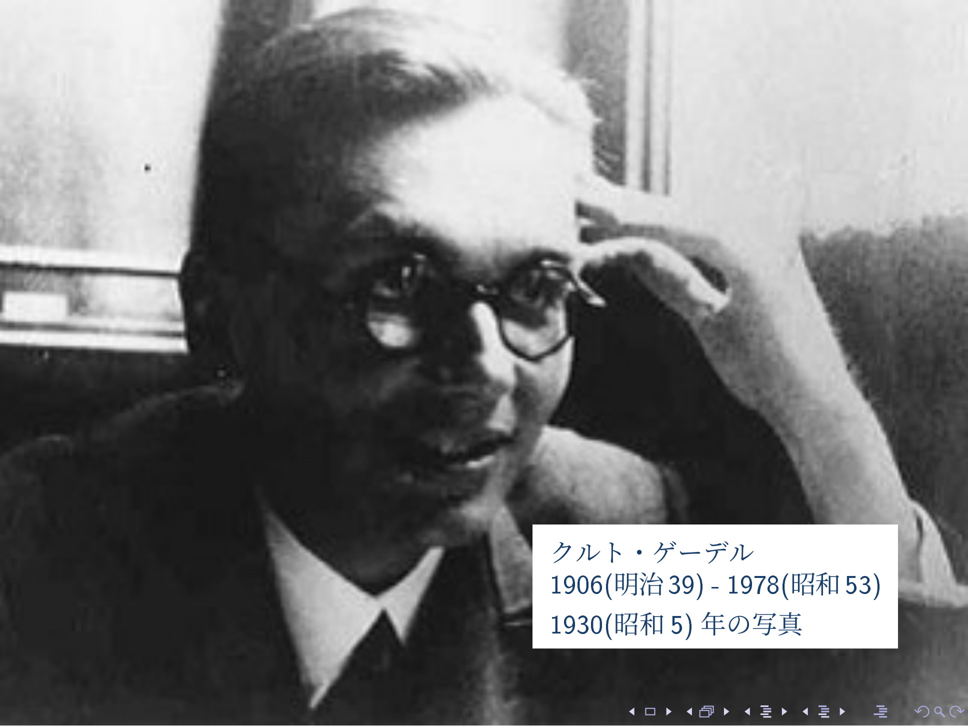
第１不完全性定理

- 以上で第１不完全性定理を厳密に述べることが可能になった:

定理 2 (第１不完全性定理，ゲーデル 1931(昭和 6)，ロッサー 1936(昭和 11)).

PA を含み，矛盾しない，(具体的に与えられた) どんな理論 T も完全でない.

- 第１不完全性定理から，特に PA 自身も完全でないことがわかる.



クルト・ゲーデル
1906(明治 39) - 1978(昭和 53)
1930(昭和 5) 年の写真