数理の世界 (数学の考え方) — ゲーデルの不完全性定理

第1不完全性定理とその波紋，(第 X 回の講義)

Sakaé Fuchino (渕野 昌)

Dept. of Computer Sciences
Kobe University
(神戸大学大学院 システム情報学研究科)

http://kurt.scitec.kobe-u.ac.jp/~fuchino/

(11. Dezember 2012 (08:33 JST) version)

神戸大学 2012 年後期の講義
於 K302 教室，月曜 8:50 – 10:20

December 10, 2012

This presentation is typeset by pLATEX with beamer class.

第１不完全性定理 (1/2)

定理（第１不完全性定理，ゲーデル 1931(昭和 6)，ロッサー 1936(昭和 11)).

PA を含み，矛盾しない，(具体的に与えられた) どんな理論 T も完全でない.

- 理論 T が**矛盾しない** (あるいは **無矛盾** である) とは，$T \nvdash x \neq x$ となることである.
- 理論 T が**完全でない**とは，T の言語での文 φ で $T \nvdash \varphi$ かつ $T \nvdash \neg\varphi$ となるものが存在することである.
  つまり T はこの φ の “真偽” を決定できない.
  - “$T \nvdash \varphi$” は $T \vdash \varphi$ でない，つまり，T からの φ の証明が存在しないことをあらわす.
- 「PA を含み」という条件は本質的である．PA を含まない理論で，完全であることが知られているものは存在する.
  たとえば，**初等平面幾何は完全な公理系を持つ**.

第１不完全性定理 (1/2)

定理（第１不完全性定理，ゲーデル 1931(昭和 6)，ロッサー 1936(昭和 11)).

PA を含み，矛盾しない，(具体的に与えられた) どんな理論 T も完全でない．

- 理論 T が**矛盾しない** (あるいは **無矛盾** である) とは， $T \nvdash x \neq x$ となることである．
- 理論 T が**完全でない**とは， T の言語での文 φ で $T \nvdash \varphi$ かつ $T \nvdash \neg\varphi$ となるものが存在することである．
  つまり T はこの φ の "真偽" を決定できない．
  - "$T \nvdash \varphi$" は $T \vdash \varphi$ でない，つまり， T からの φ の証明が存在しないことをあらわす．
- 「PA を含み」という条件は本質的である．PA を含まない理論で，完全であることが知られているものは存在する．
  たとえば，**初等平面幾何は完全な公理系を持つ**．

第１不完全性定理 (1/2)

定理（第１不完全性定理，ゲーデル 1931(昭和 6)，ロッサー 1936(昭和 11)).

PA を含み，矛盾しない，(具体的に与えられた) どんな理論 T も完全でない．

- 理論 T が**矛盾しない** (あるいは **無矛盾** である) とは， $T \nvdash x \neq x$ となることである．
- 理論 T が**完全でない**とは， T の言語での文 φ で $T \nvdash \varphi$ かつ $T \nvdash \neg\varphi$ となるものが存在することである．
  つまり T はこの φ の “真偽” を決定できない．
  - “$T \nvdash \varphi$” は $T \vdash \varphi$ でない，つまり， T からの φ の証明が存在しないことをあらわす．
- 「PA を含み」という条件は本質的である．PA を含まない理論で，完全であることが知られているものは存在する．
  たとえば，**初等平面幾何は完全な公理系を持つ**．

第１不完全性定理 (1/2)

定理（第１不完全性定理，ゲーデル 1931(昭和 6)，ロッサー 1936(昭和 11)).

PA を含み，矛盾しない，(具体的に与えられた) どんな理論 T も完全でない．

- 理論 T が**矛盾しない** (あるいは **無矛盾** である) とは，$T \nvdash x \neq x$ となることである．
- 理論 T が**完全でない**とは，T の言語での文 φ で $T \nvdash \varphi$ かつ $T \nvdash \neg\varphi$ となるものが存在することである．
  つまり T はこの φ の “真偽” を決定できない．
  - “$T \nvdash \varphi$” は $T \vdash \varphi$ でない，つまり，T からの φ の証明が存在しないことをあらわす．
- 「PA を含み」という条件は本質的である．PA を含まない理論で，完全であることが知られているものは存在する．
  たとえば，**初等平面幾何は完全な公理系を持つ**．

第１不完全性定理 (1/2)

定理（第１不完全性定理，ゲーデル 1931(昭和 6)，ロッサー 1936(昭和 11)).

PA を含み，矛盾しない，(具体的に与えられた) どんな理論 T も完全でない．

- 理論 T が**矛盾しない** (あるいは **無矛盾** である) とは，$T \nvdash x \neq x$ となることである．
- 理論 T が**完全でない**とは，T の言語での文 φ で $T \nvdash \varphi$ かつ $T \nvdash \neg\varphi$ となるものが存在することである．
  つまり T はこの φ の "真偽" を決定できない．
  - "$T \nvdash \varphi$" は $T \vdash \varphi$ でない，つまり，T からの φ の証明が存在しないことをあらわす．
- 「PA を含み」という条件は本質的である．PA を含まない理論で，完全であることが知られているものは存在する．
  たとえば，**初等平面幾何は完全な公理系を持つ**．

第１不完全性定理 (1/2)

定理（第１不完全性定理，ゲーデル 1931(昭和 6)，ロッサー 1936(昭和 11)).

PA を含み，矛盾しない，(具体的に与えられた) どんな理論 T も完全でない.

- 理論 T が**矛盾しない** (あるいは **無矛盾** である) とは，$T \nvdash x \neq x$ となることである.
- 理論 T が**完全でない**とは，T の言語での文 φ で $T \nvdash \varphi$ かつ $T \nvdash \neg\varphi$ となるものが存在することである.
  つまり T はこの φ の “真偽” を決定できない.
  - “$T \nvdash \varphi$” は $T \vdash \varphi$ でない，つまり，T からの φ の証明が存在しないことをあらわす.
- 「PA を含み」という条件は本質的である．PA を含まない理論で，完全であることが知られているものは存在する.
  たとえば，**初等平面幾何は完全な公理系を持つ**.

