数理の世界 (数学の考え方) — ゲーデルの不完全性定理

無限の数学と連続体仮説／自己言及の逆理，(第 XI 回の講義)

Sakaé Fuchino (渕野 昌)

Dept. of Computer Sciences
Kobe University
(神戸大学大学院 システム情報学研究科)

http://kurt.scitec.kobe-u.ac.jp/~fuchino/

(6. Januar 2013 (02:14 JST) version)

神戸大学 2012 年後期の講義
於 K302 教室，月曜 8:50 – 10:20

December 17, 2012

This presentation is typeset by pLATEX with beamer class.

無限のパラドックス: 部分は全体より小さい？ (1/6)

2 つの物の集まり（集合）の互いの要素の間に一対一の対応がつくとき，同じ個数の要素を持つ （あるいは 濃度が等しい）という．

たとえば，集合 $\{1,2,3,4,5\}$ と 集合 $\{2,4,6,8,10\}$ は，

$$\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\ 2 & 4 & 6 & 8 & 10 \end{array}$$

という対応から同じ個数の要素を持つことが確かめられる．

有限の個数の物のあつまりの要素は，その（真の）部分の要素とは一対一に対応づけることができない：

$$\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & & \\ 1 & 2 & 3 & & \end{array}$$

無限のパラドックス: 部分は全体より小さい？ (1/6)

２つの物の集まり（集合）の互いの要素の間に一対一の対応がつくとき，同じ個数の要素を持つ （あるいは 濃度が等しい） という．

たとえば，集合 $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ と 集合 $\{2, 4, 6, 8, 10\}$ は，

$$\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\ 2 & 4 & 6 & 8 & 10 \end{array}$$

という対応から同じ個数の要素を持つことが確かめられる．

有限の個数の物のあつまりの要素は，その（真の）部分の要素とは一対一に対応づけることができない：

$$\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & & \\ 1 & 2 & 3 & & \end{array}$$

無限のパラドックス: 部分は全体より小さい？ (1/6)

２つの物の集まり（集合）の互いの要素の間に一対一の対応がつくとき，同じ個数の要素を持つ（あるいは 濃度が等しい）という.

たとえば，集合 $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ と 集合 $\{2, 4, 6, 8, 10\}$ は，

$$\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\ 2 & 4 & 6 & 8 & 10 \end{array}$$

という対応から同じ個数の要素を持つことが確かめられる.

有限の個数の物のあつまりの要素は，その（真の）部分の要素とは一対一に対応づけることができない：

$$\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & & \\ 1 & 2 & 3 & & \end{array}$$

無限のパラドックス: 部分は全体より小さい？ (1/6)

2 つの物の集まり（集合）の互いの要素の間に一対一の対応がつくとき，同じ個数の要素を持つ （あるいは 濃度が等しい）という.

たとえば，集合 $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ と 集合 $\{2, 4, 6, 8, 10\}$ は，

$$\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\ 2 & 4 & 6 & 8 & 10 \end{array}$$

という対応から同じ個数の要素を持つことが確かめられる.

有限の個数の物のあつまりの要素は，その（真の）部分の要素とは一対一に対応づけることができない：

$$\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & & \\ 1 & 2 & 3 & & \end{array}$$

無限のパラドックス: 部分は全体より小さい？ (1/6)

２つの物の集まり（集合）の互いの要素の間に一対一の対応がつくとき，同じ個数の要素を持つ（あるいは 濃度が等しい）という．

たとえば，集合 $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ と 集合 $\{2, 4, 6, 8, 10\}$ は，

$$\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\ 2 & 4 & 6 & 8 & 10 \end{array}$$

という対応から同じ個数の要素を持つことが確かめられる．

有限の個数の物のあつまりの要素は，その（真の）部分の要素とは一対一に対応づけることができない：

$$\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & & \\ 1 & 2 & 3 & & \end{array}$$

無限のパラドックス: 部分は全体より小さい？ (2/6)

$\mathbb{N}$ で自然数の全体をあらわす．$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$ である．

E を偶数の全体とする，つまり $E = \{0, 2, 4, 6, 8, \ldots\}$ である．E は $\mathbb{N}$ の真の部分だが，

$$\begin{array}{cccccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & \cdots \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \\ 0 & 2 & 4 & 6 & 8 & 10 & 12 & \cdots \end{array}$$

という対応がつくことから同じ個数の要素を持つ（濃度が等しい）ことが確かめられる！

無限のパラドックス: 部分は全体より小さい？ (2/6)

$\mathbb{N}$ で自然数の全体をあらわす．$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$ である．

E を偶数の全体とする，つまり $E = \{0, 2, 4, 6, 8, \ldots\}$ である．E は $\mathbb{N}$ の真の部分だが，

$$\begin{array}{cccccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & \cdots \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \\ 0 & 2 & 4 & 6 & 8 & 10 & 12 & \cdots \end{array}$$

という対応がつくことから同じ個数の要素を持つ（濃度が等しい）ことが確かめられる！

無限のパラドックス: 部分は全体より小さい？ (2/6)

$\mathbb{N}$ で自然数の全体をあらわす． $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$ である．

E を偶数の全体とする，つまり $E = \{0, 2, 4, 6, 8, \ldots\}$ である． E は $\mathbb{N}$ の真の部分だが，

$$\begin{array}{cccccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & \cdots \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \\ 0 & 2 & 4 & 6 & 8 & 10 & 12 & \cdots \end{array}$$

という対応がつくことから同じ個数の要素を持つ（濃度が等しい）ことが確かめられる！

無限のパラドックス: 部分は全体より小さい？ (2/6)

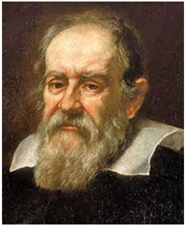
$\mathbb{N}$ で自然数の全体をあらわす．$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$ である．

