

数理の世界 (数学の考え方)

— ゲーデルの不完全性定理

形式的証明, 体系の無矛盾性と完全性, (第 IX 回の講義)

Sakaé Fuchino (渚野 昌)

Dept. of Computer Sciences

Kobe University

(神戸大学大学院 システム情報学研究科)

<http://kurt.scitec.kobe-u.ac.jp/~fuchino/>

(9. Dezember 2012 (08:24 JST) version)

神戸大学 2012 年後期の講義

於 K302 教室, 月曜 8:50 – 10:20

December 03, 2012

This presentation is typeset by p^LA_TE_X with beamer class.

言語 L に対する体系 K^* の論理公理

- トートロジーから得られた恒真な L -論理式,
- (等号の公理)
 - (a) $x \equiv x$; (b) $x \equiv y \rightarrow y \equiv x$; (c) $x \equiv y \rightarrow y \equiv z \rightarrow x \equiv z$;
 - (d) $x_1 \equiv y_1 \rightarrow \cdots \rightarrow x_m \equiv y_m \rightarrow f(x_1, \dots, x_m) \equiv f(y_1, \dots, y_m)$
 - (e) $x_1 \equiv y_1 \rightarrow \cdots \rightarrow x_n \equiv y_n \rightarrow r(x_1, \dots, x_n) \rightarrow r(y_1, \dots, y_n)$
- (代入公理) φ を L -論理式として, x 変数記号, t を L -項とすると, $\varphi(t/x) \rightarrow \exists x \varphi$ の形の論理式で, 変数の「からまり」のないもの

言語 L に対する体系 K^* の推論規則

(三段論法)
$$\frac{\varphi, \varphi \rightarrow \psi}{\psi}$$

(存在推論)
$$\frac{\varphi \rightarrow \psi}{\exists x \varphi \rightarrow \psi}$$
 ただし, x は ψ には自由変数としては現れないものとする.

L -論理式の集合 Γ と L -論理式 φ に対し, L -論理式の列 $P = \langle \varphi_1, \dots, \varphi_n \rangle$ が φ の Γ からの K^* での **証明** である, とは次の (α) と (β) が成り立つこととする:

(α) $\varphi_n = \varphi$;

(β) すべての $1 \leq i \leq n$ に対し, 次が成り立つ:

(a) $\varphi_i \in \Gamma$ であるか, または,

(b) φ_i は K^* の論理公理であるか, または,

(c) $1 \leq j, k < i$ が存在して, $\frac{\varphi_j, \varphi_k}{\varphi_i}$ が三段論法になっているか, または,

(d) $1 \leq j < i$ が存在して, $\frac{\varphi_j}{\varphi_i}$ が存在推論になっているかのいずれかである.

▶ Γ からの φ の証明が存在するとき, これを $\Gamma \vdash \varphi$ とあらわす. P が φ の Γ からの証明のとき, これを $\Gamma \vdash^P \varphi$ とあらわす.

▶ 以下の $\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_{13}$ を並べた, $P = \langle \varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_{13} \rangle$ は,
 $0 + 0 \equiv 0$ の PA からの証明になっている.

φ_0 : $(\neg 0 + 0 \equiv 0 \rightarrow \exists x \neg x + 0 \equiv x)$ 代入公理

φ_1 : $(\neg 0 + 0 \equiv 0 \rightarrow \exists x \neg x + 0 \equiv x)$
 $\rightarrow (\neg \exists x \neg x + 0 \equiv x \rightarrow 0 + 0 \equiv 0)$ トートロジー

φ_2 : $(\neg \exists x \neg x + 0 \equiv x \rightarrow 0 + 0 \equiv 0)$ $\frac{\varphi_0, \varphi_1}{\varphi_2}$ 三段論法

φ_3 : $x + 0 \equiv x \rightarrow y + 0 \equiv y \rightarrow x + 0 \equiv x$ トートロジー

φ_4 : $x + 0 \equiv x$ a_1

φ_5 : $(y + 0 \equiv y \rightarrow x + 0 \equiv x)$ $\frac{\varphi_4, \varphi_3}{\varphi_5}$ 三段論法

φ_6 : $(y + 0 \equiv y \rightarrow x + 0 \equiv x)$
 $\rightarrow (\neg x + 0 \equiv x \rightarrow \neg y + 0 \equiv y)$ トートロジー