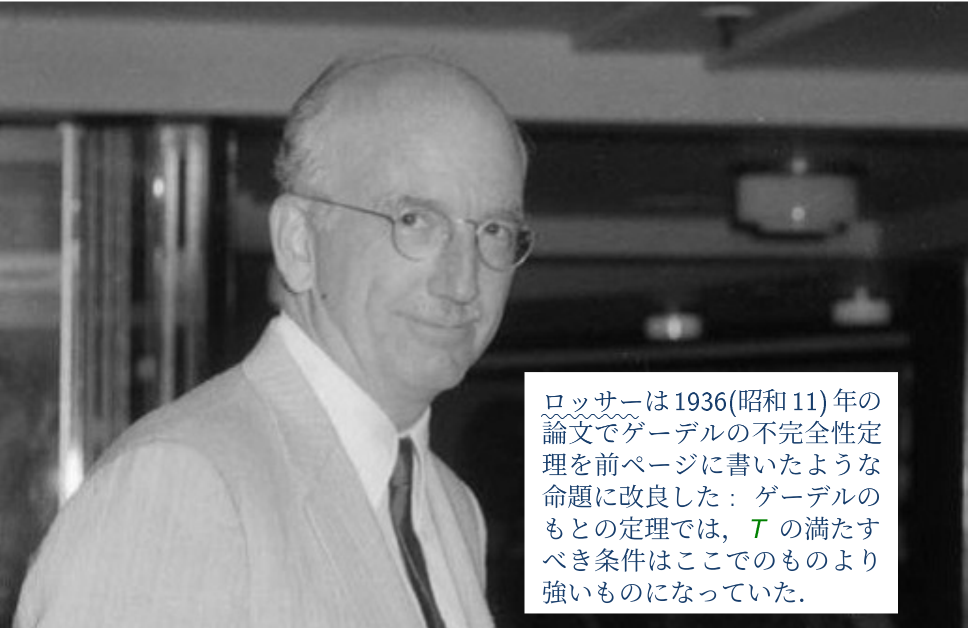
第１不完全性定理 (1/2)

定理（第１不完全性定理，ゲーデル 1931(昭和 6)，ロッサー 1936(昭和 11)).

PA を含み，矛盾しない，(具体的に与えられた) どんな理論 T も完全でない．

- 理論 T が**矛盾しない** (あるいは **無矛盾** である) とは，$T \nvdash x \neq x$ となることである．
- 理論 T が**完全でない**とは，T の言語での文 φ で $T \nvdash \varphi$ かつ $T \nvdash \neg\varphi$ となるものが存在することである．
  つまり T はこの φ の "真偽" を決定できない．
  - "$T \nvdash \varphi$" は $T \vdash \varphi$ でない，つまり，T からの φ の証明が存在しないことをあらわす．
- 「PA を含み」という条件は本質的である．PA を含まない理論で，完全であることが知られているものは存在する．
  たとえば，**初等平面幾何は完全な公理系を持つ**．

John Barkley Rosser (1907(明治 40) – 1989(平成 1))



ロッサーは1936(昭和 11) 年の論文でゲーデルの不完全性定理を前ページに書いたような命題に改良した： ゲーデルのもとの定理では, T の満たすべき条件はここでのものより強いものになっていた.

第１不完全性定理 (2/2)

定理（第１不完全性定理，ゲーデル 1931(昭和 6)，ロッサー 1936(昭和 11)).

PA を含み，矛盾しない，(具体的に与えられた) どんな理論 T も完全でない．

- 通常の数学は，すべて**選択公理つきのツェルメロ・フレンケル公理系** (ZFC) と呼ばれる集合論の体系の中で展開できる．

特に，ZFC では，PA での議論も行なうことができるので，第１不完全性定理を ZFC に適用することができる．

したがって，ZFC から (特に通常の数学から) 証明できないし，否定も証明できないような命題 φ が無限に存在する．

- 上のような φ は ZFC から **独立** であるという．
- 上の「無限に…」は，もし $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ が ZFC から独立で，$T = \mathrm{ZFC} \cup \{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$ が無矛盾なら，T に第１不完全性定理を適用すると T から独立な命題 φ が得られるが，φ は，当然 ZFC からも独立で，$\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ のどれとも異なるからである．

第１不完全性定理 (2/2)

定理 (第１不完全性定理，ゲーデル 1931(昭和 6)，ロッサー 1936(昭和 11)).

PA を含み，矛盾しない，(具体的に与えられた) どんな理論 T も完全でない．

- 通常の数学は，すべて**選択公理つきのツェルメロ・フレンケル公理系** (ZFC) と呼ばれる集合論の体系の中で展開できる．

特に，ZFC では，PA での議論も行なうことができるので，第１不完全性定理を ZFC に適用することができる．

したがって，ZFC から (特に通常の数学から) 証明できないし，否定も証明できないような命題 φ が無限に存在する．

- 上のような φ は ZFC から **独立** であるという．
- 上の「無限に…」は，もし $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ が ZFC から独立で，$T = \mathrm{ZFC} \cup \{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$ が無矛盾なら，T に第１不完全性定理を適用すると T から独立な命題 φ が得られるが，φ は，当然 ZFC からも独立で，$\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ のどれとも異なるからである．

第１不完全性定理 (2/2)

定理（第１不完全性定理，ゲーデル 1931(昭和 6)，ロッサー 1936(昭和 11)).

PA を含み，矛盾しない，(具体的に与えられた) どんな理論 T も完全でない．

- 通常の数学は，すべて**選択公理つきのツェルメロ・フレンケル公理系** (ZFC) と呼ばれる集合論の体系の中で展開できる．

特に，ZFC では，PA での議論も行なうことができるので，第１不完全性定理を ZFC に適用することができる．

したがって，ZFC から (特に通常の数学から) 証明できないし，否定も証明できないような命題 φ が無限に存在する．

- 上のような φ は ZFC から **独立** であるという．
- 上の「無限に…」は，もし $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ が ZFC から独立で，$T = \mathrm{ZFC} \cup \{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$ が無矛盾なら，T に第１不完全性定理を適用すると T から独立な命題 φ が得られるが，φ は，当然 ZFC からも独立で，$\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ のどれとも異なるからである．

第１不完全性定理 (2/2)

定理（第１不完全性定理，ゲーデル 1931(昭和 6)，ロッサー 1936(昭和 11)).