E を偶数の全体とする，つまり $E = \{0, 2, 4, 6, 8, \ldots\}$ である．E は $\mathbb{N}$ の真の部分だが，

$$\begin{array}{cccccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & \cdots \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \\ 0 & 2 & 4 & 6 & 8 & 10 & 12 & \cdots \end{array}$$

という対応がつくことから同じ個数の要素を持つ（濃度が等しい）ことが確かめられる！

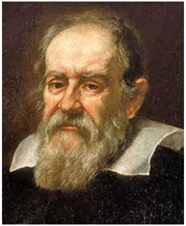
無限のパラドックス: 部分は全体より小さい？ (3/6)



ガリレオ・ガリレイ
Galileo Galilei
1564(天文 33) 年ピサ（現在のイタリア）生
— 1642(寛永 19) 年フロレンス近郊
（現在のイタリア）没

- 地動説で知られる，ガリレオは，1638(寛永 15) 年 の論文で上のような「逆理」（パラドックス）を論じて,『無限の大きさを比較する議論は無意味だ』 と結論している.

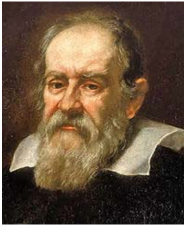
無限のパラドックス: 部分は全体より小さい？ (3/6)



ガリレオ・ガリレイ
Galileo Galilei
1564(天文 33) 年ピサ（現在のイタリア）生
— 1642(寛永 19) 年フロレンス近郊
（現在のイタリア）没

- 地動説で知られる，ガリレオは，1638(寛永 15) 年 の論文で上のような「逆理」（パラドックス）を論じて,『無限の大きさを比較する議論は無意味だ』 と結論している．

無限のパラドックス: 部分は全体より小さい？ (3/6)



ガリレオ・ガリレイ
Galileo Galilei
1564(天文 33) 年ピサ（現在のイタリア）生
— 1642(寛永 19) 年フロレンス近郊
（現在のイタリア）没

- 地動説で知られる，ガリレオは，1638(寛永 15) 年 の論文で上のような「逆理」（パラドックス）を論じて,『無限の大きさを比較する議論は無意味だ』 と結論している.

無限のパラドックス: 部分は全体より小さい？ (4/6)

ゲオルグ・カントル
Georg Cantor
1845(弘化 2) 年ペテルスブルク（現在ロシア）生
— 1918(大正 7) 年ハレ（ドイツ）没

- 19 世紀末には無限をより積極的に考察に取りこんだ数学の可能性や必要性がより感じられるようになった．カントルは 無限 に関する研究を積極的に行い，現在では集合論 ((英) Set Theory (独) Mengenlehre) と呼ばれている無限集合の性質を研究する数学の分野を確立した．
- カントルの集合論は数学的な基礎付けが十分にされない形のものだったが，前回の講義で触れたように 20 世紀になるとツェルメロらにより集合論の公理系が導入されて，集合論での論証の厳密な検証が可能になった．

無限のパラドックス: 部分は全体より小さい？ (4/6)

ゲオルグ・カントル
Georg Cantor
1845(弘化 2) 年ペテルスブルク（現在ロシア）生
— 1918(大正 7) 年ハレ（ドイツ）没

- 19 世紀末には無限をより積極的に考察に取りこんだ数学の可能性や必要性がより感じられるようになった．カントルは 無限 に関する研究を積極的に行い，現在では集合論 ((英) Set Theory (独) Mengenlehre) と呼ばれている無限集合の性質を研究する数学の分野を確立した．
- カントルの集合論は数学的な基礎付けが十分にされない形のものだったが，前回の講義で触れたように 20 世紀になるとツェルメロらにより集合論の公理系が導入されて，集合論での論証の厳密な検証が可能になった．

無限のパラドックス: 部分は全体より小さい？ (4/6)

ゲオルグ・カントル
Georg Cantor
1845(弘化 2) 年ペテルスブルク（現在ロシア）生
— 1918(大正 7) 年ハレ（ドイツ）没

- 19 世紀末には無限をより積極的に考察に取りこんだ数学の可能性や必要性がより感じられるようになった．カントルは 無限 に関する研究を積極的に行い，現在では集合論 ((英) Set Theory (独) Mengenlehre) と呼ばれている無限集合の性質を研究する数学の分野を確立した．
- カントルの集合論は数学的な基礎付けが十分にされない形のものだったが，前回の講義で触れたように 20 世紀になるとツェルメロらにより集合論の公理系が導入されて，集合論での論証の厳密な検証が可能になった．

無限のパラドックス: 部分は全体より小さい？ (4/6)

ゲオルグ・カントル
Georg Cantor
1845(弘化 2) 年ペテルスブルク（現在ロシア）生
— 1918(大正 7) 年ハレ（ドイツ）没

- 19 世紀末には無限をより積極的に考察に取りこんだ数学の可能性や必要性がより感じられるようになった．カントルは 無限 に関する研究を積極的に行い，現在では集合論 ((英) Set Theory (独) Mengenlehre) と呼ばれている無限集合の性質を研究する数学の分野を確立した．
- カントルの集合論は数学的な基礎付けが十分にされない形のものだったが，前回の講義で触れたように 20 世紀になるとツェルメロらにより集合論の公理系が導入されて，集合論での論証の厳密な検証が可能になった．

無限のパラドックス: 部分は全体より小さい？ (5/6)

ゲオルグ・カントル
Georg Cantor
1845(弘化 2) 年ペテルスブルク（現在ロシア）生
— 1918(大正 7) 年ハレ（ドイツ）没

- カントルの時代にも無限を研究することに懐疑的な数学者は少なくなかった．カントルは無限を研究することを擁護して，1883(明治 16) 年に発表された論文に，次のような言葉を残している:

> ... これに対し，必要以上の研究領域の制限はより大きな危険をはらんでいるように思える．特に，この学問の本質から，そのような制限に対して何の正当性も結論できないのであるからなおさらである； つまり，数学の本質はその自由にある からである．

無限のパラドックス: 部分は全体より小さい？ (5/6)

ゲオルグ・カントル
Georg Cantor
1845(弘化 2) 年ペテルスブルク（現在ロシア）生
— 1918(大正 7) 年ハレ（ドイツ）没

- カントルの時代にも無限を研究することに懐疑的な数学者は少なくなかった．カントルは無限を研究することを擁護して，1883(明治 16) 年に発表された論文に，次のような言葉を残している:

> ... これに対し，必要以上の研究領域の制限はより大きな危険をはらんでいるように思える．特に，この学問の本質から，そのような制限に対して何の正当性も結論できないのであるからなおさらである； つまり，数学の本質はその自由にある からである．

無限のパラドックス: 部分は全体より小さい？ (5/6)

ゲオルグ・カントル
Georg Cantor
1845(弘化 2) 年ペテルスブルク（現在ロシア）生
— 1918(大正 7) 年ハレ（ドイツ）没

- カントルの時代にも無限を研究することに懐疑的な数学者は少なくなかった．カントルは無限を研究することを擁護して，1883(明治 16) 年に発表された論文に，次のような言葉を残している:

> ... これに対し，必要以上の研究領域の制限はより大きな危険をはらんでいるように思える．特に，この学問の本質から，そのような制限に対して何の正当性も結論できないのであるからなおさらである；つまり，数学の本質はその自由にある からである．

無限のパラドックス: 部分は全体より小さい？ (6/6)

ゲオルグ・カントル
Georg Cantor
1845(弘化 2) 年ペテルスブルク（現在ロシア）生
— 1918(大正 7) 年ハレ（ドイツ）没

- ガリレオの逆理に関しては，カントルは，全体と部分が同じ大きさになりえる，というまさにそのことが，無限の本質的な性質の１つである，と読みかえて，無限の研究をさらに進めたのだった．

無限のパラドックス: 部分は全体より小さい？ (6/6)

ゲオルグ・カントル
Georg Cantor
1845(弘化 2) 年ペテルスブルク（現在ロシア）生
— 1918(大正 7) 年ハレ（ドイツ）没

- ガリレオの逆理に関しては，カントルは，全体と部分が同じ大きさになりえる，というまさにそのことが，無限の本質的な性質の１つである，と読みかえて，無限の研究をさらに進めたのだった．

集合論の始まり

ゲオルグ・カントル
Georg Cantor
1845(弘化 2) 年ペテルスブルク（現在ロシア）生
— 1918(大正 7) 年ハレ（ドイツ）没

- カントルは集合論を創始したが，1873 年（明治 6 年）12 月 7 日の，カントルによる次の定理の発見が，この集合論の始まりの瞬間であると考える数学史の研究家は少なくない:

定理 1 (G. カントル 1873 (明治 6) 年). 実数の全体を自然数を使って数え上げることはできない．つまり実数全体は自然数全体より濃度が高い．

集合論の始まり

ゲオルグ・カントル
Georg Cantor
1845(弘化 2) 年ペテルスブルク（現在ロシア）生
— 1918(大正 7) 年ハレ（ドイツ）没

- カントルは集合論を創始したが，1873 年（明治 6 年）12 月 7 日の，カントルによる次の定理の発見が，この集合論の始まりの瞬間であると考える数学史の研究家は少なくない:

定理 1 (G. カントル 1873 (明治 6) 年). 実数の全体を自然数を使って数え上げることはできない．つまり実数全体は自然数全体より濃度が高い．

集合論の始まり

ゲオルグ・カントル
Georg Cantor
1845(弘化 2) 年ペテルスブルク（現在ロシア）生
— 1918(大正 7) 年ハレ（ドイツ）没

- カントルは集合論を創始したが，1873 年（明治 6 年）12 月 7 日の，カントルによる次の定理の発見が，この集合論の始まりの瞬間であると考える数学史の研究家は少なくない:

定理 1 (G. カントル 1873 (明治 6) 年). 実数の全体を自然数を使って数え上げることはできない．つまり実数全体は自然数全体より濃度が高い．

実数は自然数より “たくさん” 存在する

定理 1 (G. カントル 1873 (明治 6) 年). 実数の全体を自然数を使って数え上げることはできない．つまり実数全体は自然数全体より濃度が高い．

証明． （背理法で示す） そうでないとすると，実数を自然数で番号づけしてならべつくすことができる．
たとえば，

$$
\begin{array}{rr}
0: & 2.416107382550335 6\cdots \\
1: & -562.4328358208955225\cdots \\
2: & 1.9462686567164178\cdots \\
3: & 0.00117822429 \\
4: & -1.5490001 \\
\vdots & \vdots
\end{array}
$$

上で赤くぬった対角線上にある数字をひろってそれらの数字の一つ一つに対しそれと違う 0 と 9 以外の数字を適当に選んで 0. の下にならべる．たとえば： 0.54721 ⋯
このとき，こうやって作った実数は上の（無限）リストに含まれないものとなってしまうが，これは矛盾である．□

実数は自然数より "たくさん" 存在する

定理 1 (G. カントル 1873 (明治 6) 年). 実数の全体を自然数を使って数え上げることはできない．つまり実数全体は自然数全体より濃度が高い．

証明. （背理法で示す） そうでないとすると，実数を自然数で番号づけしてならべつくすことができる．
たとえば，

$$\begin{array}{rr} 0: & 2.4161073825503356\cdots \\ 1: & -562.4328358208955225\cdots \\ 2: & 1.9462686567164178\cdots \\ 3: & 0.00117822429 \\ 4: & -1.5490001 \\ \vdots & \vdots \end{array}$$

