公理的集合論 — 成立の歴史

Historical Remarks on the Origin of the Axiomatic Set Theory

Sakaé Fuchino (渕野 昌)

Dept. of Computer Sciences
Kobe University
(神戸大学大学院 システム情報学研究科)

http://kurt.scitec.kobe-u.ac.jp/~fuchino/

(5. Juni 2013 (09:09 JST) version)

2013 年前期 情報基礎特論での講義

June 3, 2013

This presentation is typeset by pLATEX with beamer class.

Background of the choice of the subject

- 公理的集合論は，全数学を展開する (数学的な命題を記述する ＋ 証明を体系内で形式的な記号列の操作として行なう) ことのできる唯一の形式的体系である．数学の証明 (の実行あるいは検証) をコンピュータに実装する試みのためには，少なくともこの形式的体系を知っている必要があるだろう．(cf.: isabell)
- 公理的集合論の初期の研究をした人の何人かと，コンピュータ科学に大きな貢献をした何人かの人は一致する．(John von Neumann, Kurt Gödel, etc.)
- 私は，最近,「ちくま学芸文庫」に 19 世紀から 20 世紀初頭の集合論に関連する文献の翻訳を含む本を書いたり，フォン・ノイマンの集合論に関する貢献についての 記事 を「現代思想」誌に書いたりした．この執筆のため原典にあたって歴史について調べた．

Beginning of the Set Theory

集合論 (Set Theory) は **カントル Georg Cantor** (1845(弘化 2) — 1918(大正 7)) によって創造された．様々な数学的な対象の集まり (集合, sets) について研究する分野である． 特に無限集合 (infinite sets) の性質が研究の中心的な課題となる．

定理 (G. Cantor, 1873(明治 6)). 実数の全体 (real numbers) は自然数 (natural numbers) を使って並べ尽すことができない.

証明. もし例えば以下のように並べあげられたとする:

$$
\begin{aligned}
r_1 &= \quad 2.4161073825503356\cdots\\
r_2 &= -562.4328358208955225\cdots\\
r_3 &= \quad 1.9462686567164178\cdots\\
r_4 &= \quad 0.00117822429\\
r_5 &= \ -1.5490801\\
&\ \ \vdots \qquad\quad \vdots
\end{aligned}
$$

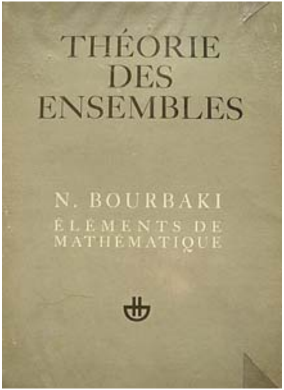
上の赤くマークした場所の数字 $+1$ (ただし数字が 8 のときだけは -1 とする) を, "0." に繋げて並べて, $0.54727\cdots$ とすれば, この数は上のリストには含まれないものになる. これは矛盾である. (対角線論法, diagonal argument) □

カントルは, この定理を 1873 年の 12 月 7 日に得ているが, これが集合論の始まった日である, と考えられることもある.

Classical mathematics in Set Theory

デデキント Richard Dedekind (1831(天保 2) — 1916(大正 5)) は，2 つのモノグラフ „Stetigkeit und irrationale Zahlen“ (連続性と無理数，1972(明治 5))，„Was sind und was sollen die Zahlen“ (数とは何かそして何であるべきか，1893(明治 26)) で，古典的な数学の，集合論での厳密な基礎付けを与えた．

Modern mathematics in Set Theory



フランスの数学者集団 **ブルバキ Bourbaki** は， 1930 年代の終り (昭和初期) に初版の出版された教科書全集 Élements de Mathémtatique (数学原論，1939 —) で，集合論の上に，現代的な数学が統一的に展開できる，ということの認識を広めた．(構造主義, structuralism はブルバキに端を発する)

Full mathematics in Set Theory

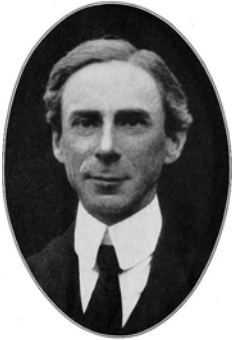
以下で述べるツェルメロの公理系をフレンケルが拡張したものに選択公理 (Axiom of Choice) を加えた体系 (**ZFC**) では,
カントルの超限順序数 (transfinite ordinal numbers) の理論も含む 全数学 が展開できる.

フレンケル, Abraham Fraenkel
1891(明治 24) — 1965(昭和 40)
写真は 1940 年代のもの

超限順序数の理論については,
Jörg Brendle 先生の講義も
参照.

Crisis of Mathematics

- 19 世紀末から 20 世紀初めにかけて，集合論の上に数学の確固とした基礎付けができることが明かになってきたが，同時に集合論の矛盾を示すように思われる結果が次々と発見された．Bertrand Russell が 1901(明治 34) 年に発見した Russell's Paradox と呼ばれるものもその 1 つである．



ラッセル Bertrand Russell (1872(明治 5) — 1970(昭和 45))
写真は 1916(大正 5) 年頃のもの

Russell's Paradox

集合論の基本的な考え方の 1 つに，ある条件を満たす数学的な対象 (mathematical objects) をすべて集めたものを，新しい数学的な対象と考えることができる，というものがある．次の Russell's Paradox はこの考え方を無制限に使うと矛盾が生じてしまうことを示している．

- 自分自身を要素に持たない集合の全体からなる集合を R とあらわすことにする (現代の記号では，$R = \{x : x \notin x\}$)
- もし R が R 自身の要素なら，R は R の要素の満たすべき性質 "$x \notin x$" を満たさないのだから R の要素でなくなってしまい矛盾である．
- もし R が R 自身の要素でないなら，R は R の要素の満たすべき性質 "$x \notin x$" を満たしているのだから，R の要素になってしまい矛盾である．

Axiomatization

- ツェルメロ (Ernst Zermelo) は，1908 年の論文で，集合論の公理を設定して，どのような操作で集合を作ってよいのかを規定することで，知られている矛盾を回避して，しかもカントル (Cantor) の集合論での結果 (の一部) をこの公理系の中で再構成できることを確認している．

ツェルメロ，Ernst Zermelo (1871(明治 4) — 1953(昭和 28))
写真は 1907(明治 40) 年のもの

Zermelo's Axioms of Set Theory

- ツェルメロ (Zermelo) の集合論の公理系 (system of axioms) は, 以下のような主張からなる:

Axiom I. (Extensionality) For any sets x and y, we have $x = y$ if they have the same elements.