PA を含み，矛盾しない，(具体的に与えられた) どんな理論 T も完全でない．

- 通常の数学は，すべて**選択公理つきのツェルメロ・フレンケル公理系** (ZFC) と呼ばれる集合論の体系の中で展開できる．

特に，ZFC では，PA での議論も行なうことができるので，第１不完全性定理を ZFC に適用することができる．

したがって，ZFC から (特に通常の数学から) 証明できないし，否定も証明できないような命題 φ が無限に存在する．

- 上のような φ は ZFC から **独立** であるという．
- 上の「無限に…」は，もし $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ が ZFC から独立で，$T = \mathrm{ZFC} \cup \{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$ が無矛盾なら，T に第１不完全性定理を適用すると T から独立な命題 φ が得られるが，φ は，当然 ZFC からも独立で，$\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ のどれとも異なるからである．

第１不完全性定理 (2/2)

定理（第１不完全性定理，ゲーデル 1931(昭和 6)，ロッサー 1936(昭和 11)).

PA を含み，矛盾しない，(具体的に与えられた) どんな理論 T も完全でない．

- 通常の数学は，すべて**選択公理つきのツェルメロ・フレンケル公理系** (ZFC) と呼ばれる集合論の体系の中で展開できる．

特に，ZFC では，PA での議論も行なうことができるので，第１不完全性定理を ZFC に適用することができる．

したがって，ZFC から (特に通常の数学から) 証明できないし，否定も証明できないような命題 φ が無限に存在する．

- 上のような φ は ZFC から **独立** であるという．
- 上の「無限に…」は，もし $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ が ZFC から独立で，$T = \mathrm{ZFC} \cup \{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$ が無矛盾なら，T に第１不完全性定理を適用すると T から独立な命題 φ が得られるが，φ は，当然 ZFC からも独立で，$\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ のどれとも異なるからである．

第１不完全性定理 (2/2)

定理（第１不完全性定理，ゲーデル 1931(昭和 6)，ロッサー 1936(昭和 11)).

PA を含み，矛盾しない，(具体的に与えられた) どんな理論 T も完全でない．

- 通常の数学は，すべて**選択公理つきのツェルメロ・フレンケル公理系** (ZFC) と呼ばれる集合論の体系の中で展開できる．

特に，ZFC では，PA での議論も行なうことができるので，第１不完全性定理を ZFC に適用することができる．

したがって，ZFC から（特に通常の数学から）証明できないし，否定も証明できないような命題 φ が無限に存在する．

- 上のような φ は ZFC から **独立** であるという．
- 上の「無限に…」は，もし $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ が ZFC から独立で，$T = \mathrm{ZFC} \cup \{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$ が無矛盾なら，T に第１不完全性定理を適用すると T から独立な命題 φ が得られるが，φ は，当然 ZFC からも独立で，$\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ のどれとも異なるからである．

ZFC (1/4)

- 選択公理つきのツェルメロ・フレンケルの集合論 (ZFC) という名称の「ツェルメロ」と「フレンケル」は，この理論の確立で中心的な役割をはたした 2 人の数学者の名前である: この公理系はツェルメロが1908(明治 41) 年に提案した公理系をフレンケルが拡張して，フォン・ノイマンによる公理を加えて 1940 年代 (昭和 10〜20 年代) に現在の形のものになった.

ZFC (1/4)

- 選択公理つきのツェルメロ・フレンケルの集合論 (ZFC) という名称の「ツェルメロ」と「フレンケル」は，この理論の確立で中心的な役割をはたした 2 人の数学者の名前である: この公理系はツェルメロが1908(明治 41) 年に提案した公理系をフレンケルが拡張して，フォン・ノイマンによる公理を加えて 1940 年代 (昭和 10〜20 年代) に現在の形のものになった.

ZFC (1/4)

- 選択公理つきのツェルメロ・フレンケルの集合論 (ZFC) という名称の「ツェルメロ」と「フレンケル」は，この理論の確立で中心的な役割をはたした 2 人の数学者の名前である: この公理系はツェルメロが1908(明治 41) 年に提案した公理系をフレンケルが拡張して，フォン・ノイマンによる公理を加えて 1940 年代 (昭和 10〜20 年代) に現在の形のものになった.

ZFC (1/4)

- 選択公理つきのツェルメロ・フレンケルの集合論 (ZFC) という名称の「ツェルメロ」と「フレンケル」は, この理論の確立で中心的な役割をはたした 2 人の数学者の名前である: この公理系はツェルメロが1908(明治 41) 年に提案した公理系をフレンケルが拡張して, フォン・ノイマンによる公理を加えて 1940 年代 (昭和 10〜20 年代) に現在の形のものになった.