上で赤くぬった対角線上にある数字をひろってそれらの数字の一つ一つに対しそれと違う 0 と 9 以外の数字を適当に選んで 0. の下にならべる．たとえば： 0.54721 $\cdots$
このとき，こうやって作った実数は上の（無限）リストに含まれないものとなってしまうが，これは矛盾である． □

実数は自然数より “たくさん” 存在する

定理 1 (G. カントル 1873 (明治 6) 年). 実数の全体を自然数を使って数え上げることはできない．つまり実数全体は自然数全体より濃度が高い．

証明. （背理法で示す） そうでないとすると，実数を自然数で番号づけしてならべつくすことができる．
たとえば，

$$
\begin{array}{rr}
0: & 2.\color{red}{4}16107382550 3356\cdots \\
1: & -562.4\color{red}{3}28358208955225\cdots \\
2: & 1.94\color{red}{6}2686567164178\cdots \\
3: & 0.001\color{red}{1}7822429 \\
4: & -1.5490\color{red}{0}01 \\
\vdots & \vdots
\end{array}
$$

上で赤くぬった対角線上にある数字をひろってそれらの数字の一つ一つに対しそれと違う 0 と 9 以外の数字を適当に選んで 0. の下にならべる．たとえば： $0.54721\cdots$
このとき，こうやって作った実数は上の（無限）リストに含まれないものとなってしまうが，これは矛盾である． □

実数は自然数より "たくさん" 存在する

定理 1 (G. カントル 1873 (明治 6) 年). 実数の全体を自然数を使って数え上げることはできない．つまり実数全体は自然数全体より濃度が高い．

証明. （背理法で示す） そうでないとすると，実数を自然数で番号づけしてならべつくすことができる．
たとえば，

$$
\begin{array}{rr}
0: & 2.\color{red}{4}16107382550335 6\cdots \\
1: & -562.4\color{red}{3}28358208955225\cdots \\
2: & 1.94\color{red}{6}2686567164178\cdots \\
3: & 0.001\color{red}{1}7822429 \\
4: & -1.5490\color{red}{0}01 \\
\vdots & \vdots
\end{array}
$$

上で赤くぬった対角線上にある数字をひろってそれらの数字の一つ一つに対しそれと違う 0 と 9 以外の数字を適当に選んで 0. の下にならべる．たとえば： $0.54721\cdots$
このとき，こうやって作った実数は上の（無限）リストに含まれないものとなってしまうが，これは矛盾である． □

実数は自然数より "たくさん" 存在する

定理 1 (G. カントル 1873 (明治 6) 年). 実数の全体を自然数を使って数え上げることはできない．つまり実数全体は自然数全体より濃度が高い．

証明. （背理法で示す） そうでないとすると，実数を自然数で番号づけしてならべつくすことができる．
たとえば，

$$
\begin{array}{rr}
0: & 2.\textcolor{red}{4}16107382550335 6\cdots \\
1: & -562.4\textcolor{red}{3}28358208955225\cdots \\
2: & 1.94\textcolor{red}{6}2686567164178\cdots \\
3: & 0.001\textcolor{red}{1}7822429 \\
4: & -1.5490\textcolor{red}{0}01 \\
\vdots & \vdots
\end{array}
$$

上で赤くぬった対角線上にある数字をひろってそれらの数字の一つ一つに対しそれと違う 0 と 9 以外の数字を適当に選んで 0. の下にならべる．たとえば： 0.54721 ⋯
このとき，こうやって作った実数は上の（無限）リストに含まれないものとなってしまうが，これは矛盾である．□

実数は自然数より "たくさん" 存在する

定理 1 (G. カントル 1873 (明治 6) 年). 実数の全体を自然数を使って数え上げることはできない．つまり実数全体は自然数全体より濃度が高い．

証明. （背理法で示す） そうでないとすると，実数を自然数で番号づけしてならべつくすことができる．
たとえば，

$$\begin{array}{rr} 0: & 2.416107382550335 6\cdots \\ 1: & -562.4328358208955225\cdots \\ 2: & 1.9462686567164178\cdots \\ 3: & 0.00117822429 \\ 4: & -1.5490001 \\ \vdots & \vdots \end{array}$$

上で赤くぬった対角線上にある数字をひろってそれらの数字の一つ一つに対しそれと違う 0 と 9 以外の数字を適当に選んで 0. の下にならべる．たとえば： $0.54721\cdots$
このとき，こうやって作った実数は上の（無限）リストに含まれないものとなってしまうが，これは矛盾である．□

実数は自然数より “たくさん” 存在する

定理 1 (G. カントル 1873 (明治 6) 年). 実数の全体を自然数を使って数え上げることはできない． つまり実数全体は自然数全体より濃度が高い．

証明. （背理法で示す） そうでないとすると，実数を自然数で番号づけしてならべつくすことができる．
たとえば，

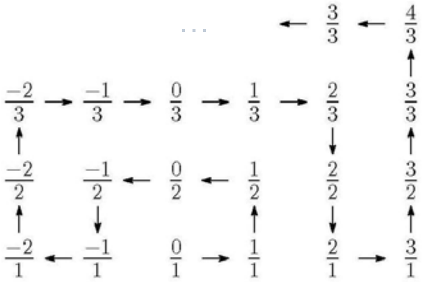
$$\begin{array}{rr}
0: & 2.416107382550335 6\cdots \\
1: & -562.43283582089552 25\cdots \\
2: & 1.9462686567164178\cdots \\
3: & 0.0011782242 9 \\
4: & -1.5490001 \\
\vdots & \vdots
\end{array}$$

上で赤くぬった対角線上にある数字をひろってそれらの数字の一つ一つに対しそれと違う 0 と 9 以外の数字を適当に選んで 0. の下にならべる．たとえば： 0.54721 ⋯
このとき，こうやって作った実数は上の（無限）リストに含まれないものとなってしまうが，これは矛盾である． □

実数は有理数より “たくさん” 存在する

定理 2 (G. カントル). 有理数の全体は自然数の全体と一対一に対応づけることができる．つまり有理数の全体は自然数の全体と濃度が等しい．

証明.



