数理の世界 (数学の考え方) — ゲーデルの不完全性定理

自己言及の逆理と第１不完全性定理の証明， (第 XII 回の講義)

Sakaé Fuchino (渕野 昌)

Dept. of Computer Sciences
Kobe University
(神戸大学大学院 システム情報学研究科)

http://kurt.scitec.kobe-u.ac.jp/~fuchino/

講義関連資料: http://kurt.scitec.kobe-u.ac.jp/~fuchino/kobe/

(7. Januar 2013 (13:11 JST) version)

神戸大学 2012 年後期の講義
於 K302 教室， 月曜 8:50 – 10:20

January 7, 2013

This presentation is typeset by pLATEX with beamer class.

嘘つきのパラドックス

- 集合論では，たとえば連続体仮説が，ZFC から独立であることが示されている．
- 連続体仮説は，第１不完全性定理の証明で与えられる独立な命題に比べて自然な数学的な命題だが，一方，第１不完全性定理 は，ZFC だけでなく，PA を拡張するすべての (具体的な) 理論で，独立命題が存在することを主張している．
- 以下で第１不完全性定理の証明のアウトラインを見る． この証明では，PA を拡張する理論 T では,「嘘吐きのバラドックス」に対応する主張を文として書くことができて，この文が，T 証明できず，文の否定も証明できないことを示す．
- 次は,「嘘つきのバラドックス」のタイプのパラドックスの１つである:

$$\boxed{\text{この枠の中に書いてあることは嘘だ．}}$$

嘘つきのパラドックス

- 集合論では，たとえば連続体仮説が，ZFC から独立であることが示されている．
- 連続体仮説は，第１不完全性定理の証明で与えられる独立な命題に比べて自然な数学的な命題だが，一方，第１不完全性定理 は，ZFC だけでなく，PA を拡張するすべての (具体的な) 理論で，独立命題が存在することを主張している．
- 以下で第１不完全性定理の証明のアウトラインを見る． この証明では，PA を拡張する理論 T では,「嘘吐きのパラドックス」に対応する主張を文として書くことができて，この文が，T 証明できず，文の否定も証明できないことを示す．
- 次は,「嘘つきのパラドックス」のタイプのパラドックスの１つである:

$$\boxed{\text{この枠の中に書いてあることは嘘だ．}}$$

嘘つきのパラドックス

- 集合論では，たとえば連続体仮説が，ZFC から独立であることが示されている．
- 連続体仮説は，第 1 不完全性定理の証明で与えられる独立な命題に比べて自然な数学的な命題だが，一方，第 1 不完全性定理 は，ZFC だけでなく，PA を拡張するすべての (具体的な) 理論で，独立命題が存在することを主張している．
- 以下で第 1 不完全性定理の証明のアウトラインを見る．この証明では，PA を拡張する理論 T では,「嘘吐きのパラドックス」に対応する主張を文として書くことができて，この文が，T 証明できず，文の否定も証明できないことを示す．
- 次は,「嘘つきのパラドックス」のタイプのパラドックスの 1 つである:

$$\boxed{\text{この枠の中に書いてあることは嘘だ.}}$$

嘘つきのパラドックス

- 集合論では，たとえば連続体仮説が， ZFC から独立であることが示されている．
- 連続体仮説は，第 1 不完全性定理の証明で与えられる独立な命題に比べて自然な数学的な命題だが，一方，第 1 不完全性定理 は，ZFC だけでなく， PA を拡張するすべての (具体的な) 理論で，独立命題が存在することを主張している．
- 以下で第 1 不完全性定理の証明のアウトラインを見る． この証明では，PA を拡張する理論 T では,「嘘吐きのパラドックス」に対応する主張を文として書くことができて，この文が， T 証明できず，文の否定も証明できないことを示す．
- 次は,「嘘つきのパラドックス」のタイプのパラドックスの 1 つである:

$$\boxed{\text{この枠の中に書いてあることは嘘だ.}}$$

嘘つきのパラドックス

- 集合論では，たとえば連続体仮説が，ZFC から独立であることが示されている．
- 連続体仮説は，第 1 不完全性定理の証明で与えられる独立な命題に比べて自然な数学的な命題だが，一方，第 1 不完全性定理 は，ZFC だけでなく，PA を拡張するすべての (具体的な) 理論で，独立命題が存在することを主張している．
- 以下で第 1 不完全性定理の証明のアウトラインを見る． この証明では，PA を拡張する理論 T では,「嘘吐きのバラドックス」に対応する主張を文として書くことができて，この文が，T 証明できず，文の否定も証明できないことを示す.
- 次は,「嘘つきのバラドックス」のタイプのパラドックスの 1 つである:

$$\boxed{\text{この枠の中に書いてあることは嘘だ.}}$$

嘘つきのパラドックス

- 集合論では，たとえば連続体仮説が， ZFC から独立であることが示されている．
- 連続体仮説は，第 1 不完全性定理の証明で与えられる独立な命題に比べて自然な数学的な命題だが，一方，第 1 不完全性定理 は，ZFC だけでなく， PA を拡張するすべての (具体的な) 理論で，独立命題が存在することを主張している．
- 以下で第 1 不完全性定理の証明のアウトラインを見る． この証明では，PA を拡張する理論 T では,「嘘吐きのパラドックス」に対応する主張を文として書くことができて，この文が， T 証明できず，文の否定も証明できないことを示す．
- 次は,「嘘つきのパラドックス」のタイプのパラドックスの 1 つである:

$$\boxed{\text{この枠の中に書いてあることは嘘だ.}}$$

嘘つきのパラドックス

- 集合論では，たとえば連続体仮説が，ZFC から独立であることが示されている．
- 連続体仮説は，第 1 不完全性定理の証明で与えられる独立な命題に比べて自然な数学的な命題だが，一方，第 1 不完全性定理 は，ZFC だけでなく，PA を拡張するすべての (具体的な) 理論で，独立命題が存在することを主張している．
- 以下で第 1 不完全性定理の証明のアウトラインを見る． この証明では，PA を拡張する理論 T では,「嘘吐きのバラドックス」に対応する主張を文として書くことができて，この文が，T 証明できず，文の否定も証明できないことを示す.
- 次は,「嘘つきのバラドックス」のタイプのパラドックスの 1 つである:

この枠の中に書いてあることは嘘だ.

嘘つきのパラドックス (2/3)

この枠の中に書いてあることは嘘だ.

- もし上の枠の中に書いてあることが本当なら，そこに書いてあることから，上の枠の中に書いてあることは嘘になってしまい，矛盾である.
- もし上の枠の中に書いてあることが嘘なら，上の枠の中に書いてあることは本当のこととなってしまい，やはり矛盾である.
- この矛盾を回避するための 1 つの解釈は，上の枠に書いてあることは，嘘か本当かの判定のできないような種類のものになっている，と考えることである.
- この文が嘘か本当かの判定のできないような種類のものになっている，ことの理由は，この文が自分自身のことに言及しているためである，と考えられる.
- そこでこのような文は **自己言及的** (self-referential) な文である，と言うことがある.