Ernst Zermelo
1953(昭和 28) 年

Abraham Fraenkel
1940 年代の写真

ZFC (2/4)

- ZFC は 2 変数の関係記号 ε のみからなる言語 L_{ZF} での次のような文からなる公理系である.
  - $x \varepsilon y$ の意図されている読み方は "集合 x は集合 y の要素である" である.
  - 集合論ではすべての対象は集合だと思っている (ただし集合という言葉は公理系にはあらわれない)

外延性公理: $\forall x \forall y (\forall z\,(z \varepsilon x \leftrightarrow z \varepsilon y) \rightarrow x \equiv y)$

空集合公理: $\exists z \forall t\, \neg t \varepsilon z$

対の公理: $\forall x \forall y \exists z \forall t\,(t \varepsilon z \leftrightarrow (t \equiv x \vee t \equiv y))$

和集の合公理: $\forall x \exists s \forall t\,(t \varepsilon s \leftrightarrow \exists y\,(y \varepsilon x \wedge t \varepsilon y))$

$$\vdots$$

ZFC (2/4)

- ZFC は 2 変数の関係記号 ε のみからなる言語 L_{ZF} での次のような文からなる公理系である.
  - $x \varepsilon y$ の意図されている読み方は "集合 x は集合 y の要素である" である.
  - 集合論ではすべての対象は集合だと思っている (ただし集合という言葉は公理系にはあらわれない)

外延性公理: $\forall x \forall y (\forall z (z \varepsilon x \leftrightarrow z \varepsilon y) \rightarrow x \equiv y)$

空集合公理: $\exists z \forall t \neg t \varepsilon z$

対の公理: $\forall x \forall y \exists z \forall t (t \varepsilon z \leftrightarrow (t \equiv x \vee t \equiv y))$

和集合公理: $\forall x \exists s \forall t (t \varepsilon s \leftrightarrow \exists y (y \varepsilon x \wedge t \varepsilon y))$

$$\vdots$$

ZFC (2/4)

- ZFC は 2 変数の関係記号 ε のみからなる言語 L_{ZF} での次のような文からなる公理系である.
  - $x \varepsilon y$ の意図されている読み方は "集合 x は集合 y の要素である" である.
  - 集合論ではすべての対象は集合だと思っている (ただし集合という言葉は公理系にはあらわれない)

外延性公理: $\forall x \forall y (\forall z (z \varepsilon x \leftrightarrow z \varepsilon y) \rightarrow x \equiv y)$

空集合公理: $\exists z \forall t \neg t \varepsilon z$

対の公理: $\forall x \forall y \exists z \forall t (t \varepsilon z \leftrightarrow (t \equiv x \vee t \equiv y))$

和集合公理: $\forall x \exists s \forall t (t \varepsilon s \leftrightarrow \exists y (y \varepsilon x \wedge t \varepsilon y))$

$$\vdots$$

ZFC (2/4)

- ZFC は 2 変数の関係記号 ε のみからなる言語 L_{ZF} での次のような文からなる公理系である.
  - $x \varepsilon y$ の意図されている読み方は "集合 x は集合 y の要素である" である.
  - 集合論ではすべての対象は集合だと思っている (ただし集合という言葉は公理系にはあらわれない)

外延性公理: $\forall x \forall y (\forall z (z \varepsilon x \leftrightarrow z \varepsilon y) \rightarrow x \equiv y)$

空集合公理: $\exists z \forall t \neg t \varepsilon z$

対の公理: $\forall x \forall y \exists z \forall t (t \varepsilon z \leftrightarrow (t \equiv x \vee t \equiv y))$

和集合の合公理: $\forall x \exists s \forall t (t \varepsilon s \leftrightarrow \exists y (y \varepsilon x \wedge t \varepsilon y))$

$\vdots$

ZFC (2/4)

- ZFC は 2 変数の関係記号 ε のみからなる言語 L_{ZF} での次のような文からなる公理系である.
  - $x \varepsilon y$ の意図されている読み方は "集合 x は集合 y の要素である" である.
  - 集合論ではすべての対象は集合だと思っている (ただし集合という言葉は公理系にはあらわれない)

外延性公理: $\forall x \forall y (\forall z (z \varepsilon x \leftrightarrow z \varepsilon y) \rightarrow x \equiv y)$

空集合公理: $\exists z \forall t \neg t \varepsilon z$

対の公理: $\forall x \forall y \exists z \forall t (t \varepsilon z \leftrightarrow (t \equiv x \vee t \equiv y))$

和集合の公理: $\forall x \exists s \forall t (t \varepsilon s \leftrightarrow \exists y (y \varepsilon x \wedge t \varepsilon y))$

$\vdots$

ZFC (2/4)

- ZFC は 2 変数の関係記号 ε のみからなる言語 L_{ZF} での次のような文からなる公理系である.
  - $x \varepsilon y$ の意図されている読み方は “集合 x は集合 y の要素である” である.
  - 集合論ではすべての対象は集合だと思っている (ただし集合という言葉は公理系にはあらわれない)

外延性公理: $\forall x \forall y (\forall z\, (z \varepsilon x \leftrightarrow z \varepsilon y) \rightarrow x \equiv y)$

空集合公理: $\exists z \forall t\, \neg t \varepsilon z$

対の公理: $\forall x \forall y \exists z \forall t\, (t \varepsilon z \leftrightarrow (t \equiv x \vee t \equiv y))$

和集合の合公理: $\forall x \exists s \forall t\, (t \varepsilon s \leftrightarrow \exists y\, (y \varepsilon x \wedge t \varepsilon y))$

$\vdots$

ZFC (2/4)

- ZFC は 2 変数の関係記号 ε のみからなる言語 L_{ZF} での次のような文からなる公理系である.
  - $x \varepsilon y$ の意図されている読み方は "集合 x は集合 y の要素である" である.
  - 集合論ではすべての対象は集合だと思っている (ただし集合という言葉は公理系にはあらわれない)

外延性公理: $\forall x \forall y (\forall z\, (z \varepsilon x \leftrightarrow z \varepsilon y) \rightarrow x \equiv y)$

空集合公理: $\exists z \forall t\, \neg t \varepsilon z$

対の公理: $\forall x \forall y \exists z \forall t\, (t \varepsilon z \leftrightarrow (t \equiv x \vee t \equiv y))$

和集の合公理: $\forall x \exists s \forall t\, (t \varepsilon s \leftrightarrow \exists y\, (y \varepsilon x \wedge t \varepsilon y))$

$$\vdots$$

ZFC (2/4)

- ZFC は 2 変数の関係記号 ε のみからなる言語 L_{ZF} での次のような文からなる公理系である.
- ▷ $x \varepsilon y$ の意図されている読み方は "集合 x は集合 y の要素である" である.
- ▷ 集合論ではすべての対象は集合だと思っている (ただし集合という言葉は公理系にはあらわれない)