前の２つの定理を組み合せると，有理数の全体を実数の全体に一対一に対応づけることができない（つまり有理数の全体より実数の全体の濃度が真に大きい）こともわかる．

実数は有理数より “たくさん” 存在する

定理 2 (G. カントル). 有理数の全体は自然数の全体と一対一に対応づけることができる．つまり有理数の全体は自然数の全体と濃度が等しい．

証明.

$$
\begin{tikzcd}
 & & & \cdots & \frac{3}{3} \arrow[l] & \frac{4}{3} \arrow[l] \\
\frac{-2}{3} \arrow[r] & \frac{-1}{3} \arrow[r] & \frac{0}{3} \arrow[r] & \frac{1}{3} \arrow[r] & \frac{2}{3} \arrow[d] & \frac{3}{3} \arrow[u] \\
\frac{-2}{2} \arrow[u] & \frac{-1}{2} \arrow[d] & \frac{0}{2} \arrow[l] & \frac{1}{2} \arrow[l] & \frac{2}{2} \arrow[d] & \frac{3}{2} \arrow[u] \\
\frac{-2}{1} \arrow[u] & \frac{-1}{1} \arrow[l] & \frac{0}{1} \arrow[r] & \frac{1}{1} \arrow[u] & \frac{2}{1} \arrow[r] & \frac{3}{1} \arrow[u]
\end{tikzcd}
$$

前の２つの定理を組み合せると，有理数の全体を実数の全体に一対一に対応づけることができない（つまり有理数の全体より実数の全体の濃度が真に大きい）こともわかる．

実数は有理数より "たくさん" 存在する

定理 2 (G. カントル). 有理数の全体は自然数の全体と一対一に対応づけることができる．つまり有理数の全体は自然数の全体と濃度が等しい．

証明.

$$\begin{tikzcd}
 & & \cdots & & \frac{3}{3} \arrow[ll] & \frac{4}{3} \arrow[l] \\
\frac{-2}{3} \arrow[r] & \frac{-1}{3} \arrow[r] & \frac{0}{3} \arrow[r] & \frac{1}{3} \arrow[r] & \frac{2}{3} \arrow[d] & \frac{3}{3} \arrow[u] \\
\frac{-2}{2} \arrow[u] & \frac{-1}{2} \arrow[d] & \frac{0}{2} \arrow[l] & \frac{1}{2} \arrow[l] & \frac{2}{2} \arrow[d] & \frac{3}{2} \arrow[u] \\
\frac{-2}{1} \arrow[u] & \frac{-1}{1} \arrow[l] & \frac{0}{1} \arrow[r] & \frac{1}{1} \arrow[u] & \frac{2}{1} \arrow[r] & \frac{3}{1} \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

前の２つの定理を組み合せると，有理数の全体を実数の全体に一対一に対応づけることができない（つまり有理数の全体より実数の全体の濃度が真に大きい）こともわかる．

実数は有理数より “たくさん” 存在する

定理 2 (G. カントル). 有理数の全体は自然数の全体と一対一に対応づけることができる．つまり有理数の全体は自然数の全体と濃度が等しい．

証明.

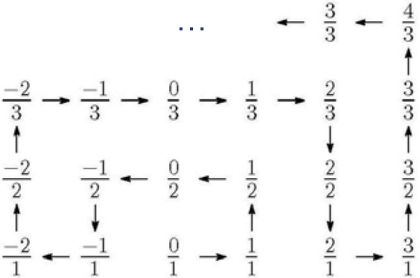
$$
\begin{tikzcd}
 & & \cdots & & \frac{3}{3} \arrow[l] & \frac{4}{3} \arrow[l] \\
\frac{-2}{3} \arrow[r] & \frac{-1}{3} \arrow[r] & \frac{0}{3} \arrow[r] & \frac{1}{3} \arrow[r] & \frac{2}{3} \arrow[d] & \frac{3}{3} \arrow[u] \\
\frac{-2}{2} \arrow[u] & \frac{-1}{2} \arrow[d] & \frac{0}{2} \arrow[l] & \frac{1}{2} \arrow[l] & \frac{2}{2} \arrow[d] & \frac{3}{2} \arrow[u] \\
\frac{-2}{1} \arrow[u] & \frac{-1}{1} \arrow[l] & \frac{0}{1} \arrow[r] & \frac{1}{1} \arrow[u] & \frac{2}{1} \arrow[r] & \frac{3}{1} \arrow[u]
\end{tikzcd}
$$

前の２つの定理を組み合せると，有理数の全体を実数の全体に一対一に対応づけることができない（つまり有理数の全体より実数の全体の濃度が真に大きい）こともわかる．

実数は有理数より “たくさん” 存在する

定理 2 (G. カントル). 有理数の全体は自然数の全体と一対一に対応づけることができる．つまり有理数の全体は自然数の全体と濃度が等しい．

証明.



