

数理の世界 (数学の考え方) — ゲーデルの不完全性定理

第1不完全性定理とその波紋, (第 X 回の講義)

Sakaé Fuchino (渚野 昌)

Dept. of Computer Sciences
Kobe University

(神戸大学大学院 システム情報学研究科)

<http://kurt.scitec.kobe-u.ac.jp/~fuchino/>

(11. Dezember 2012 (08:34 JST) version)

神戸大学 2012 年後期の講義
於 K302 教室, 月曜 8:50 – 10:20

December 10, 2012

This presentation is typeset by p^LA_TE_X with beamer class.

第 1 不完全性定理 (1/2)

定理 (第 1 不完全性定理, ゲーデル 1931(昭和 6), ロッサー 1936(昭和 11)).

PA を含み, 矛盾しない, (具体的に与えられた) どんな理論 T も完全でない.

- ▶ 理論 T が矛盾しない (あるいは 無矛盾 である) とは, $T \not\vdash x \neq x$ となることである.
- ▶ 理論 T が完全でないとは, T の言語での文 φ で $T \not\vdash \varphi$ かつ $T \not\vdash \neg\varphi$ となるものが存在することである.
つまり T はこの φ の “真偽” を決定できない.
- ▷ “ $T \not\vdash \varphi$ ” は $T \vdash \varphi$ でない, つまり, T からの φ の証明が存在しないことをあらわす.
- ▶ 「PA を含み」という条件は本質的である. PA を含まない理論で, 完全であることが知られているものは存在する.
たとえば, 初等平面幾何は完全な公理系を持つ.

定理 (第 1 不完全性定理, ゲーデル 1931(昭和 6), ロッサー 1936(昭和 11)).

PA を含み, 矛盾しない, (具体的に与えられた) どんな理論 T も完全でない.

- ▶ 通常の数学は, すべて**選択公理**つきの**ツェルメロ・フレンケル公理系 (ZFC)** と呼ばれる集合論の体系の中で展開できる.

特に, ZFC では, PA での議論も行なうことができるので, 第 1 不完全性定理を ZFC に適用することができる.

したがって, ZFC から (特に通常の数学から) 証明できないし, 否定も証明できないような命題 φ が無限に存在する.

- ▶ 上のような φ は ZFC から **独立** であるという.
- ▶ 上の「無限に...」は, もし $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ が ZFC から独立で, $T = ZFC \cup \{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$ が無矛盾なら, T に第 1 不完全性定理を適用すると T から独立な命題 φ が得られるが, φ は, 当然 ZFC から独立で, $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ のどれとも異なるからである.

- ▶ ZFC は 2 変数の関係記号 ε のみからなる言語 L_{ZF} での次のような文からなる公理系である .
- ▷ $x \varepsilon y$ の意図されている読み方は “集合 x は集合 y の要素である” である .
- ▷ 集合論ではすべての対象は集合だと思っている (ただし集合という言葉は公理系にはあられない)

外延性公理: $\forall x \forall y (\forall z (z \varepsilon x \leftrightarrow z \varepsilon y) \rightarrow x \equiv y)$

空集合公理: $\exists z \forall t \neg t \varepsilon z$

対の公理: $\forall x \forall y \exists z \forall t (t \varepsilon z \leftrightarrow (t \equiv x \vee t \equiv y))$

和集の公理: $\forall x \exists s \forall t (t \varepsilon s \leftrightarrow \exists y (y \varepsilon x \wedge t \varepsilon y))$

⋮

外延性公理: $\forall x \forall y (\forall z (z \in x \leftrightarrow z \in y) \rightarrow x \equiv y)$

空集合公理: $\exists z \forall t \neg t \in z$

対の公理: $\forall x \forall y \exists z \forall t (t \in z \leftrightarrow (t \equiv x \vee t \equiv y))$

和集の公理: $\forall x \exists s \forall t (t \in s \leftrightarrow \exists y (y \in x \wedge t \in y))$

⋮

無限公理: $\exists x (\exists y (y \in x \wedge y \equiv \emptyset) \wedge \forall t (t \in x \rightarrow \exists u (\forall v (v \in u \leftrightarrow (v \in t \vee v \equiv t)) \wedge u \in x)))$

(ただし, $y \equiv \emptyset$ は $\forall t \neg t \in y$ の略記である)

⋮

各 L_{ZF} -論理式 $\varphi = \varphi(y, x_1, \dots, x_n) = \varphi(y, \bar{x})$ に対し,

分出公理 $_{\varphi}$: $\forall x \forall x_1 \cdots \forall x_n \exists s \forall t (t \in s \leftrightarrow (t \in x \wedge \varphi(t, \bar{x})))$

⋮

- ▶ 空集合公理は，空集合 \emptyset が存在していることを主張している．
- ▶ 対の公理は，集合 x, y に対し，集合 $\{x, y\}$ の存在を主張している．
- ▶ 無限公理は， $t \in x$ なら $t \cup \{t\} \in x$ となるような集合 x の存在を主張している．
- ▶ 空集合公理と 対の公理を用いて，数 $0, 1, 2, 3, \dots$ をそれぞれ集合， $\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}, \dots$ のことと思って，数 t の次の数を $t \cup \{t\}$ のことだと思ふことで，PA を含む数論を ZFC の中で展開することができる．
- ▶ 無限公理と分出公理を使うと，自然数の全体の集合 $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ の存在が証明でき，これを使って有理数の全体や実数の全体を ZFC の中で構成できる．
- ▶ このような議論によって，すべての通常の数学が ZFC の中で展開できることが示せる．

ZFC から (特に通常の数学から) 証明できないし, 否定も証明できないような命題 φ が無限に存在する.

- ▶ 第 1 不完全性定理の証明は, このような φ の構成法を与えるが, そこで構成される φ は人工的なもので, 自然な数学的命題とは言いがたい.

数学的に意味のある命題で, ZFC から独立なものは存在するだろうか?

YES. 現在ではそのようなものが沢山知られている.

- ▶ カントルの連続体仮説 と呼ばれる命題はそのようなものの 1 つである.
次回の講義でこれについて詳しく見てみることにする.

- ▶ カントルの連続体仮説
- ▶ 第 1 不完全性定理の証明のアイデア
- ▶ 第 2 不完全性定理とその意味