外延性公理: $\forall x \forall y (\forall z (z \varepsilon x \leftrightarrow z \varepsilon y) \rightarrow x \equiv y)$

空集合公理: $\exists z \forall t \neg t \varepsilon z$

対の公理: $\forall x \forall y \exists z \forall t (t \varepsilon z \leftrightarrow (t \equiv x \vee t \equiv y))$

和集合の公理: $\forall x \exists s \forall t (t \varepsilon s \leftrightarrow \exists y (y \varepsilon x \wedge t \varepsilon y))$

$\vdots$

ZFC (2/4)

- ZFC は 2 変数の関係記号 ε のみからなる言語 L_{ZF} での次のような文からなる公理系である.
  - $x \varepsilon y$ の意図されている読み方は "集合 x は集合 y の要素である" である.
  - 集合論ではすべての対象は集合だと思っている (ただし集合という言葉は公理系にはあらわれない)

外延性公理: $\forall x \forall y (\forall z (z \varepsilon x \leftrightarrow z \varepsilon y) \rightarrow x \equiv y)$

空集合公理: $\exists z \forall t \neg t \varepsilon z$

対の公理: $\forall x \forall y \exists z \forall t (t \varepsilon z \leftrightarrow (t \equiv x \vee t \equiv y))$

和集合の合公理: $\forall x \exists s \forall t (t \varepsilon s \leftrightarrow \exists y (y \varepsilon x \wedge t \varepsilon y))$

$$\vdots$$

ZFC (3/4)

外延性公理: $\forall x \forall y (\forall z (z \varepsilon x \leftrightarrow z \varepsilon y) \rightarrow x \equiv y)$

空集合公理: $\exists z \forall t \neg t \varepsilon z$

対の公理: $\forall x \forall y \exists z \forall t (t \varepsilon z \leftrightarrow (t \equiv x \vee t \equiv y))$

和集の合公理: $\forall x \exists s \forall t (t \varepsilon s \leftrightarrow \exists y (y \varepsilon x \wedge t \varepsilon y))$

$\vdots$

無限公理: $\exists x (\exists y (y \varepsilon x \wedge y \equiv \emptyset)$
$\wedge \forall t (t \varepsilon x \rightarrow \exists u (\forall v (v \varepsilon u \leftrightarrow (v \varepsilon t \vee v \equiv t)) \wedge u \varepsilon x))$

(ただし, $y \equiv \emptyset$ は $\forall t \neg t \varepsilon y$ の略記である)

$\vdots$

各 L_{ZF}-論理式 $\varphi = \varphi(y, x_1, \ldots, x_n) = \varphi(y, \overline{x})$ に対し,

分出公理 $_\varphi$: $\forall x \forall x_1 \cdots \forall x_n \exists s \forall t (t \varepsilon s \leftrightarrow (t \varepsilon x \wedge \varphi(t, \overline{x})))$

$\vdots$

ZFC (3/4)

外延性公理: $\forall x \forall y (\forall z\, (z \,\varepsilon\, x \leftrightarrow z \,\varepsilon\, y) \;\rightarrow\; x \equiv y)$

空集合公理: $\exists z \forall t\, \neg t \,\varepsilon\, z$

対の公理: $\forall x \forall y \exists z \forall t\, (t \,\varepsilon\, z \;\leftrightarrow\; (t \equiv x \vee t \equiv y))$

和集の合公理: $\forall x \exists s \forall t\, (t \,\varepsilon\, s \;\leftrightarrow\; \exists y\, (y \,\varepsilon\, x \;\wedge\; t \,\varepsilon\, y))$

$$\vdots$$

無限公理: $\exists x\, (\; \exists y\, (y \,\varepsilon\, x \wedge y \equiv \emptyset)$
$\wedge\; \forall t\, (t \,\varepsilon\, x \rightarrow \exists u\, (\forall v\; (v \,\varepsilon\, u \leftrightarrow (v \,\varepsilon\, t \vee v \equiv t)) \wedge u \,\varepsilon\, x))$

(ただし， $y \equiv \emptyset$ は $\forall t\; \neg t \,\varepsilon\, y$ の略記である)

$$\vdots$$

各 L_{ZF}-論理式 $\varphi = \varphi(y, x_1, \ldots, x_n) = \varphi(y, \overline{x})$ に対し，

分出公理 $_\varphi$: $\forall x \forall x_1 \cdots \forall x_n \exists s \forall t\, (t \,\varepsilon\, s \;\leftrightarrow\; (t \,\varepsilon\, x \wedge \varphi(t, \overline{x})))$

$$\vdots$$

ZFC (3/4)

外延性公理: $\forall x \forall y (\forall z (z \varepsilon x \leftrightarrow z \varepsilon y) \rightarrow x \equiv y)$

空集合公理: $\exists z \forall t \neg t \varepsilon z$

対の公理: $\forall x \forall y \exists z \forall t (t \varepsilon z \leftrightarrow (t \equiv x \vee t \equiv y))$

和集の合公理: $\forall x \exists s \forall t (t \varepsilon s \leftrightarrow \exists y (y \varepsilon x \wedge t \varepsilon y))$

$\vdots$

無限公理: $\exists x (\exists y (y \varepsilon x \wedge y \equiv \emptyset)$
$\wedge \forall t (t \varepsilon x \rightarrow \exists u (\forall v (v \varepsilon u \leftrightarrow (v \varepsilon t \vee v \equiv t)) \wedge u \varepsilon x))$

(ただし, $y \equiv \emptyset$ は $\forall t \neg t \varepsilon y$ の略記である)

$\vdots$

各 L_{ZF}-論理式 $\varphi = \varphi(y, x_1, \ldots, x_n) = \varphi(y, \overline{x})$ に対し,

分出公理 $_\varphi$: $\forall x \forall x_1 \cdots \forall x_n \exists s \forall t (t \varepsilon s \leftrightarrow (t \varepsilon x \wedge \varphi(t, \overline{x})))$

$\vdots$

ZFC (3/4)