前の２つの定理を組み合せると，有理数の全体を実数の全体に一対一に対応づけることができない（つまり有理数の全体より実数の全体の濃度が真に大きい）こともわかる．

連続体仮説

以上から,

$$\text{自然数の全体の濃度} = \text{整数の全体の濃度} < \text{実数の全体の濃度}$$

となることがわかったが, 数学に現われる調べられるかぎりの無限集合は, 自然数全体の濃度を持っているか, 実数の全体より濃度が大きいか等しいかのどちらかであることも判ってきたので, カントルは次の仮説を立てて, これを証明しようとした:

連続体仮説. 実数の全体（連続体）の濃度は, 自然数全体の濃度の次の無限の大きさである.

しかし, カントルはこの仮説に対して結着をつけることができずに, 1918 (大正 7) 年に亡くなっている.

連続体仮説

以上から,

$$\text{自然数の全体の濃度} = \text{整数の全体の濃度} < \text{実数の全体の濃度}$$

となることがわかったが, 数学に現われる調べられるかぎりの無限集合は, 自然数全体の濃度を持っているか, 実数の全体より濃度が大きいか等しいかのどちらかであることも判ってきたので, カントルは次の仮説を立てて, これを証明しようとした:

連続体仮説. 実数の全体 (連続体) の濃度は, 自然数全体の濃度の次の無限の大きさである.

しかし, カントルはこの仮説に対して結着をつけることができずに, 1918 (大正 7) 年に亡くなっている.

連続体仮説

以上から,

$$\text{自然数の全体の濃度} = \text{整数の全体の濃度} < \text{実数の全体の濃度}$$

となることがわかったが，数学に現われる調べられるかぎりの無限集合は，自然数全体の濃度を持っているか，実数の全体より濃度が大きいか等しいかのどちらかであることも判ってきたので，カントルは次の仮説を立てて，これを証明しようとした:

連続体仮説. 実数の全体（連続体）の濃度は，自然数全体の濃度の次の無限の大きさである.

しかし，カントルはこの仮説に対して結着をつけることができずに，1918 (大正 7) 年に亡くなっている.

連続体仮説

以上から,

$$\text{自然数の全体の濃度} = \text{整数の全体の濃度} < \text{実数の全体の濃度}$$

となることがわかったが，数学に現われる調べられるかぎりの無限集合は，自然数全体の濃度を持っているか，実数の全体より濃度が大きいか等しいかのどちらかであることも判ってきたので，カントルは次の仮説を立てて，これを証明しようとした:

連続体仮説. 実数の全体（連続体）の濃度は，自然数全体の濃度の次の無限の大きさである.

しかし，カントルはこの仮説に対して結着をつけることができずに，1918 (大正 7) 年に亡くなっている.

連続体仮説

連続体仮説. 実数の全体（連続体）の濃度は，自然数全体の濃度の次の無限の大きさである．

- 前回に見たようにカントルの時代の後に，集合論は自然な公理化が可能である ことが確かめられた．現在通常に用いられる合論の標準的な公理系は ZFC とよばれるものである．
- 前回にも説明したように，すべての数学は，この集合論の公理系の中で展開できることが，多くの人によって確かめられている．

特にこのことから，

集合論の公理系 ZFC は全数学の公理化を与える．

連続体仮説

連続体仮説. 実数の全体（連続体）の濃度は，自然数全体の濃度の次の無限の大きさである.

- 前回に見たようにカントルの時代の後に，集合論は自然な公理化が可能である ことが確かめられた．現在通常に用いられる合論の標準的な公理系は ZFC とよばれるものである．
- 前回にも説明したように，すべての数学は，この集合論の公理系の中で展開できることが，多くの人によって確かめられている．

特にこのことから，

集合論の公理系 ZFC は全数学の公理化を与える．

連続体仮説

連続体仮説. 実数の全体（連続体）の濃度は，自然数全体の濃度の次の無限の大きさである.

- 前回に見たようにカントルの時代の後に，集合論は自然な公理化が可能である ことが確かめられた．現在通常に用いられる合論の標準的な公理系は ZFC とよばれるものである.
- 前回にも説明したように，すべての数学は，この集合論の公理系の中で展開できることが，多くの人によって確かめられている.

特にこのことから，

集合論の公理系 ZFC は全数学の公理化を与える.

連続体仮説

連続体仮説. 実数の全体（連続体）の濃度は，自然数全体の濃度の次の無限の大きさである．

- 前回に見たようにカントルの時代の後に，集合論は自然な公理化が可能である ことが確かめられた．現在通常に用いられる合論の標準的な公理系は ZFC とよばれるものである．
- 前回にも説明したように，すべての数学は，この集合論の公理系の中で展開できることが，多くの人によって確かめられている．

特にこのことから，

集合論の公理系 ZFC は全数学の公理化を与える．

連続体仮説

連続体仮説． 実数の全体（連続体）の濃度は，自然数全体の濃度の次の無限の大きさである．

- 前回に見たようにカントルの時代の後に，集合論は自然な公理化が可能であることが確かめられた．現在通常に用いられる合論の標準的な公理系は ZFC とよばれるものである．

- 前回にも説明したように，すべての数学は，この集合論の公理系の中で展開できることが，多くの人によって確かめられている．

特にこのことから，

集合論の公理系 ZFC は全数学の公理化を与える．

連続体仮説

連続体仮説. 実数の全体（連続体）の濃度は，自然数全体の濃度の次の無限の大きさである．

- 前回に見たようにカントルの時代の後に，集合論は自然な公理化が可能である ことが確かめられた．現在通常に用いられる合論の標準的な公理系は ZFC とよばれるものである．
- 前回にも説明したように，すべての数学は，この集合論の公理系の中で展開できることが，多くの人によって確かめられている．

特にこのことから，

集合論の公理系 ZFC は全数学の公理化を与える．

連続体仮説. 実数の全体（連続体）の濃度は，自然数全体の濃度の次の無限の大きさである.

- 連続体仮説は，20 世紀の後半になって，次のような，驚くべき解決が与えられた:

定理 3 (K. ゲーデル，1940 (昭和 15) 年). ZFC が無矛盾なら，連続体仮説の否定は ZFC から証明できない.

