正規表現と Büchi の定理

Sakaé Fuchino (渕野 昌)

Graduate School of System Informatics
Kobe University
(神戸大学大学院 システム情報学研究科)

http://kurt.scitec.kobe-u.ac.jp/~fuchino/

情報基礎特論 2014 年前期講義

(6. März 2015 (19:12 JST) version)

June 13, 2014

This presentation is typeset by pLaTeX with beamer class.

正規表現と有限オートマトン

- 空でない記号の有限集合 (アルファベット) S に対し，S^* で S の記号の有限列の全体をあらわす．

定理 1. S をアルファベットとするとき，$L \subseteq S^*$ に対して次は同値である:

(a) ある正規表現 r に対し，
$L = L^*(r) = \{\sigma \in S^* : \sigma \text{ は } r \text{ にマッチする }\}$ となる．

(b) ある非決定的有限オートマトン A に対し，
$L = L^*(A) = \{\sigma \in S^* : A \text{ は } \sigma \text{ を受理する }\}$ となる．

(c) ある (決定的) 有限オートマトン A' に対し，
$L = L^*(A') = \{\sigma \in S^* : A' \text{ は } \sigma \text{ を受理する }\}$ となる．

- 上の定理の証明は，特に，(a) を満たすような σ が与えられたとき，それに対応する A を作り，A から A' を作るアルゴリズムを与えるものとなっている．

- この応用として，lex (flex) がある．

正規表現と有限オートマトン

- 空でない記号の有限集合 (アルファベット) S に対し，S^* で S の記号の有限列の全体をあらわす.

定理 1. S をアルファベットとするとき，$L \subseteq S^*$ に対して次は同値である:

(a) ある正規表現 r に対し，
$L = L^*(r) = \{\sigma \in S^* : \sigma$ は r にマッチする $\}$ となる.

(b) ある非決定的有限オートマトン A に対し，
$L = L^*(A) = \{\sigma \in S^* : A$ は σ を受理する $\}$ となる.

(c) ある (決定的) 有限オートマトン A' に対し，
$L = L^*(A')\{\sigma \in S^* : A'$ は σ を受理する $\}$ となる.

- S^* の要素を **語** (word) とよぶ. ▶ S^* の部分集合を **言語** とよぶ (この言葉の使い方は後出の論理での “言語” とは異る!).
- 言語 $L \subseteq S^*$ は上の定理の (a), (b), (c) (のどれか，またはすべて) を満たすとき，**正規言語** (正則言語 regular language) とよばれる.

有限構造としての語

- S をアルファベットとして，$\sigma \in S^*$ とするとき．$\sigma = s_0 \cdots s_{\ell-1}$ として，有限構造 (文字列構造) $\mathfrak{A}_\sigma$ を
$$\mathfrak{A}_\sigma = \langle \{0, \ldots, \ell-1\}, <^{\mathfrak{A}_\sigma}, {R_a}^{\mathfrak{A}_\sigma} \rangle_{a \in S}$$
のこととする． ただし $<^{\mathfrak{A}_\sigma}$ は数 $0, \ldots, \ell-1$ 上の通常の大小関係, ${R_a}^{\mathfrak{A}_\sigma}$ は $\{0, \ldots, \ell-1\}$ 上の 1 変数関係で,
$${R_a}^{\mathfrak{A}_\sigma}(k) \Leftrightarrow s_k = a$$
となるものとする．
- この構造の (述語論理の意味での) 言語 $\{<, R_a\}_{a \in S}$ を $\mathcal{L}_S$ とよぶことにする．
- 述語論理の $\mathcal{L}_S$ 文 φ に対し，$L^*(\varphi) = \{\sigma \in S^* : \mathfrak{A}_\sigma \models \varphi\}$ とする．

例 1． $S = \{a, b\}$ とする．φ を $\exists x \exists y\ ((x < y) \wedge R_a(x) \wedge R_b(y))$ とすると，$L^*(\varphi) = S^* a S^* b S^*$ である．

有限構造としての語

- S をアルファベットとして，$\sigma \in S^*$ とするとき．$\sigma = s_0 \cdots s_{\ell-1}$ として，有限構造 (文字列構造) $\mathfrak{A}_\sigma$ を
  $$\mathfrak{A}_\sigma = \langle \{0, \ldots, \ell-1\}, <^{\mathfrak{A}_\sigma}, {R_a}^{\mathfrak{A}_\sigma} \rangle_{a \in S}$$
  のこととする． ただし $<^{\mathfrak{A}_\sigma}$ は数 $0, \ldots, \ell-1$ 上の通常の大小関係，${R_a}^{\mathfrak{A}_\sigma}$ は $\{0, \ldots, \ell-1\}$ 上の 1 変数関係で，
  $${R_a}^{\mathfrak{A}_\sigma}(k) \Leftrightarrow s_k = a$$
  となるものとする．
- この構造の (述語論理の意味での) 言語 $\{<, R_a\}_{a \in S}$ を $\mathcal{L}_S$ とよぶことにする．
- 述語論理の $\mathcal{L}_S$ 文 φ に対し，$L^*(\varphi) = \{\sigma \in S^* : \mathfrak{A}_\sigma \models \varphi\}$ とする．