外延性公理: $\forall x \forall y (\forall z\,(z \,\varepsilon\, x \leftrightarrow z \,\varepsilon\, y) \;\rightarrow\; x \equiv y)$

空集合公理: $\exists z \forall t\, \neg t \,\varepsilon\, z$

対の公理: $\forall x \forall y \exists z \forall t\,(t \,\varepsilon\, z \;\leftrightarrow\; (t \equiv x \vee t \equiv y))$

和集の合公理: $\forall x \exists s \forall t\,(t \,\varepsilon\, s \;\leftrightarrow\; \exists y\,(y \,\varepsilon\, x \;\wedge\; t \,\varepsilon\, y))$

$\vdots$

無限公理: $\exists x\,(\;\exists y\,(y \,\varepsilon\, x \wedge y \equiv \emptyset)$
$\wedge\; \forall t\,(t \,\varepsilon\, x \rightarrow \exists u\;(\forall v\;(v \,\varepsilon\, u \leftrightarrow (v \,\varepsilon\, t \vee v \equiv t)) \wedge u \,\varepsilon\, x))$

(ただし, $y \equiv \emptyset$ は $\forall t\, \neg t \,\varepsilon\, y$ の略記である)

$\vdots$

各 L_{ZF}-論理式 $\varphi = \varphi(y, x_1, \ldots, x_n) = \varphi(y, \overline{x})$ に対し,

分出公理 $_\varphi$: $\forall x \forall x_1 \cdots \forall x_n \exists s \forall t\,(t \,\varepsilon\, s \;\leftrightarrow\; (t \,\varepsilon\, x \wedge \varphi(t, \overline{x})))$

$\vdots$

ZFC (3/4)

外延性公理: $\forall x \forall y (\forall z\, (z \,\varepsilon\, x \leftrightarrow z \,\varepsilon\, y) \;\rightarrow\; x \equiv y)$

空集合公理: $\exists z \forall t\, \neg t \,\varepsilon\, z$

対の公理: $\forall x \forall y \exists z \forall t\, (t \,\varepsilon\, z \;\leftrightarrow\; (t \equiv x \lor t \equiv y))$

和集合の合公理: $\forall x \exists s \forall t\, (t \,\varepsilon\, s \;\leftrightarrow\; \exists y\, (y \,\varepsilon\, x \;\land\; t \,\varepsilon\, y))$

$$\vdots$$

無限公理: $\exists x\, (\; \exists y\, (y \,\varepsilon\, x \land y \equiv \emptyset)$
$\land\; \forall t\, (t \,\varepsilon\, x \rightarrow \exists u\; (\forall v\; (v \,\varepsilon\, u \leftrightarrow (v \,\varepsilon\, t \lor v \equiv t)) \land u \,\varepsilon\, x))$

(ただし, $y \equiv \emptyset$ は $\forall t\; \neg t \,\varepsilon\, y$ の略記である)

$$\vdots$$

各 L_{ZF}-論理式 $\varphi = \varphi(y, x_1, \ldots, x_n) = \varphi(y, \overline{x})$ に対し,

分出公理 $_\varphi$: $\forall x \forall x_1 \cdots \forall x_n \exists s \forall t\, (t \,\varepsilon\, s \;\leftrightarrow\; (t \,\varepsilon\, x \land \varphi(t, \overline{x})))$

$$\vdots$$

ZFC (3/4)

外延性公理: $\forall x \forall y (\forall z\, (z \varepsilon x \leftrightarrow z \varepsilon y) \rightarrow x \equiv y)$

空集合公理: $\exists z \forall t\, \neg t \varepsilon z$

対の公理: $\forall x \forall y \exists z \forall t\, (t \varepsilon z \leftrightarrow (t \equiv x \vee t \equiv y))$

和集合の合公理: $\forall x \exists s \forall t\, (t \varepsilon s \leftrightarrow \exists y\, (y \varepsilon x \wedge t \varepsilon y))$

$$\vdots$$

無限公理: $\exists x\, (\exists y\, (y \varepsilon x \wedge y \equiv \emptyset)$
$\wedge \forall t\, (t \varepsilon x \rightarrow \exists u\, (\forall v\, (v \varepsilon u \leftrightarrow (v \varepsilon t \vee v \equiv t)) \wedge u \varepsilon x))$

(ただし, $y \equiv \emptyset$ は $\forall t\, \neg t \varepsilon y$ の略記である)

$$\vdots$$

各 L_{ZF}-論理式 $\varphi = \varphi(y, x_1, \ldots, x_n) = \varphi(y, \overline{x})$ に対し,

分出公理 $_\varphi$: $\forall x \forall x_1 \cdots \forall x_n \exists s \forall t\, (t \varepsilon s \leftrightarrow (t \varepsilon x \wedge \varphi(t, \overline{x})))$

$$\vdots$$

ZFC (3/4)

外延性公理: $\forall x \forall y (\forall z\, (z \,\varepsilon\, x \leftrightarrow z \,\varepsilon\, y) \rightarrow x \equiv y)$

空集合公理: $\exists z \forall t\, \neg t \,\varepsilon\, z$

対の公理: $\forall x \forall y \exists z \forall t\, (t \,\varepsilon\, z \leftrightarrow (t \equiv x \vee t \equiv y))$

和集の合公理: $\forall x \exists s \forall t\, (t \,\varepsilon\, s \leftrightarrow \exists y\, (y \,\varepsilon\, x \wedge t \,\varepsilon\, y))$

$\vdots$

無限公理: $\exists x\, (\exists y\, (y \,\varepsilon\, x \wedge y \equiv \emptyset)$
$\wedge \forall t\, (t \,\varepsilon\, x \rightarrow \exists u\, (\forall v\, (v \,\varepsilon\, u \leftrightarrow (v \,\varepsilon\, t \vee v \equiv t)) \wedge u \,\varepsilon\, x))$

(ただし, $y \equiv \emptyset$ は $\forall t\, \neg t \,\varepsilon\, y$ の略記である)