嘘つきのパラドックス (2/3)

この枠の中に書いてあることは嘘だ．

- もし上の枠の中に書いてあることが本当なら，そこに書いてあることから，上の枠の中に書いてあることは嘘になってしまい，矛盾である．
- もし上の枠の中に書いてあることが嘘なら，上の枠の中に書いてあることは本当のこととなってしまい，やはり矛盾である．
- この矛盾を回避するための１つの解釈は，上の枠に書いてあることは，嘘か本当かの判定のできないような種類のものになっている，と考えることである．
- この文が嘘か本当かの判定のできないような種類のものになっている，ことの理由は，この文が自分自身のことに言及しているためである，と考えられる．
- そこでこのような文は **自己言及的** (self-referential) な文である，と言うことがある．

嘘つきのパラドックス (2/3)

この枠の中に書いてあることは嘘だ.

- もし上の枠の中に書いてあることが本当なら，そこに書いてあることから，上の枠の中に書いてあることは嘘になってしまい，矛盾である.
- もし上の枠の中に書いてあることが嘘なら，上の枠の中に書いてあることは本当のこととなってしまい，やはり矛盾である.
- この矛盾を回避するための 1 つの解釈は，上の枠に書いてあることは，嘘か本当かの判定のできないような種類のものになっている，と考えることである.
- この文が嘘か本当かの判定のできないような種類のものになっている，ことの理由は，この文が自分自身のことに言及しているためである，と考えられる.
- そこでこのような文は **自己言及的** (self-referential) な文である，と言うことがある.

嘘つきのパラドックス (2/3)

この枠の中に書いてあることは嘘だ.

- もし上の枠の中に書いてあることが本当なら，そこに書いてあることから，上の枠の中に書いてあることは嘘になってしまい，矛盾である.
- もし上の枠の中に書いてあることが嘘なら，上の枠の中に書いてあることは本当のこととなってしまい，やはり矛盾である.
- この矛盾を回避するための 1 つの解釈は，上の枠に書いてあることは，嘘か本当かの判定のできないような種類のものになっている，と考えることである.
- この文が嘘か本当かの判定のできないような種類のものになっている，ことの理由は，この文が自分自身のことに言及しているためである，と考えられる.
- そこでこのような文は **自己言及的** (self-referential) な文である，と言うことがある.

嘘つきのパラドックス (2/3)

この枠の中に書いてあることは嘘だ.

- もし上の枠の中に書いてあることが本当なら，そこに書いてあることから，上の枠の中に書いてあることは嘘になってしまい，矛盾である.
- もし上の枠の中に書いてあることが嘘なら，上の枠の中に書いてあることは本当のこととなってしまい，やはり矛盾である.
- この矛盾を回避するための 1 つの解釈は，上の枠に書いてあることは，嘘か本当かの判定のできないような種類のものになっている，と考えることである.
- この文が嘘か本当かの判定のできないような種類のものになっている，ことの理由は，この文が自分自身のことに言及しているためである，と考えられる.
- そこでこのような文は **自己言及的** (self-referential) な文である，と言うことがある.

嘘つきのパラドックス (2/3)

この枠の中に書いてあることは嘘だ.

- もし上の枠の中に書いてあることが本当なら，そこに書いてあることから，上の枠の中に書いてあることは嘘になってしまい，矛盾である.
- もし上の枠の中に書いてあることが嘘なら，上の枠の中に書いてあることは本当のこととなってしまい，やはり矛盾である.
- この矛盾を回避するための 1 つの解釈は，上の枠に書いてあることは，嘘か本当かの判定のできないような種類のものになっている，と考えることである.
- この文が嘘か本当かの判定のできないような種類のものになっている，ことの理由は，この文が自分自身のことに言及しているためである，と考えられる.
- そこでこのような文は **自己言及的** (self-referential) な文である，と言うことがある.

嘘つきのパラドックス (3/3)

- 嘘つきのパラドックスの原形は **エピメニデスのパラドックス** とよばれる紀元前 6 世紀ごろのギリシャの哲学者の名前を冠した次のようなものである．
  - 「クレタ島の預言者は嘘をつく」 という発言を考えてみる．
- この発言をクレタ島の預言者以外の人が言ったとすれば，それは真偽の判定のつけられる普通の主張である．
- しかし，もしこの主張をクレタ島の預言者自身が言ったとすると，前の例と同じようなパラドクシカルな状況が生じてしまう．
- 第 1 不完全性定理の証明では，PA を含む具体的に与えられた無矛盾な理論 T では，この嘘つきの発言のような自己言及的な命題を作ることができて，その自己言及性から，この命題は T から証明できないし，この命題の否定も T から証明できないことが示される．

嘘つきのパラドックス (3/3)

- 嘘つきのパラドックスの原形は **エピメニデスのパラドックス**とよばれる紀元前 6 世紀ごろのギリシャの哲学者の名前を冠した次のようなものである．
    - 「クレタ島の預言者は嘘をつく」 という発言を考えてみる．
- この発言をクレタ島の預言者以外の人が言ったとすれば，それは真偽の判定のつけられる普通の主張である．
- しかし，もしこの主張をクレタ島の預言者自身が言ったとすると，前の例と同じようなパラドクシカルな状況が生じてしまう．
- 第 1 不完全性定理の証明では，PA を含む具体的に与えられた無矛盾な理論 T では，この嘘つきの発言のような自己言及的な命題を作ることができて，その自己言及性から，この命題は T から証明できないし，この命題の否定も T から証明できないことが示される．

嘘つきのパラドックス (3/3)

- 嘘つきのパラドックスの原形は **エピメニデスのパラドックス** とよばれる紀元前 6 世紀ごろのギリシャの哲学者の名前を冠した次のようなものである.
  - 「クレタ島の預言者は嘘をつく」 という発言を考えてみる.
- この発言をクレタ島の預言者以外の人が言ったとすれば，それは真偽の判定のつけられる普通の主張である.
- しかし，もしこの主張をクレタ島の預言者自身が言ったとすると，前の例と同じようなパラドクシカルな状況が生じてしまう.
- 第 1 不完全性定理の証明では，PA を含む具体的に与えられた無矛盾な理論 T では，この嘘つきの発言のような自己言及的な命題を作ることができて，その自己言及性から，この命題は T から証明できないし，この命題の否定も T から証明できないことが示される.

嘘つきのパラドックス (3/3)

- 嘘つきのパラドックスの原形は **エピメニデスのパラドックス** とよばれる紀元前 6 世紀ごろのギリシャの哲学者の名前を冠した次のようなものである.
  - 「クレタ島の預言者は嘘をつく」 という発言を考えてみる.
- この発言をクレタ島の預言者以外の人が言ったとすれば, それは真偽の判定のつけられる普通の主張である.
- しかし, もしこの主張をクレタ島の預言者自身が言ったとすると, 前の例と同じようなパラドクシカルな状況が生じてしまう.
- 第 1 不完全性定理の証明では, PA を含む具体的に与えられた無矛盾な理論 T では, この嘘つきの発言のような自己言及的な命題を作ることができて, その自己言及性から, この命題は T から証明できないし, この命題の否定も T から証明できないことが示される.