演習問題 1． $S = \{a, b\}$ とする． このとき，$L^*(\varphi) = (ab)^*$ となるような $\mathcal{L}_S$-文 φ を求めよ．

正規言語と述語論理

定理 2 (Bčhi の定理 (1960) の一部). S をアルファベットとして φ を述語論理の $\mathcal{L}_S$-文とするとき，$L^*(\varphi)$ は正規言語である．

Proof. φ の構成に関する帰納法による． □

命題 2. $S = \{a\}$ として，$(aa)^*$ は $L^*(\varphi)$ の形で表わせない．

Proof. 各自然数 k に対し，$\bar{a}_k = \underbrace{aa\cdots a}_{k\text{ 個}}$ に対応する文字列構造を $\mathfrak{A}_k$ とあらわすことにする．

- $\bar{a}_k \in (aa)^* \Leftrightarrow k$ は偶数 である．
- Eurenfeucht-Fraïsse の定理を応用すると，任意の自然数 n に対し十分に大きな k をとると すべての $k', k'' > k$ に対し，$\mathfrak{A}_{k'} \cong_{\Sigma^n} \mathfrak{A}_{k''}$ が成り立つ，ことが示せる．
- このことから，任意の $\mathcal{L}_S$-論理式 φ に対して $L^*(\varphi)$ が $(aa)^*$ と一致しないことがわかる． □

正規言語と述語論理

- 定理 2. と命題 3. から

  命題論理の文 φ により $L^*(\varphi)$ と表わせる言語の全体 $\subsetneq$ 正規言語の全体

  である．実は次が成り立つ:

> **定理 4. (McNaughton and Papert, 1977)** 言語 $L \subseteq S^*$ が述語論理の文 φ によって $L = L^*(\varphi)$ と表わせるのは，L が star-free な言語であるちょうどそのときである．

- アルファベット S に対する $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(S)$ が **star free な言語の全体**であるとは，　▷ $\emptyset, \{\not{b}\} \in \mathcal{F}$　▷ すべての $s \in S$ に対し，$\{s\} \in \mathcal{F}$

▷ $\mathcal{F}$ は (集合の) ブール演算に関して閉じている

▷ $L, L' \in \mathcal{F}$ なら $L \frown L' = \{\sigma \frown \sigma' : \sigma \in L, \sigma' \in L'\} \in \mathcal{F}$

  を満たすような最小の族となっていることである．

- $\mathcal{F}$ をある S に対する star free な言語の全体として，$L \in \mathcal{F}$ となるとき，L は **star free な言語** である，という．

正規言語と monadic な 2 階の論理

- 述語論理を以下のようにして拡張する:
- 新しい (2 階の monadic な) 変数記号 X, Y,... を用意しておく.
- $\mathcal{L}$-論理式の生成規則に次の規則を加える:
  - t が $\mathcal{L}$-項で X が 2 階の monadic な変数記号なら, $X(t)$ は論理式である.
  - φ が論理式で X が monadic な変数記号なら, $\exists X\,\varphi$, も論理式である.
- $\mathcal{L}$-構造 $\mathfrak{A} = \langle A, \ldots \rangle$ で, monadic な変数記号は A の部分集合と解釈する.
- $t = t(x_0, \ldots, x_{k-1})$ を $\mathcal{L}$-項として X を monadic な変数記号とするとき, $U \subseteq A$, $a_0, \ldots, a_{k-1} \in A$ として, $\mathfrak{A} \models X(t)[U, a_0, \ldots, a_{k-1}] \Leftrightarrow t^{\mathfrak{A}}(a_0, \ldots, a_{k-1}) \in U$ とする.
- $\mathfrak{A} \models \exists X \varphi(X, \ldots) \Leftrightarrow$ ある $U \subseteq A$ に対し, $\mathfrak{A} \models \varphi(U, \ldots)$ とする.