$\vdots$

各 L_{ZF}-論理式 $\varphi = \varphi(y, x_1, \ldots, x_n) = \varphi(y, \overline{x})$ に対し,

分出公理 $_\varphi$: $\forall x \forall x_1 \cdots \forall x_n \exists s \forall t\, (t \,\varepsilon\, s \leftrightarrow (t \,\varepsilon\, x \wedge \varphi(t, \overline{x})))$

$\vdots$

ZFC (4/4)

- 空集合公理は，空集合 $\emptyset$ が存在していることを主張している．
- 対の公理は，集合 x, y に対し，集合 $\{x, y\}$ の存在を主張している．
- 無限公理は，$t \in x$ なら $t \cup \{t\} \in x$ となるような集合 x の存在を主張している．
- 空集合公理と 対の公理を用いて，数 0, 1, 2, 3 ,... を それぞれ集合，$\emptyset$, $\{\emptyset\}$, $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$, $\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$,... のことと思って，数 t の次の数を $t \cup \{t\}$ のことだと思うことで，PA を含む数論を ZFC の中で展開することができる．
- 無限公理と分出公理を使うと，自然数の全体の集合 $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, , ...\}$ の存在が証明でき，これを使って有理数の全体や実数の全体を ZFC の中で構成できる．
- このような議論によって，すべての通常の数学が ZFC の中で展開できることが示せる．

ZFC (4/4)

- 空集合公理は, 空集合 $\emptyset$ が存在していることを主張している.
- 対の公理は, 集合 x, y に対し, 集合 $\{x, y\}$ の存在を主張している.
- 無限公理は, $t \in x$ なら $t \cup \{t\} \in x$ となるような集合 x の存在を主張している.
- 空集合公理と 対の公理を用いて, 数 0, 1, 2, 3 ,... を それぞれ集合, $\emptyset$, $\{\emptyset\}$, $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$, $\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$,... のことと思って, 数 t の次の数を $t \cup \{t\}$ のことだと思うことで, PA を含む数論を ZFC の中で展開することができる.
- 無限公理と分出公理を使うと, 自然数の全体の集合 $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, , ...\}$ の存在が証明でき, これを使って有理数の全体や実数の全体を ZFC の中で構成できる.
- このような議論によって, すべての通常の数学が ZFC の中で展開できることが示せる.

ZFC (4/4)

- 空集合公理は，空集合 $\emptyset$ が存在していることを主張している．
- 対の公理は，集合 x, y に対し，集合 $\{x, y\}$ の存在を主張している．
- 無限公理は，$t \in x$ なら $t \cup \{t\} \in x$ となるような集合 x の存在を主張している．
- 空集合公理と 対の公理を用いて，数 0, 1, 2, 3 ,... を それぞれ集合，$\emptyset$, $\{\emptyset\}$, $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$, $\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$,... のことと思って，数 t の次の数を $t \cup \{t\}$ のことだと思うことで，PA を含む数論を ZFC の中で展開することができる．
- 無限公理と分出公理を使うと，自然数の全体の集合 $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, , ...\}$ の存在が証明でき，これを使って有理数の全体や実数の全体を ZFC の中で構成できる．
- このような議論によって，すべての通常の数学が ZFC の中で展開できることが示せる．

ZFC (4/4)

- 空集合公理は，空集合 $\emptyset$ が存在していることを主張している．
- 対の公理は，集合 x, y に対し，集合 $\{x, y\}$ の存在を主張している．
- 無限公理は，$t \in x$ なら $t \cup \{t\} \in x$ となるような集合 x の存在を主張している．
- 空集合公理と 対の公理を用いて，数 0, 1, 2, 3 ,... を それぞれ集合，$\emptyset$, $\{\emptyset\}$, $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$, $\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$,... のことと思って，数 t の次の数を $t \cup \{t\}$ のことだと思うことで，PA を含む数論を ZFC の中で展開することができる．
- 無限公理と分出公理を使うと，自然数の全体の集合 $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, , ...\}$ の存在が証明でき，これを使って有理数の全体や実数の全体を ZFC の中で構成できる．
- このような議論によって，すべての通常の数学が ZFC の中で展開できることが示せる．

ZFC (4/4)

- 空集合公理は，空集合 $\emptyset$ が存在していることを主張している．
- 対の公理は，集合 x, y に対し，集合 $\{x, y\}$ の存在を主張している．
- 無限公理は，$t \in x$ なら $t \cup \{t\} \in x$ となるような集合 x の存在を主張している．
- 空集合公理と 対の公理を用いて，数 0, 1, 2, 3 ,... を それぞれ集合，$\emptyset$, $\{\emptyset\}$, $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$, $\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$,... のことと思って，数 t の次の数を $t \cup \{t\}$ のことだと思うことで，PA を含む数論を ZFC の中で展開することができる．
- 無限公理と分出公理を使うと，自然数の全体の集合 $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, , \dots\}$ の存在が証明でき，これを使って有理数の全体や実数の全体を ZFC の中で構成できる．
- このような議論によって，すべての通常の数学が ZFC の中で展開できることが示せる．

ZFC (4/4)

- 空集合公理は，空集合 $\emptyset$ が存在していることを主張している．
- 対の公理は，集合 x, y に対し，集合 $\{x, y\}$ の存在を主張している．
- 無限公理は，$t \in x$ なら $t \cup \{t\} \in x$ となるような集合 x の存在を主張している．
- 空集合公理と 対の公理を用いて，数 0, 1, 2, 3 ,... を それぞれ集合，$\emptyset$, $\{\emptyset\}$, $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$, $\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$,... のことと思って，数 t の次の数を $t \cup \{t\}$ のことだと思うことで，PA を含む数論を ZFC の中で展開することができる．
- 無限公理と分出公理を使うと，自然数の全体の集合 $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, , ...\}$ の存在が証明でき，これを使って有理数の全体や実数の全体を ZFC の中で構成できる．
- このような議論によって，すべての通常の数学が ZFC の中で展開できることが示せる．

ZFC (4/4)