嘘つきのパラドックス (3/3)

- 嘘つきのパラドックスの原形は **エピメニデスのパラドックス** とよばれる紀元前 6 世紀ごろのギリシャの哲学者の名前を冠した次のようなものである.
  - 「クレタ島の預言者は嘘をつく」という発言を考えてみる.
- この発言をクレタ島の預言者以外の人が言ったとすれば，それは真偽の判定のつけられる普通の主張である.
- しかし，もしこの主張をクレタ島の預言者自身が言ったとすると，前の例と同じようなパラドクシカルな状況が生じてしまう.
- 第 1 不完全性定理の証明では，PA を含む具体的に与えられた無矛盾な理論 T では，この嘘つきの発言のような自己言及的な命題を作ることができて，その自己言及性から，この命題は T から証明できないし，この命題の否定も T から証明できないことが示される.

嘘つきのパラドックス (3/3)

- 嘘つきのパラドックスの原形は **エピメニデスのパラドックス**とよばれる紀元前 6 世紀ごろのギリシャの哲学者の名前を冠した次のようなものである.
  - 「クレタ島の預言者は嘘をつく」 という発言を考えてみる.
- この発言をクレタ島の預言者以外の人が言ったとすれば，それは真偽の判定のつけられる普通の主張である.
- しかし，もしこの主張をクレタ島の預言者自身が言ったとすると，前の例と同じようなパラドクシカルな状況が生じてしまう.
- 第 1 不完全性定理の証明では，PA を含む具体的に与えられた無矛盾な理論 T では，この嘘つきの発言のような自己言及的な命題を作ることができて，その自己言及性から，この命題は T から証明できないし，この命題の否定も T から証明できないことが示される.

第１不完全性定理の証明のスケッチ (1/3)

- 論理式 (これは記号列である) や証明 (これは記号列の列である) を数にコードする方法を導入する (子細は次回見ることにする).
- コンピュータでは，プログラムやテキストなどがすべて数にコードされて保存されたり処理されたりしているが，ここでは，それと同じようなことを自然数論の中で行なう.

  実際には，順序は逆で，1940 年代にフォン・ノイマンがコンピュータの基本設計を考えたときに，ゲーデルの不完全性定理での記号論理の数へのコード化がこの設計でのアイデアの源になった.

論理式 φ に対し，それをコードする数 (の表記) を $\ulcorner\varphi\urcorner$ と書くことにする．同様に証明 P に対し，それをコードする数 (の表記) を $\ulcorner P\urcorner$ と書くことにする.

第１不完全性定理の証明のスケッチ (1/3)

- 論理式 (これは記号列である) や証明 (これは記号列の列である) を数にコードする方法を導入する (子細は次回見ることにする).

  - コンピュータでは，プログラムやテキストなどがすべて数にコードされて保存されたり処理されたりしているが，ここでは，それと同じようなことを自然数論の中で行なう.

  実際には，順序は逆で，1940 年代にフォン・ノイマンがコンピュータの基本設計を考えたときに，ゲーデルの不完全性定理での記号論理の数へのコード化がこの設計でのアイデアの源になった.

論理式 φ に対し，それをコードする数 (の表記) を $\ulcorner\varphi\urcorner$ と書くことにする．同様に証明 P に対し，それをコードする数 (の表記) を $\ulcorner P\urcorner$ と書くことにする.

第１不完全性定理の証明のスケッチ (1/3)

- 論理式 (これは記号列である) や証明 (これは記号列の列である) を数にコードする方法を導入する (子細は次回見ることにする).
  - コンピュータでは，プログラムやテキストなどがすべて数にコードされて保存されたり処理されたりしているが，ここでは，それと同じようなことを自然数論の中で行なう.

  実際には，順序は逆で，1940 年代にフォン・ノイマンがコンピュータの基本設計を考えたときに，ゲーデルの不完全性定理での記号論理の数へのコード化がこの設計でのアイデアの源になった.

論理式 φ に対し，それをコードする数 (の表記) を $\ulcorner\varphi\urcorner$ と書くことにする．同様に証明 P に対し，それをコードする数 (の表記) を $\ulcorner P\urcorner$ と書くことにする.

第１不完全性定理の証明のスケッチ (1/3)

- 論理式 (これは記号列である) や証明 (これは記号列の列である) を数にコードする方法を導入する (子細は次回見ることにする).

- コンピュータでは，プログラムやテキストなどがすべて数にコードされて保存されたり処理されたりしているが，ここでは，それと同じようなことを自然数論の中で行なう.

  実際には，順序は逆で，1940 年代にフォン・ノイマンがコンピュータの基本設計を考えたときに，ゲーデルの不完全性定理での記号論理の数へのコード化がこの設計でのアイデアの源になった.

論理式 φ に対し，それをコードする数 (の表記) を $\ulcorner\varphi\urcorner$ と書くことにする．同様に証明 P に対し，それをコードする数 (の表記) を $\ulcorner P\urcorner$ と書くことにする.

第１不完全性定理の証明のスケッチ (1/3)

- 論理式 (これは記号列である) や証明 (これは記号列の列である) を数にコードする方法を導入する (子細は次回見ることにする).

  - コンピュータでは，プログラムやテキストなどがすべて数にコードされて保存されたり処理されたりしているが，ここでは，それと同じようなことを自然数論の中で行なう.

    実際には，順序は逆で，1940 年代にフォン・ノイマンがコンピュータの基本設計を考えたときに，ゲーデルの不完全性定理での記号論理の数へのコード化がこの設計でのアイデアの源になった.

> 論理式 φ に対し，それをコードする数 (の表記) を $\ulcorner\varphi\urcorner$ と書くことにする．同様に証明 P に対し，それをコードする数 (の表記) を $\ulcorner P\urcorner$ と書くことにする.