Büchi の定理

定理 5. (Büchi, 1960) 言語 $L \subseteq S^*$ が正規言語となるのは，monadic な 2 階論理の $\mathcal{L}_S$-文 φ で，$L = L^*(\varphi) = \{\sigma \in S^* : \mathfrak{A}_\sigma \models \varphi\}$ となるものがある丁度そのときである．

Proof. ▶ $L = L^*(\varphi)$ なら L は正規言語となることの証明は φ の構成に関する帰納法で示せる．

- ある決定性有限オートマトン A に対し，$L = L^*(A)$ となっているとして，$\mathfrak{s}_0, \ldots, \mathfrak{s}_\ell$ が A の内部状態のすべてで，$\mathfrak{s}_0$ が初期状態 $\mathfrak{s}_\ell$ が停止状態とする．
- monadic な 2 階算術の $\mathcal{L}_S$-文 φ を $\exists X_{\mathfrak{s}_0} \exists X_{\mathfrak{s}_1} \cdots \exists X_{\mathfrak{s}_\ell}\ (\cdots)$ とする．ただし，$(\cdots)$ はこの文を $\mathfrak{A}_\sigma$, $\sigma = s_0 \cdots s_{n-1}$ で解釈したとき，

  $X_{\mathfrak{s}_0}, \ldots, X_{\mathfrak{s}_\ell}$ は $\{0, \ldots, n-1\}$ の分割で，A を σ の上で走らせたとき $X_{\mathfrak{s}_k}(i)$ なら，A のヘッドが i 番目の記号に移動したときの内部状態は k で，$X_{\mathfrak{s}_0}(0)$, $X_{\mathfrak{s}_\ell}(n-1)$ である

  を表現するものとする．
- このとき，$L = L^*(\varphi)$ である． □

参考文献等

- Jean-Eric Pin, Logic on words, Bulletin of the European Association of Theoretical Computer Science 54 (1994), 145–165.

- 有限モデルを用いた $P \neq NP$ 問題へのアプローチも可能である．

- 理論コンピュータ科学の人類への貢献度に関する認識は文化圏で大きく異なる．たとえば，

  http://en.wikipedia.org/wiki/20th_century#Science_and_mathematics

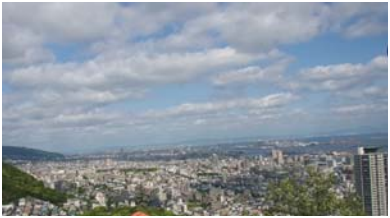
  http://ja.wikipedia.org/wiki/20%E4%B8%96%E7%B4%80#.E7.A7.91.E5.AD.A6.E3.83.BB.E6.8A.80.E8.A1.93

数学基礎論サマースクール 2014

テーマ: 集合論 (特に強制法 (forcing) 理論)

開催場所: 神戸大学 工学部 LR501教室

開催期間: 2014年 9月16日(火) ~ 2014年 9月19日(金)



日本数学会 数学基礎論および歴史分科会の補助を受けて毎夏開催されている **数学基礎論サマースクール** は，毎年ごとにテーマを決めて，数学基礎論 (数理論理学) の各研究分野での専門家の方を講師としてお招きして，入門的な内容から最新の話題までさまざまな講義をしていただいています．2014年度のテーマは **集合論** (特に**強制法理論**) です．

今回のサマースクールでは，以下の3人の講師により 1960年代以降，集合論の中心的な手法となっている強制法 (forcing) の入門のテュートリアルを行なう予定です．

数理論理学を研究／勉強している研究者／学生の方，数学の他の分野の研究者／学生で forcing を使ってみたいと思っていらっしゃる方，forcing のアイデアを自分の研究に生かしたいと思っていらっしゃる計算機科学など隣接分野の研究者／学生の方，現代的な集合論の意味を理解したいと思ってい

らっしゃる科学哲学の研究者／学生の方，趣味で集合論の勉強をされている方，など様々な背景を持った参加者を期待しています．

参加登録や参加費などはありませんが，参加者の概数を把握したいので，参加を希望される方は，9月18日(木) に予定している夕食会の参加希望も含めて，9月9日までに以下の email address まで連絡をお願いします．その他，本サマースクールに関する質問なども以下のメールアドレスにお願いします．

予定されている講師と講義内容 (タイトルはいずれも仮題)

薄葉 季路 (神戸大学): 強制法のための前提知識，強制法の応用
池上 大祐 (神戸大学): 強制法入門 (main tutorial)
渕野 昌 (神戸大学): 反復強制法入門

過去の数学基礎論サマースクール
過去の集合論をテーマとした数学基礎論サマースクール: 1997年 (写真集) 2002年 2007年
今年，日本で開かれる集合論関連のその他の会合: RIMS 集合論ワークショップ Workshop on Mathematical Logic 2014

数学基礎論サマースクール2014実行委員:
渕野 昌 (代表者: 神戸大学)，E-mail: fuchino(KA)diamond(P)kobe-u(P)ac(P)jp
("(KA)" and "(P)" are to be replaced by 'at sign' and 'dot' respectively)
酒井 拓史 (神戸大学)，薄葉 季路 (神戸大学)，依岡 輝幸 (静岡大学)

Last modified: Wed May 21 23:05:59 +0900 2014