- 空集合公理は，空集合 $\emptyset$ が存在していることを主張している．
- 対の公理は，集合 x, y に対し，集合 $\{x, y\}$ の存在を主張している．
- 無限公理は，$t \in x$ なら $t \cup \{t\} \in x$ となるような集合 x の存在を主張している．
- 空集合公理と 対の公理を用いて，数 0, 1, 2, 3 ,... を それぞれ集合，$\emptyset$, $\{\emptyset\}$, $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$, $\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$,... のことと思って，数 t の次の数を $t \cup \{t\}$ のことだと思うことで，PA を含む数論を ZFC の中で展開することができる．
- 無限公理と分出公理を使うと，自然数の全体の集合 $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, , ...\}$ の存在が証明でき，これを使って有理数の全体や実数の全体を ZFC の中で構成できる．
- このような議論によって，すべての通常の数学が ZFC の中で展開できることが示せる．

数学から独立な数学的命題

ZFC から (特に通常の数学から) 証明できないし，否定も証明できないような命題 φ が無限に存在する．

- 第１不完全性定理の証明は，このような φ の構成法を与えるが，そこで構成される φ は人工的なもので，自然な数学的命題とは言いがたい．

数学的に意味のある命題で，ZFC から独立なものは存在するだろうか？

YES. 現在ではそのようなものが沢山知られている．

- **カントルの連続体仮説** と呼ばれる命題はそのようなものの１つである．
次回の講義でこれについて詳しく見てみることにする．

数学から独立な数学的命題

ZFC から (特に通常の数学から) 証明できないし，否定も証明できないような命題 φ が無限に存在する．

- 第１不完全性定理の証明は，このような φ の構成法を与えるが，そこで構成される φ は人工的なもので，自然な数学的命題とは言いがたい．

数学的に意味のある命題で，ZFC から独立なものは存在するだろうか？

YES. 現在ではそのようなものが沢山知られている．

- **カントルの連続体仮説** と呼ばれる命題はそのようなものの１つである．
次回の講義でこれについて詳しく見てみることにする．

数学から独立な数学的命題

ZFC から (特に通常の数学から) 証明できないし，否定も証明できないような命題 φ が無限に存在する．

- 第１不完全性定理の証明は，このような φ の構成法を与えるが，そこで構成される φ は人工的なもので，自然な数学的命題とは言いがたい．

数学的に意味のある命題で，ZFC から独立なものは存在するだろうか？

YES. 現在ではそのようなものが沢山知られている．

- **カントルの連続体仮説** と呼ばれる命題はそのようなものの１つである．

次回の講義でこれについて詳しく見てみることにする．

数学から独立な数学的命題

ZFC から (特に通常の数学から) 証明できないし，否定も証明できないような命題 φ が無限に存在する．

- 第 1 不完全性定理の証明は，このような φ の構成法を与えるが，そこで構成される φ は人工的なもので，自然な数学的命題とは言いがたい．

数学的に意味のある命題で，ZFC から独立なものは存在するだろうか？

YES. 現在ではそのようなものが沢山知られている．

- **カントルの連続体仮説** と呼ばれる命題はそのようなものの 1 つである．

次回の講義でこれについて詳しく見てみることにする．

数学から独立な数学的命題

ZFC から (特に通常の数学から) 証明できないし，否定も証明できないような命題 φ が無限に存在する．

- 第１不完全性定理の証明は，このような φ の構成法を与えるが，そこで構成される φ は人工的なもので，自然な数学的命題とは言いがたい．

数学的に意味のある命題で，ZFC から独立なものは存在するだろうか？

YES. 現在ではそのようなものが沢山知られている．

- **カントルの連続体仮説** と呼ばれる命題はそのようなものの１つである．

次回の講義でこれについて詳しく見てみることにする．

数学から独立な数学的命題

ZFC から (特に通常の数学から) 証明できないし，否定も証明できないような命題 φ が無限に存在する．

- 第１不完全性定理の証明は，このような φ の構成法を与えるが，そこで構成される φ は人工的なもので，自然な数学的命題とは言いがたい．

数学的に意味のある命題で，ZFC から独立なものは存在するだろうか？

YES. 現在ではそのようなものが沢山知られている．

- **カントルの連続体仮説** と呼ばれる命題はそのようなものの１つである．

次回の講義でこれについて詳しく見てみることにする．

数学から独立な数学的命題

ZFC から (特に通常の数学から) 証明できないし，否定も証明できないような命題 φ が無限に存在する.

- 第１不完全性定理の証明は，このような φ の構成法を与えるが，そこで構成される φ は人工的なもので，自然な数学的命題とは言いがたい.

> 数学的に意味のある命題で，ZFC から独立なものは存在するだろうか？

YES. 現在ではそのようなものが沢山知られている.

- **カントルの連続体仮説** と呼ばれる命題はそのようなものの１つである.

次回の講義でこれについて詳しく見てみることにする.

数学から独立な数学的命題

ZFC から (特に通常の数学から) 証明できないし，否定も証明できないような命題 φ が無限に存在する．

- 第 1 不完全性定理の証明は，このような φ の構成法を与えるが，そこで構成される φ は人工的なもので，自然な数学的命題とは言いがたい．

> 数学的に意味のある命題で，ZFC から独立なものは存在するだろうか？

YES. 現在ではそのようなものが沢山知られている．

- **カントルの連続体仮説** と呼ばれる命題はそのようなものの 1 つである．

次回の講義でこれについて詳しく見てみることにする．

これからの講義の流れ

- カントルの連続体仮説
- 第１不完全性定理の証明のアイデア
- 第２不完全性定理とその意味

これからの講義の流れ

- カントルの連続体仮説
- 第１不完全性定理の証明のアイデア
- 第２不完全性定理とその意味

これからの講義の流れ

- カントルの連続体仮説
- 第１不完全性定理の証明のアイデア
- 第２不完全性定理とその意味

これからの講義の流れ

- カントルの連続体仮説
- 第１不完全性定理の証明のアイデア
- 第２不完全性定理とその意味