第１不完全性定理の証明のスケッチ (2/3)

論理式 φ に対し，それをコードする数 (の表記) を $\ulcorner\varphi\urcorner$ と書くことにする．同様に，証明 P に対し，それをコードする数 (の表記) を $\ulcorner P\urcorner$ と書くことにする．

- 理論 T で，

  $$T \vdash proof_T(\ulcorner P\urcorner, \ulcorner\varphi\urcorner) \quad \Leftrightarrow \quad P \text{ は } \varphi \text{ の } T \text{ での証明である}$$

  が成り立つような論理式 $proof_T(\cdot,\cdot)$ が作れる．
- $\exists x\ proof_T(x, \ulcorner\varphi\urcorner)$ を $prov_T(\ulcorner\varphi\urcorner)$ と書くことにする．
  - $prov_T(\ulcorner\varphi\urcorner)$ は φ が証明可能なことを主張していると解釈できる．ただし，具体的な証明が見つかる保証を与えているわけではないことに注意．
- (Diagonal Lemma) 任意の T の言語での 1 変数の論理式 $\eta = \eta(x)$ に対し，$T \vdash \beta \leftrightarrow \eta(\ulcorner\beta\urcorner)$ となる論理式 β が存在する．(これについても，次回もう少し詳しくみることにする)

以上を用いると 第１不完全性定理 の証明ができる．

第１不完全性定理の証明のスケッチ (2/3)

論理式 φ に対し，それをコードする数 (の表記) を $\ulcorner\varphi\urcorner$ と書くことにする．同様に，証明 P に対し，それをコードする数 (の表記) を $\ulcorner P\urcorner$ と書くことにする．

- 理論 T で，

  $T \vdash proof_T(\ulcorner P\urcorner, \ulcorner\varphi\urcorner) \quad \Leftrightarrow \quad P$ は φ の T での証明である

  が成り立つような論理式 $proof_T(\cdot, \cdot)$ が作れる．
- $\exists x\ proof_T(x, \ulcorner\varphi\urcorner)$ を $prov_T(\ulcorner\varphi\urcorner)$ と書くことにする．
  - $prov_T(\ulcorner\varphi\urcorner)$ は φ が証明可能なことを主張していると解釈できる．ただし，具体的な証明が見つかる保証を与えているわけではないことに注意．
- (Diagonal Lemma) 任意の T の言語での 1 変数の論理式 $\eta = \eta(x)$ に対し，$T \vdash \beta \leftrightarrow \eta(\ulcorner\beta\urcorner)$ となる論理式 β が存在する．(これについても，次回もう少し詳しくみることにする)

以上を用いると 第１不完全性定理 の証明ができる．

第１不完全性定理の証明のスケッチ (2/3)

論理式 φ に対し，それをコードする数 (の表記) を $\ulcorner\varphi\urcorner$ と書くことにする．同様に，証明 P に対し，それをコードする数 (の表記) を $\ulcorner P\urcorner$ と書くことにする．

- 理論 T で，

  $T \vdash \mathit{proof}_T(\ulcorner P\urcorner, \ulcorner\varphi\urcorner) \quad \Leftrightarrow \quad P$ は φ の T での証明である

  が成り立つような論理式 $\mathit{proof}_T(\cdot,\cdot)$ が作れる．

- $\exists x\ \mathit{proof}_T(x, \ulcorner\varphi\urcorner)$ を $\mathit{prov}_T(\ulcorner\varphi\urcorner)$ と書くことにする．
  - $\mathit{prov}_T(\ulcorner\varphi\urcorner)$ は φ が証明可能なことを主張していると解釈できる．ただし，具体的な証明が見つかる保証を与えているわけではないことに注意．

- (Diagonal Lemma) 任意の T の言語での 1 変数の論理式 $\eta = \eta(x)$ に対し，$T \vdash \beta \leftrightarrow \eta(\ulcorner\beta\urcorner)$ となる論理式 β が存在する．(これについても，次回もう少し詳しくみることにする)

以上を用いると 第１不完全性定理 の証明ができる．

第１不完全性定理の証明のスケッチ (2/3)

論理式 φ に対し，それをコードする数 (の表記) を $\ulcorner\varphi\urcorner$ と書くことにする．同様に，証明 P に対し，それをコードする数 (の表記) を $\ulcorner P\urcorner$ と書くことにする．

- 理論 T で，

  $$T \vdash \mathit{proof}_T(\ulcorner P\urcorner, \ulcorner\varphi\urcorner) \quad \Leftrightarrow \quad P \text{ は } \varphi \text{ の } T \text{ での証明である}$$

  が成り立つような論理式 $\mathit{proof}_T(\cdot,\cdot)$ が作れる．
- $\exists x\ \mathit{proof}_T(x, \ulcorner\varphi\urcorner)$ を $\mathit{prov}_T(\ulcorner\varphi\urcorner)$ と書くことにする．
- $\mathit{prov}_T(\ulcorner\varphi\urcorner)$ は φ が証明可能なことを主張していると解釈できる．ただし，具体的な証明が見つかる保証を与えているわけではないことに注意．
- (Diagonal Lemma) 任意の T の言語での 1 変数の論理式 $\eta = \eta(x)$ に対し，$T \vdash \beta \leftrightarrow \eta(\ulcorner\beta\urcorner)$ となる論理式 β が存在する．(これについても，次回もう少し詳しくみることにする)

以上を用いると 第１不完全性定理 の証明ができる．

第１不完全性定理の証明のスケッチ (2/3)

論理式 φ に対し，それをコードする数 (の表記) を $\ulcorner\varphi\urcorner$ と書くことにする．同様に，証明 P に対し，それをコードする数 (の表記) を $\ulcorner P\urcorner$ と書くことにする．

- 理論 T で，

  $T \vdash proof_T(\ulcorner P\urcorner, \ulcorner\varphi\urcorner) \quad \Leftrightarrow \quad P$ は φ の T での証明である

  が成り立つような論理式 $proof_T(\cdot,\cdot)$ が作れる．
- $\exists x\ proof_T(x, \ulcorner\varphi\urcorner)$ を $prov_T(\ulcorner\varphi\urcorner)$ と書くことにする．
- $prov_T(\ulcorner\varphi\urcorner)$ は φ が証明可能なことを主張していると解釈できる．ただし，具体的な証明が見つかる保証を与えているわけではないことに注意．
- (Diagonal Lemma) 任意の T の言語での 1 変数の論理式 $\eta = \eta(x)$ に対し，$T \vdash \beta \leftrightarrow \eta(\ulcorner\beta\urcorner)$ となる論理式 β が存在する．(これについても，次回もう少し詳しくみることにする)

以上を用いると 第１不完全性定理 の証明ができる．

第１不完全性定理の証明のスケッチ (2/3)

論理式 φ に対し，それをコードする数 (の表記) を $\ulcorner\varphi\urcorner$ と書くことにする．同様に，証明 P に対し，それをコードする数 (の表記) を $\ulcorner P\urcorner$ と書くことにする．

- 理論 T で，

  $$T \vdash proof_T(\ulcorner P\urcorner, \ulcorner\varphi\urcorner) \quad \Leftrightarrow \quad P \text{ は } \varphi \text{ の } T \text{ での証明である}$$

  が成り立つような論理式 $proof_T(\cdot,\cdot)$ が作れる．
- $\exists x\ proof_T(x, \ulcorner\varphi\urcorner)$ を $prov_T(\ulcorner\varphi\urcorner)$ と書くことにする．
  - $prov_T(\ulcorner\varphi\urcorner)$ は φ が証明可能なことを主張していると解釈できる．ただし，具体的な証明が見つかる保証を与えているわけではないことに注意．
- (Diagonal Lemma) 任意の T の言語での 1 変数の論理式 $\eta = \eta(x)$ に対し，$T \vdash \beta \leftrightarrow \eta(\ulcorner\beta\urcorner)$ となる論理式 β が存在する．(これについても，次回もう少し詳しくみることにする)

以上を用いると 第１不完全性定理 の証明ができる．

第１不完全性定理の証明のスケッチ (3/3)

- Diagonal Lemma を用いて
  (*) $T \vdash \beta \leftrightarrow \neg prov_T(\ulcorner\beta\urcorner)$
  となるような論理式 β をとる.