定理 4 (P. コーエン，1964 (昭和 39) 年). ZFC が無矛盾なら，連続体仮説は ZFC から証明できない.

したがって，連続体仮説は ZFC の公理系から 独立 である.

- 現代では，いくつかの ZFC の自然な拡張から，実数の全体の濃度と自然数の全体の濃度の間にちょうど一つだけこれらと別の濃度がある という主張が証明できることが知られていて，研究者の中には，これが “正しい” 状況だろうと考えている人も少なくない.

連続体仮説

連続体仮説． 実数の全体（連続体）の濃度は，自然数全体の濃度の次の無限の大きさである．

- 連続体仮説は，20 世紀の後半になって，次のような，驚くべき解決が与えられた:

定理 3 (K. ゲーデル，1940 (昭和 15) 年)． ZFC が無矛盾なら，連続体仮説の否定は ZFC から証明できない．

定理 4 (P. コーエン，1964 (昭和 39) 年)． ZFC が無矛盾なら，連続体仮説は ZFC から証明できない．

したがって，連続体仮説は ZFC の公理系から 独立 である．

- 現代では，いくつかの ZFC の自然な拡張から，実数の全体の濃度と自然数の全体の濃度の間にちょうど一つだけこれらと別の濃度がある という主張が証明できることが知られていて，研究者の中には，これが "正しい" 状況だろうと考えている人も少なくない．

連続体仮説

連続体仮説. 実数の全体（連続体）の濃度は，自然数全体の濃度の次の無限の大きさである.

- 連続体仮説は，20 世紀の後半になって，次のような，驚くべき解決が与えられた:

定理 3 (K. ゲーデル，1940 (昭和 15) 年). ZFC が無矛盾なら，連続体仮説の否定は ZFC から証明できない.

定理 4 (P. コーエン，1964 (昭和 39) 年). ZFC が無矛盾なら，連続体仮説は ZFC から証明できない.

したがって，連続体仮説は ZFC の公理系から 独立 である.

- 現代では，いくつかの ZFC の自然な拡張から，実数の全体の濃度と自然数の全体の濃度の間にちょうど一つだけこれらと別の濃度がある という主張が証明できることが知られていて，研究者の中には，これが “正しい” 状況だろうと考えている人も少なくない.

連続体仮説

連続体仮説. 実数の全体（連続体）の濃度は，自然数全体の濃度の次の無限の大きさである.

- 連続体仮説は，20 世紀の後半になって，次のような，驚くべき解決が与えられた:

定理 3 (K. ゲーデル，1940 (昭和 15) 年). ZFC が無矛盾なら，連続体仮説の否定は ZFC から証明できない.

定理 4 (P. コーエン，1964 (昭和 39) 年). ZFC が無矛盾なら，連続体仮説は ZFC から証明できない.

したがって，連続体仮説は ZFC の公理系から 独立 である.

- 現代では，いくつかの ZFC の自然な拡張から，実数の全体の濃度と自然数の全体の濃度の間にちょうど一つだけこれらと別の濃度がある という主張が証明できることが知られていて，研究者の中には，これが “正しい” 状況だろうと考えている人も少なくない.

連続体仮説

連続体仮説. 実数の全体（連続体）の濃度は，自然数全体の濃度の次の無限の大きさである.

- 連続体仮説は，20 世紀の後半になって，次のような，驚くべき解決が与えられた:

定理 3 (K. ゲーデル，1940 (昭和 15) 年). ZFC が無矛盾なら，連続体仮説の否定は ZFC から証明できない.

定理 4 (P. コーエン，1964 (昭和 39) 年). ZFC が無矛盾なら，連続体仮説は ZFC から証明できない.

したがって，連続体仮説は ZFC の公理系から 独立 である.

- 現代では，いくつかの ZFC の自然な拡張から，実数の全体の濃度と自然数の全体の濃度の間にちょうど一つだけこれらと別の濃度がある という主張が証明できることが知られていて，研究者の中には，これが "正しい" 状況だろうと考えている人も少なくない.

連続体仮説

連続体仮説. 実数の全体（連続体）の濃度は，自然数全体の濃度の次の無限の大きさである.

- 連続体仮説は，20 世紀の後半になって，次のような，驚くべき解決が与えられた:

定理 3 (K. ゲーデル，1940 (昭和 15) 年). ZFC が無矛盾なら，連続体仮説の否定は ZFC から証明できない.

定理 4 (P. コーエン，1964 (昭和 39) 年). ZFC が無矛盾なら，連続体仮説は ZFC から証明できない.

したがって，連続体仮説は ZFC の公理系から 独立 である.

- 現代では，いくつかの ZFC の自然な拡張から，実数の全体の濃度と自然数の全体の濃度の間にちょうど一つだけこれらと別の濃度がある という主張が証明できることが知られていて，研究者の中には，これが “正しい” 状況だろうと考えている人も少なくない.