Axiom II. (Empty Set) There is a set x such that no u is an element of x.

Axiom III. (Pairing) For any x, y there is a set u which contains exactly x and y as elements.

$\vdots$

Axiom VII. (Separation) For any set u and any definite property $\varphi(x)$ about the set x there is a set v which exactly consists of elements of u satisfying $\varphi(x)$ (notation: $v = \{x \in u : \varphi(x)\}$)

Compare Axiom VII with the argument in Russell's paradox.

Remaining problems with Zermelo's axioms

Axiom VII. (Separation) For any set u and any definite property $\varphi(x)$ about the set x there is a set v which exactly consists of elements of u satisfying $\varphi(x)$ (notation: $v = \{x \in u : \varphi(x)\}$)

Problem A. It is not clear what the "definite property" in Axiom VII exactly are.

Problem B. The theory of the transfinite ordinals as G. Cantor developed in his research of set theory cannot be fully realized in this axiom system.

Actually Zermelo could not give a method to treat the theory of transfinite ordinals in his axiomatic system in the 1908 paper.

Problem C. Is this system of axioms consistent?

Solution of Problem B

Problem B. The theory of the transfinite ordinals as G. Cantor developed in his research of set theory cannot be fully realized in this axiom system.

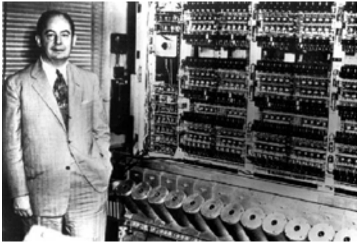
Actually Zermelo could not give a method to treat the theory of transfinite ordinals in his axiomatic system in the 1908 paper.

- Problem B can be solved by replacing the Axiom of Separation by the stronger Axiom of Replacement:

Axiom IX. (Axiom of Replacement) If $\varphi(x, y)$ is a definite property s.t. for any x there is the unique y s.t. $\varphi(x, y)$ then for any given set u there is a set of the form:
$\{y : \varphi(x, y) \text{ for some } x \in u\}$.

Axiom of Replacement and transfinite ordinals

- The Axiom of Replacement was introduced independently by **A. Fraenkel** and **Thoralf Skolem**. The axiom was also somewhat later introduced independently and used in its full strength by **J. von Neumann** to reformulate the theory of transfinite ordinals in the framework of axiomatic set theory.



The strict treatment of the transfinite ordinals in the framework of the axiomatic set theory was established in a paper which **John von Neumann** (1903 – 1957) wrote when he was 19 years old.

Two solutions of Problem A

Problem A. It is not clear what the "definite property" in Axiom of Separation or in Axiom of Replacement exactly are.

Von Neumann created a system of axioms which contains finite number of axioms giving an "algebraic" description of the definite properties. This axiom system is further simplified by **Paul Bernays** and **Kurt Gödel** and called now **Neumann-Bernays-Gödel Set Theory (NBG)**.

Fraenkel and Skolem solved the problem by formulating the axioms of Zermelo in the **first order predicate logic** in the way that "definite property" in the original formulation is simply replaced by "formula in the language of the logic". This axiom system extended by Replacement, Axiom of Choice and another axiom corresponding to an axiom von Neumann introduced for his system is called now **Zermelo-Fraenkel Set Theory with Axiom of Choice (ZFC)**.

ZFC and NBG are basically the same

- Today, it is known that the modern versions of Neumann-Bernays-Gödel Set Theory (NBG) and Zermelo-Fraenkel Set Theory (ZFC) are basically the same axiom systems.
- Now we usually use Zermelo-Fraenkel formalism as the base of set-theory.

Problem C is unsolvable

Problem C. Is the system of axioms ZFC consistent?

- Kurt Gödel proved that this question is unsolvable:

The Second Incompleteness Theorem. (1931) For any concretely given axiom system T which contains elementary number theory, the consistency of the system T cannot be proved in the system T itself as far as the system T is consistent.

- ZFC is concretely formulated and it does include number theory.
- Actually, as already mentioned, the whole mathematics can be carried out in ZFC. So if the consistency of ZFC is not provable in ZFC there cannot be any reasonable ground on which such consistency proof can be carried out!

Kurt Gödel

Kurt Gödel (1906 – 1978). A picture taken in 1926.

- Non-existence of consistency proof does not mean inconsistency!
- There are many partial results suggesting the consistency of ZFC.
- There are also may relative consistency results: For example, Gödel proved that if Zermelo-Fraenkel Set Theory without the Axiom of Choice is consistent then Zermelo-Fraenkel Set Theory with the Axiom of Choice is also consistent.

Professor Kikuchi (菊池 誠先生)'s lecture in this lecture series will treat more details about the Incompleteness Theorem.

この講演のスライドの最新版は,

http://kurt.scitec.kobe-u.ac.jp/~fuchino/kobe/jyohokiso-2013-history.pdf

としてダウンロードできます.

終