- この β は，直観的には，自分が T で証明できないことを主張するようなものになっている.

- $T \vdash \beta$ でない: もし $T \vdash \beta$ だとすると，$T \vdash^P \beta$ となる証明 P がとれるが，このとき，$T \vdash proof_T(\ulcorner P\urcorner, \ulcorner\beta\urcorner)$ だから，$T \vdash prov_T(\ulcorner\beta\urcorner)$ である．一方 (*) から $T \vdash \neg prov_T(\ulcorner\beta\urcorner)$ となるから，T は矛盾することが示せてまい，T は無矛盾であるという仮定に矛盾である.

- $T \vdash \neg\beta$ でない: もし $T \vdash \neg\beta$ なら，(*) から，$T \vdash prov_T(\ulcorner\beta\urcorner)$ である．一方，T は無矛盾だから，β の T からの証明は存在しないので，すべての数 (数表記) m に対し，$T \nvdash proof_T(m, \ulcorner\beta\urcorner)$ となる．したがって，$T \nvdash \exists m\, proof_T(m, \ulcorner\beta\urcorner)$ である (ここで T の “強い意味の無矛盾性” が用いられている).
  つまり，$T \nvdash proof_T(\ulcorner\beta\urcorner)$ である.

第１不完全性定理の証明のスケッチ (3/3)

- Diagonal Lemma を用いて
  (*) $T \vdash \beta \leftrightarrow \neg prov_T(\ulcorner \beta \urcorner)$
  となるような論理式 β をとる．
- この β は，直観的には，自分が T で証明できないことを主張するようなものになっている．
- $T \vdash \beta$ でない: もし $T \vdash \beta$ だとすると，$T \vdash^P \beta$ となる証明 P がとれるが，このとき，$T \vdash proof_T(\ulcorner P \urcorner, \ulcorner \beta \urcorner)$ だから，$T \vdash prov_T(\ulcorner \beta \urcorner)$ である．一方 (*) から $T \vdash \neg prov_T(\ulcorner \beta \urcorner)$ となるから，T は矛盾することが示せてまい，T は無矛盾であるという仮定に矛盾である．
- $T \vdash \neg\beta$ でない: もし $T \vdash \neg\beta$ なら，(*) から，$T \vdash prov_T(\ulcorner \beta \urcorner)$ である．一方，T は無矛盾だから，β の T からの証明は存在しないので，すべての数 (数表記) m に対し，$T \nvdash proof_T(m, \ulcorner \beta \urcorner)$ となる．したがって，$T \nvdash \exists m\ proof_T(m, \ulcorner \beta \urcorner)$ である (ここで T の "強い意味の無矛盾性" が用いられている)．
  つまり，$T \nvdash proof_T(\ulcorner \beta \urcorner)$ である．

第１不完全性定理の証明のスケッチ (3/3)

- Diagonal Lemma を用いて
  (*) $T \vdash \beta \leftrightarrow \neg prov_T(\ulcorner\beta\urcorner)$
  となるような論理式 β をとる.
- この β は，直観的には，自分が T で証明できないことを主張するようなものになっている.
- $T \vdash \beta$ でない: もし $T \vdash \beta$ だとすると，$T \vdash^P \beta$ となる証明 P がとれるが，このとき，$T \vdash proof_T(\ulcorner P\urcorner, \ulcorner\beta\urcorner)$ だから，$T \vdash prov_T(\ulcorner\beta\urcorner)$ である．一方 (*) から $T \vdash \neg prov_T(\ulcorner\beta\urcorner)$ となるから，T は矛盾することが示せてまい，T は無矛盾であるという仮定に矛盾である.
- $T \vdash \neg\beta$ でない: もし $T \vdash \neg\beta$ なら，(*) から，$T \vdash prov_T(\ulcorner\beta\urcorner)$ である．一方，T は無矛盾だから，β の T からの証明は存在しないので，すべての数 (数表記) m に対し，$T \nvdash proof_T(m, \ulcorner\beta\urcorner)$ となる．したがって，$T \nvdash \exists m\ proof_T(m, \ulcorner\beta\urcorner)$ である (ここで T の “強い意味の無矛盾性” が用いられている).
  つまり，$T \nvdash proof_T(\ulcorner\beta\urcorner)$ である.

第１不完全性定理の証明のスケッチ (3/3)

- Diagonal Lemma を用いて
  (*) $T \vdash \beta \leftrightarrow \neg prov_T(\ulcorner\beta\urcorner)$
  となるような論理式 β をとる．
- この β は，直観的には，自分が T で証明できないことを主張するようなものになっている．
- $T \vdash \beta$ でない: もし $T \vdash \beta$ だとすると，$T \vdash^P \beta$ となる証明 P がとれるが，このとき，$T \vdash proof_T(\ulcorner P\urcorner,\ulcorner\beta\urcorner)$ だから，$T \vdash prov_T(\ulcorner\beta\urcorner)$ である．一方 (*) から $T \vdash \neg prov_T(\ulcorner\beta\urcorner)$ となるから，T は矛盾することが示せてまい，T は無矛盾であるという仮定に矛盾である．
- $T \vdash \neg\beta$ でない: もし $T \vdash \neg\beta$ なら，(*) から，$T \vdash prov_T(\ulcorner\beta\urcorner)$ である．一方，T は無矛盾だから，β の T からの証明は存在しないので，すべての数 (数表記) m に対し，$T \not\vdash proof_T(m,\ulcorner\beta\urcorner)$ となる．したがって，$T \not\vdash \exists m\ proof_T(m,\ulcorner\beta\urcorner)$ である (ここで T の "強い意味の無矛盾性" が用いられている).
  つまり，$T \not\vdash proof_T(\ulcorner\beta\urcorner)$ である．

第１不完全性定理の証明のスケッチ (3/3)

- Diagonal Lemma を用いて
  (*) $T \vdash \beta \leftrightarrow \neg prov_T(\ulcorner\beta\urcorner)$
  となるような論理式 β をとる.
  - この β は，直観的には，自分が T で証明できないことを主張するようなものになっている.
- $T \vdash \beta$ でない: もし $T \vdash \beta$ だとすると， $T \vdash^P \beta$ となる証明 P がとれるが，このとき，$T \vdash proof_T(\ulcorner P\urcorner, \ulcorner\beta\urcorner)$ だから，$T \vdash prov_T(\ulcorner\beta\urcorner)$ である．一方 (*) から $T \vdash \neg prov_T(\ulcorner\beta\urcorner)$ となるから， T は矛盾することが示せてまい， T は無矛盾であるという仮定に矛盾である.
- $T \vdash \neg\beta$ でない: もし $T \vdash \neg\beta$ なら，(*) から， $T \vdash prov_T(\ulcorner\beta\urcorner)$ である．一方， T は無矛盾だから， β の T からの証明は存在しないので，すべての数 (数表記) m に対し， $T \nvdash proof_T(m, \ulcorner\beta\urcorner)$ となる．したがって， $T \nvdash \exists m\ proof_T(m, \ulcorner\beta\urcorner)$ である (ここで T の "強い意味の無矛盾性" が用いられている).
  つまり， $T \nvdash proof_T(\ulcorner\beta\urcorner)$ である.