現代の集合論の研究

- 連続体仮説の ZFC からの独立は，証明の技術としては第１不完全性定理とは直接の関係はないが，このような独立な命題が存在する，ということは第１不完全性定理がなければ，誰も予想できなかったのではないかと思われる．

- 集合論は現代も活発に研究されている．特に前のスライドのゲーデルやコーエンの仕事で開発された手法の改良や発展の結果，たいへんに洗練された数学的技法を駆使する研究分野になっている．

- 神戸大学の集合論グループは現代の集合論の研究の世界での研究のい拠点の１つである．

現代の集合論の研究

- 連続体仮説の ZFC からの独立は，証明の技術としては第１不完全性定理とは直接の関係はないが，このような独立な命題が存在する，ということは第１不完全性定理がなければ，誰も予想できなかったのではないかと思われる．
- 集合論は現代も活発に研究されている．特に前のスライドのゲーデルやコーエンの仕事で開発された手法の改良や発展の結果，たいへんに洗練された数学的技法を駆使する研究分野になっている．
- 神戸大学の集合論グループは現代の集合論の研究の世界での研究のい拠点の１つである．

現代の集合論の研究

- 連続体仮説の ZFC からの独立は，証明の技術としては第１不完全性定理とは直接の関係はないが，このような独立な命題が存在する，ということは第１不完全性定理がなければ，誰も予想できなかったのではないかと思われる．
- 集合論は現代も活発に研究されている．特に前のスライドのゲーデルやコーエンの仕事で開発された手法の改良や発展の結果，たいへんに洗練された数学的技法を駆使する研究分野になっている．
- 神戸大学の集合論グループは現代の集合論の研究の世界での研究のい拠点の１つである．

現代の集合論の研究

- 連続体仮説の ZFC からの独立は，証明の技術としては第１不完全性定理とは直接の関係はないが，このような独立な命題が存在する，ということは第１不完全性定理がなければ，誰も予想できなかったのではないかと思われる．
- 集合論は現代も活発に研究されている．特に前のスライドのゲーデルやコーエンの仕事で開発された手法の改良や発展の結果，たいへんに洗練された数学的技法を駆使する研究分野になっている．
- 神戸大学の集合論グループは現代の集合論の研究の世界での研究のい拠点の１つである．

2012 年 1 月 神戸–ウィーン二国間セミナー (D2 倉橋 太志君の講演)
自然科学研究棟 3 号館 渕野グループ・プレゼンテーション室にて

2012 年 1 月 神戸–ウィーン二国間セミナー (Brendle 先生の講演)

2012 年 1 月 神戸–ウィーン二国間セミナー
(ウィーン工科大 Goldstern 先生の講演)

2012 年 1 月 神戸–ウィーン二国間セミナー

第１不完全性定理の証明

- 集合論については，たとえば連続体仮説が，ZFC から独立であることが示せたが，不完全性定理は，ZFC を含む PA を拡張するすべての理論についてこのような独立な命題が存在することを示すものになっている．
- 次回に第１不完全性定理の証明について見てみることにする．この証明では,「嘘吐きのパラドックス」に対応する主張を PA を拡張する理論の文として書くことができて，この文がこの理論から証明できず，この文の否定も証明できないことを示すことでなされる．
- 次は,「嘘つきのパラドックス」のタイプのパラドックスの１つである:

この枠の中に書いてあることは嘘だ．

第１不完全性定理の証明

- 集合論については，たとえば連続体仮説が，ZFC から独立であることが示せたが，不完全性定理は，ZFC を含む PA を拡張するすべての理論についてこのような独立な命題が存在することを示すものになっている．

- 次回に第１不完全性定理の証明について見てみることにする．この証明では,「嘘吐きのパラドックス」に対応する主張を PA を拡張する理論の文として書くことができて，この文がこの理論から証明できず，この文の否定も証明できないことを示すことでなされる．

- 次は,「嘘つきのパラドックス」のタイプのパラドックスの１つである:

この枠の中に書いてあることは嘘だ.

第１不完全性定理の証明

- 集合論については，たとえば連続体仮説が，ZFC から独立であることが示せたが，不完全性定理は，ZFC を含む PA を拡張するすべての理論についてこのような独立な命題が存在することを示すものになっている．
- 次回に第１不完全性定理の証明について見てみることにする．この証明では,「嘘吐きのパラドックス」に対応する主張を PA を拡張する理論の文として書くことができて，この文がこの理論から証明できず，この文の否定も証明できないことを示すことでなされる．
- 次は,「嘘つきのパラドックス」のタイプのパラドックスの１つである:

$$\boxed{\text{この枠の中に書いてあることは嘘だ．}}$$

第１不完全性定理の証明

- 集合論については，たとえば連続体仮説が，ZFC から独立であることが示せたが，不完全性定理は，ZFC を含む PA を拡張するすべての理論についてこのような独立な命題が存在することを示すものになっている．
- 次回に第１不完全性定理の証明について見てみることにする．この証明では,「嘘吐きのパラドックス」に対応する主張を PA を拡張する理論の文として書くことができて，この文がこの理論から証明できず，この文の否定も証明できないことを示すことでなされる．
- 次は,「嘘つきのパラドックス」のタイプのパラドックスの１つである:

この枠の中に書いてあることは嘘だ．

第１不完全性定理の証明

- 集合論については，たとえば連続体仮説が，ZFC から独立であることが示せたが，不完全性定理は，ZFC を含む PA を拡張するすべての理論についてこのような独立な命題が存在することを示すものになっている．
- 次回に第１不完全性定理の証明について見てみることにする．この証明では,「嘘吐きのパラドックス」に対応する主張を PA を拡張する理論の文として書くことができて，この文がこの理論から証明できず，この文の否定も証明できないことを示すことでなされる．
- 次は,「嘘つきのパラドックス」のタイプのパラドックスの１つである:

この枠の中に書いてあることは嘘だ．

第１不完全性定理の証明

- 集合論については，たとえば連続体仮説が，ZFC から独立であることが示せたが，不完全性定理は，ZFC を含む PA を拡張するすべての理論についてこのような独立な命題が存在することを示すものになっている．

- 次回に第１不完全性定理の証明について見てみることにする．この証明では,「嘘吐きのパラドックス」に対応する主張を PA を拡張する理論の文として書くことができて，この文がこの理論から証明できず，この文の否定も証明できないことを示すことでなされる．

- 次は,「嘘つきのパラドックス」のタイプのパラドックスの１つである:

この枠の中に書いてあることは嘘だ．