φ_7 : $(\neg x + 0 \equiv x \rightarrow \neg y + 0 \equiv y)$ $\frac{\varphi_5, \varphi_6}{\varphi_7}$ 三段論法

φ_8 : $(\exists x \neg x + 0 \equiv x \rightarrow \neg y + 0 \equiv y)$ $\frac{\varphi_7}{\varphi_8}$ 存在推論

$$\varphi_9: (\exists x \neg x + 0 \equiv x \rightarrow \neg y + 0 \equiv y) \\ \rightarrow (y + 0 \equiv y \rightarrow \neg \exists x \neg x + 0 \equiv x)$$

$$\varphi_{10}: (y + 0 \equiv y \rightarrow \neg \exists x \neg x + 0 \equiv x)$$

$$\varphi_{11}: y + 0 \equiv y$$

$$\varphi_{12}: \neg \exists x \neg x + 0 \equiv x$$

$$\varphi_{13}: 0 + 0 \equiv 0$$

トートロジー

 $\frac{\varphi_8, \varphi_9}{\varphi_{10}}$ 三段論法 a_1 $\frac{\varphi_{11}, \varphi_{10}}{\varphi_{12}}$ 三段論法 $\frac{\varphi_{12}, \varphi_2}{\varphi_{13}}$ 三段論法

□

▶ PA では, $S(0)$, $S(S(0))$, $S(S(S(0)))$ を, 数表記 $1, 2, 3, \dots$ のことと考えられるのだった.

演習問題 . $PA \vdash \neg 0 \equiv S(0)$ となることを示せ .

- ▶ L をある言語とするとき, L -論理式 φ が L -文 であるとは φ にあられるすべての変数 x が, $\exists x(\dots)$ という形の部分表現に含まれていることである.
- ▶ L -文の集まり T を L -理論 とよぶことにする.
- ▷ たとえば PA は L_{PA} -理論である.

定理 1. T を L -理論とするとき, 次は同値である:

- (a) $T \vdash \neg x \equiv x$;
- (b) すべての L -論理式 φ に対し, $T \vdash \varphi$ が成り立つ.

定理 1. T を L -理論とするとき, 次は同値である:

- (a) $T \vdash \neg x \equiv x$;
 (b) すべての L -論理式 φ に対し, $T \vdash \varphi$ が成り立つ.

証明. (b) \Rightarrow (a) は明らかである.

(a) \Rightarrow (b): (a) を仮定して, P を $\neg x \equiv x$ の T からの証明とする.

φ を任意の L -論理式とするとき, P に次の $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ と φ をつなげた列は φ の T からの証明になる:

$$\varphi_1: x \equiv x \rightarrow \neg x \equiv x \rightarrow \varphi$$

$$\varphi_2: x \equiv x$$

$$\varphi_3: \neg x \equiv x \rightarrow \varphi$$

$$\varphi$$

トートロジー

等式の公理 (a)

$$\frac{\varphi_2, \varphi_1}{\varphi_3} \text{ 三段論法}$$

$$\frac{\neg x \equiv x, \varphi_3}{\varphi} \text{ 三段論法}$$

□

- ▶ 同様の証明で，上の (a), (b) は次とも同値になることが示せる：

(c) ある L -論理式 φ に対し $T \vdash \varphi$ かつ $T \vdash \neg\varphi$.

- ▶ L -理論 T が (a) (または/かつ (b), (c)) を満たすとき， T は **矛盾する** という．そうでないとき， T は **無矛盾である**，という．
- ▶ T を無矛盾な L -理論とするととき， T が **完全** であるとは，すべての L -文 φ に対し， $T \vdash \varphi$ か $T \vdash \neg\varphi$ のどちらか片方が必ず成り立つこととする．

- ▶ 以上で第 1 不完全性定理を厳密に述べる事が可能になった:

定理 2 (第 1 不完全性定理, ゲーデル 1931(昭和 6), ロッサー 1936(昭和 11)).

PA を含み, 矛盾しない, (具体的に与えられた) どんな理論 T も完全でない.

- ▶ 第 1 不完全性定理から, 特に PA 自身も完全でないことがわかる.