第１不完全性定理の証明のスケッチ (3/3)

- Diagonal Lemma を用いて

  (*) $T \vdash \beta \leftrightarrow \neg prov_T(\ulcorner \beta \urcorner)$

  となるような論理式 β をとる.

- この β は，直観的には，自分が T で証明できないことを主張するようなものになっている.

- $T \vdash \beta$ でない: もし $T \vdash \beta$ だとすると，$T \vdash^P \beta$ となる証明 P がとれるが，このとき，$T \vdash proof_T(\ulcorner P \urcorner, \ulcorner \beta \urcorner)$ だから，$T \vdash prov_T(\ulcorner \beta \urcorner)$ である．一方 (*) から $T \vdash \neg prov_T(\ulcorner \beta \urcorner)$ となるから，T は矛盾することが示せてまい，T は無矛盾であるという仮定に矛盾である.

- $T \vdash \neg\beta$ でない: もし $T \vdash \neg\beta$ なら，(*) から，$T \vdash prov_T(\ulcorner \beta \urcorner)$ である．一方，T は無矛盾だから，β の T からの証明は存在しないので，すべての数 (数表記) m に対し，$T \nvdash proof_T(m, \ulcorner \beta \urcorner)$ となる．したがって，$T \nvdash \exists m\ proof_T(m, \ulcorner \beta \urcorner)$ である (ここで T の“強い意味の無矛盾性” が用いられている).

  つまり，$T \nvdash proof_T(\ulcorner \beta \urcorner)$ である.

第１不完全性定理の証明のスケッチ (3/3)

- Diagonal Lemma を用いて
  (*) $T \vdash \beta \leftrightarrow \neg prov_T(\ulcorner\beta\urcorner)$
  となるような論理式 β をとる.
- この β は，直観的には，自分が T で証明できないことを主張するようなものになっている.
- $T \vdash \beta$ でない: もし $T \vdash \beta$ だとすると， $T \vdash^P \beta$ となる証明 P がとれるが，このとき，$T \vdash proof_T(\ulcorner P\urcorner,\ulcorner\beta\urcorner)$ だから，$T \vdash prov_T(\ulcorner\beta\urcorner)$ である．一方 (*) から $T \vdash \neg prov_T(\ulcorner\beta\urcorner)$ となるから， T は矛盾することが示せてまい， T は無矛盾であるという仮定に矛盾である.
- $T \vdash \neg\beta$ でない: もし $T \vdash \neg\beta$ なら，(*) から， $T \vdash prov_T(\ulcorner\beta\urcorner)$ である．一方， T は無矛盾だから， β の T からの証明は存在しないので，すべての数 (数表記) m に対し， $T \nvdash proof_T(m,\ulcorner\beta\urcorner)$ となる．したがって， $T \nvdash \exists m\ proof_T(m,\ulcorner\beta\urcorner)$ である (ここで T の“強い意味の無矛盾性” が用いられている).
  つまり， $T \nvdash proof_T(\ulcorner\beta\urcorner)$ である.

第１不完全性定理の証明のスケッチ (3/3)

- Diagonal Lemma を用いて
  (*) $T \vdash \beta \leftrightarrow \neg prov_T(\ulcorner\beta\urcorner)$
  となるような論理式 β をとる．
- この β は，直観的には，自分が T で証明できないことを主張するようなものになっている．
- $T \vdash \beta$ でない: もし $T \vdash \beta$ だとすると，$T \vdash^P \beta$ となる証明 P がとれるが，このとき，$T \vdash proof_T(\ulcorner P\urcorner,\ulcorner\beta\urcorner)$ だから，$T \vdash prov_T(\ulcorner\beta\urcorner)$ である．一方 (*) から $T \vdash \neg prov_T(\ulcorner\beta\urcorner)$ となるから，T は矛盾することが示せてまい，T は無矛盾であるという仮定に矛盾である．
- $T \vdash \neg\beta$ でない: もし $T \vdash \neg\beta$ なら，(*) から，$T \vdash prov_T(\ulcorner\beta\urcorner)$ である．一方，T は無矛盾だから，β の T からの証明は存在しないので，すべての数 (数表記) m に対し，$T \nvdash proof_T(m,\ulcorner\beta\urcorner)$ となる．したがって，$T \nvdash \exists m\ proof_T(m,\ulcorner\beta\urcorner)$ である (ここで T の "強い意味の無矛盾性" が用いられている).
  つまり，$T \nvdash proof_T(\ulcorner\beta\urcorner)$ である．

第１不完全性定理の証明のスケッチ (3/3)

- Diagonal Lemma を用いて
  (*) $T \vdash \beta \leftrightarrow \neg prov_T(\ulcorner \beta \urcorner)$
  となるような論理式 β をとる.

- この β は, 直観的には, 自分が T で証明できないことを主張するようなものになっている.

- $T \vdash \beta$ でない: もし $T \vdash \beta$ だとすると, $T \vdash^P \beta$ となる証明 P がとれるが, このとき, $T \vdash proof_T(\ulcorner P \urcorner, \ulcorner \beta \urcorner)$ だから, $T \vdash prov_T(\ulcorner \beta \urcorner)$ である. 一方 (*) から $T \vdash \neg prov_T(\ulcorner \beta \urcorner)$ となるから, T は矛盾することが示せてまい, T は無矛盾であるという仮定に矛盾である.

- $T \vdash \neg\beta$ でない: もし $T \vdash \neg\beta$ なら, (*) から, $T \vdash prov_T(\ulcorner \beta \urcorner)$ である. 一方, T は無矛盾だから, β の T からの証明は存在しないので, すべての数 (数表記) m に対し, $T \nvdash proof_T(m, \ulcorner \beta \urcorner)$ となる. したがって, $T \nvdash \exists m\ proof_T(m, \ulcorner \beta \urcorner)$ である (ここで T の "強い意味の無矛盾性" が用いられている).
  つまり, $T \nvdash proof_T(\ulcorner \beta \urcorner)$ である.

第1不完全性定理の証明のスケッチ (3/3)

- Diagonal Lemma を用いて
  (*) $T \vdash \beta \leftrightarrow \neg prov_T(\ulcorner\beta\urcorner)$
  となるような論理式 β をとる.
- この β は，直観的には，自分が T で証明できないことを主張するようなものになっている.
- $T \vdash \beta$ でない: もし $T \vdash \beta$ だとすると，$T \vdash^P \beta$ となる証明 P がとれるが，このとき，$T \vdash proof_T(\ulcorner P\urcorner, \ulcorner\beta\urcorner)$ だから，$T \vdash prov_T(\ulcorner\beta\urcorner)$ である．一方 (*) から $T \vdash \neg prov_T(\ulcorner\beta\urcorner)$ となるから，T は矛盾することが示せてまい，T は無矛盾であるという仮定に矛盾である.
- $T \vdash \neg\beta$ でない: もし $T \vdash \neg\beta$ なら，(*) から，$T \vdash prov_T(\ulcorner\beta\urcorner)$ である．一方，T は無矛盾だから，β の T からの証明は存在しないので，すべての数 (数表記) m に対し，$T \nvdash proof_T(m, \ulcorner\beta\urcorner)$ となる．したがって，$T \nvdash \exists m\ proof_T(m, \ulcorner\beta\urcorner)$ である (ここで T の “強い意味の無矛盾性” が用いられている).
  つまり，$T \nvdash proof_T(\ulcorner\beta\urcorner)$ である.

第１不完全性定理の証明のスケッチ (3/3)

- Diagonal Lemma を用いて
  (*) $T \vdash \beta \leftrightarrow \neg prov_T(\ulcorner \beta \urcorner)$
  となるような論理式 β をとる．
  - この β は，直観的には，自分が T で証明できないことを主張するようなものになっている．
- $T \vdash \beta$ でない: もし $T \vdash \beta$ だとすると，$T \vdash^P \beta$ となる証明 P がとれるが，このとき，$T \vdash proof_T(\ulcorner P \urcorner, \ulcorner \beta \urcorner)$ だから，$T \vdash prov_T(\ulcorner \beta \urcorner)$ である．一方 (*) から $T \vdash \neg prov_T(\ulcorner \beta \urcorner)$ となるから，T は矛盾することが示せてまい，T は無矛盾であるという仮定に矛盾である．
- $T \vdash \neg\beta$ でない: もし $T \vdash \neg\beta$ なら，(*) から，$T \vdash prov_T(\ulcorner \beta \urcorner)$ である．一方，T は無矛盾だから，β の T からの証明は存在しないので，すべての数 (数表記) m に対し，$T \nvdash proof_T(m, \ulcorner \beta \urcorner)$ となる．したがって，$T \nvdash \exists m\ proof_T(m, \ulcorner \beta \urcorner)$ である (ここで T の "強い意味の無矛盾性" が用いられている)．
  つまり，$T \nvdash proof_T(\ulcorner \beta \urcorner)$ である．

このスライドで説明したことは全部嘘である.

- 上の文章は，自己言及的ではあるが，矛盾しない.
  - もし，この文が本当だとすると，このスライドで説明したことは全部嘘なので，特にこの文も嘘となってしまい矛盾である．したがってこの文は本当ではありえない.
  - しかし，この文が嘘だとしたときには，必ずしも問題は起きない．もしこの文が嘘なら，このスライドで説明したことは全部は嘘でないことになるが，そのことは,「このスライドで説明したことは全部嘘である」というこの表明が嘘であることとは抵触しないからである:
  - ただし，もし，この文章以外のスライドで説明したことが全部嘘なら,「嘘つきのパラドックス」が成立してしまう．もしこの文も嘘なら，この文が言っていることは本当になってしまうからである.
- 上の結論として，この「このスライドで説明したことは全部嘘である」という主張が真偽の判定のできないようなパラドクシカルなものになっていることと，このスライドの，この部分以外で説明したことが全部嘘であることは同値になることがわかる.

このスライドで説明したことは全部嘘である.

- 上の文章は，自己言及的ではあるが，矛盾しない.
- もし，この文が本当だとすると，このスライドで説明したことは全部嘘なので，特にこの文も嘘となってしまい矛盾である．したがっての文は本当ではありえない.
- しかし，この文が嘘だとしたときには，必ずしも問題は起きない．もしこの文が嘘なら，このスライドで説明したことは全部は嘘でないことになるが，そのことは,「このスライドで説明したことは全部嘘である」というこの表明が嘘であることとは抵触しないからである:
- ただし，もし，この文章以外のスライドで説明したことが全部嘘なら,「嘘つきのパラドックス」が成立してしまう．もしこの文も嘘なら，この文が言っていることは本当になってしまうからである.
- 上の結論として，この「このスライドで説明したことは全部嘘である」という主張が真偽の判定のできないようなパラドクシカルなものになっていることと，このスライドの，この部分以外で説明したことが全部嘘であることは同値になることがわかる.

このスライドで説明したことは全部嘘である.

- 上の文章は，自己言及的ではあるが，矛盾しない.
  - もし，この文が本当だとすると，このスライドで説明したことは全部嘘なので，特にこの文も嘘となってしまい矛盾である．したがっての文は本当ではありえない.
  - しかし，この文が嘘だとしたときには，必ずしも問題は起きない．もしこの文が嘘なら，このスライドで説明したことは全部は嘘でないことになるが，そのことは,「このスライドで説明したことは全部嘘である」というこの表明が嘘であることとは抵触しないからである:
  - ただし，もし，この文章以外のスライドで説明したことが全部嘘なら,「嘘つきのパラドックス」が成立してしまう．もしこの文も嘘なら，この文が言っていることは本当になってしまうからである.
- 上の結論として，この「このスライドで説明したことは全部嘘である」という主張が真偽の判定のできないようなパラドクシカルなものになっていることと，このスライドの，この部分以外で説明したことが全部嘘であることは同値になることがわかる.

このスライドで説明したことは全部嘘である．

- ▶ 上の文章は，自己言及的ではあるが，矛盾しない．
- ▷ もし，この文が本当だとすると，このスライドで説明したことは全部嘘なので，特にこの文も嘘となってしまい矛盾である．したがってこの文は本当ではありえない．
- ▷ しかし，この文が嘘だとしたときには，必ずしも問題は起きない．もしこの文が嘘なら，このスライドで説明したことは全部は嘘でないことになるが，そのことは,「このスライドで説明したことは全部嘘である」というこの表明が嘘であることとは抵触しないからである:
- ▷ ただし，もし，この文章以外のスライドで説明したことが全部嘘なら,「嘘つきのパラドックス」が成立してしまう．もしこの文も嘘なら，この文が言っていることは本当になってしまうからである．
- ▶ 上の結論として，この「このスライドで説明したことは全部嘘である」という主張が真偽の判定のできないようなパラドクシカルなものになっていることと，このスライドの，この部分以外で説明したことが全部嘘であることは同値になることがわかる．

このスライドで説明したことは全部嘘である.

- 上の文章は，自己言及的ではあるが，矛盾しない.
  - もし，この文が本当だとすると，このスライドで説明したことは全部嘘なので，特にこの文も嘘となってしまい矛盾である．したがっての文は本当ではありえない.
  - しかし，この文が嘘だとしたときには，必ずしも問題は起きない．もしこの文が嘘なら，このスライドで説明したことは全部は嘘でないことになるが，そのことは,「このスライドで説明したことは全部嘘である」というこの表明が嘘であることとは抵触しないからである:
  - ただし，もし，この文章以外のスライドで説明したことが全部嘘なら,「嘘つきのパラドックス」が成立してしまう．もしこの文も嘘なら，この文が言っていることは本当になってしまうからである.
- 上の結論として，この「このスライドで説明したことは全部嘘である」という主張が真偽の判定のできないようなパラドクシカルなものになっていることと，このスライドの，この部分以外で説明したことが全部嘘であることは同値になることがわかる.

このスライドで説明したことは全部嘘である．

- 上の文章は，自己言及的ではあるが，矛盾しない．
  - もし，この文が本当だとすると，このスライドで説明したことは全部嘘なので，特にこの文も嘘となってしまい矛盾である．したがっての文は本当ではありえない．
  - しかし，この文が嘘だとしたときには，必ずしも問題は起きない．もしこの文が嘘なら，このスライドで説明したことは全部は嘘でないことになるが，そのことは,「このスライドで説明したことは全部嘘である」というこの表明が嘘であることとは抵触しないからである:
  - ただし，もし，この文章以外のスライドで説明したことが全部嘘なら,「嘘つきのパラドックス」が成立してしまう．もしこの文も嘘なら，この文が言っていることは本当になってしまうからである．
- 上の結論として，この「このスライドで説明したことは全部嘘である」という主張が真偽の判定のできないようなパラドクシカルなものになっていることと，このスライドの，この部分以外で説明したことが全部嘘であることは同値になることがわかる．

このスライドで説明したことは全部嘘である．

- 上の文章は，自己言及的ではあるが，矛盾しない．
  - もし，この文が本当だとすると，このスライドで説明したことは全部嘘なので，特にこの文も嘘となってしまい矛盾である．したがってこの文は本当ではありえない．
  - しかし，この文が嘘だとしたときには，必ずしも問題は起きない．もしこの文が嘘なら，このスライドで説明したことは全部は嘘でないことになるが，そのことは,「このスライドで説明したことは全部嘘である」というこの表明が嘘であることとは抵触しないからである:
  - ただし，もし，この文章以外のスライドで説明したことが全部嘘なら,「嘘つきのパラドックス」が成立してしまう．もしこの文も嘘なら，この文が言っていることは本当になってしまうからである．
- 上の結論として，この「このスライドで説明したことは全部嘘である」という主張が真偽の判定のできないようなパラドクシカルなものになっていることと，このスライドの，この部分以外で説明したことが全部嘘であることは同値になることがわかる．

このスライドで説明したことは全部嘘である.

- 上の文章は，自己言及的ではあるが，矛盾しない.
  - もし，この文が本当だとすると，このスライドで説明したことは全部嘘なので，特にこの文も嘘となってしまい矛盾である．したがっての文は本当ではありえない.
  - しかし，この文が嘘だとしたときには，必ずしも問題は起きない．もしこの文が嘘なら，このスライドで説明したことは全部は嘘でないことになるが，そのことは,「このスライドで説明したことは全部嘘である」というこの表明が嘘であることとは抵触しないからである:
  - ただし，もし，この文章以外のスライドで説明したことが全部嘘なら,「嘘つきのパラドックス」が成立してしまう．もしこの文も嘘なら，この文が言っていることは本当になってしまうからである.
- 上の結論として，この「このスライドで説明したことは全部嘘である」という主張が真偽の判定のできないようなパラドクシカルなものになっていることと，このスライドの，この部分以外で説明したことが全部嘘であることは同値になることがわかる.

このスライドで説明したことは全部嘘である.

- 上の文章は, 自己言及的ではあるが, 矛盾しない.
  - もし, この文が本当だとすると, このスライドで説明したことは全部嘘なので, 特にこの文も嘘となってしまい矛盾である. したがってこの文は本当ではありえない.
  - しかし, この文が嘘だとしたときには, 必ずしも問題は起きない. もしこの文が嘘なら, このスライドで説明したことは全部は嘘でないことになるが, そのことは,「このスライドで説明したことは全部嘘である」というこの表明が嘘であることとは抵触しないからである:
  - ただし, もし, この文章以外のスライドで説明したことが全部嘘なら,「嘘つきのパラドックス」が成立してしまう. もしこの文も嘘なら, この文が言っていることは本当になってしまうからである.
- 上の結論として, この 「このスライドで説明したことは全部嘘である」という主張が真偽の判定のできないようなパラドクシカルなものになっていることと, このスライドの, この部分以外で説明したことが全部嘘であることは同値になることがわかる.

第１不完全性定理

ゲーデルの第１不完全性定理． T を PA を拡張する具体的に与えられた理論で，強い意味で無矛盾なものとする．このとき，T から証明できないし，その否定も T から証明できないような T の言語の文が必ず存在する．

- ゲーデルの第１不完全性定理のオリジナル版では ω- 無矛盾とよばれる “強い意味での無矛盾性” を T が持つことを仮定するものになっていた．これが具体的にはどういう仮定かは，第１不完全性定理の証明の中で明らかになる．
- この定理は前にも名前の出た Rosser によって “無矛盾” という仮定だけによるものに改良されている．

第１不完全性定理

ゲーデルの第１不完全性定理． T を PA を拡張する具体的に与えられた理論で，強い意味で無矛盾なものとする．このとき，T から証明できないし，その否定も T から証明できないような T の言語の文が必ず存在する．

- ゲーデルの第１不完全性定理のオリジナル版では ω- 無矛盾とよばれる"強い意味での無矛盾性"を T が持つことを仮定するものになっていた．これが具体的にはどういう仮定かは，第１不完全性定理の証明の中で明らかになる．
- この定理は前にも名前の出た Rosser によって"無矛盾"という仮定だけによるものに改良されている．

第１不完全性定理

ゲーデルの第１不完全性定理． T を PA を拡張する具体的に与えられた理論で，強い意味で無矛盾なものとする．このとき，T から証明できないし，その否定も T から証明できないような T の言語の文が必ず存在する．

- ゲーデルの第１不完全性定理のオリジナル版では ω- 無矛盾とよばれる "強い意味での無矛盾性" を T が持つことを仮定するものになっていた．これが具体的にはどういう仮定かは，第１不完全性定理の証明の中で明らかになる．
- この定理は前にも名前の出た Rosser によって "無矛盾" という仮定だけによるものに改良されている．