数理論理学特論レポート

工学研究科 情報知能学専攻 倉橋 太志

定義 1. X : 集合, E : X 上の２項関係 とする.

1. E は X 上で *well-founded* $\overset{\text{def.}}{\iff} \forall Y \subseteq X[Y \neq \phi \to \exists y \in X(\neg \exists z \in X(zEy))]$.
2. $X_{E,x} := \{y \in X \mid yEx\}$.
3. E は X 上で *extensional* $\overset{\text{def.}}{\iff} \forall x, y \in X(x = y \iff X_{E,x} = X_{E,y})$.

問題

次の定理を証明せよ.

定理 2. モストフスキーの崩壊定理
X : 集合, E を X 上で well-founded かつ extensional な２項関係とする.
このとき, 推移的な集合 M と写像 f で

$$f : \langle X, E\rangle \xrightarrow{\cong} \langle M, \in\rangle$$

となるものが１意に存在する.

補題 3. X : 集合 , E : X 上の well-founded な２項関係 とすれば, X の元に関する任意の命題 $\varphi(x)$ に対して

$$\forall x \in X[\forall y \in X(yEx \to \varphi(y)) \to \varphi(x)] \to \forall x \in X(\varphi(x)).$$

証明. $\forall x \in X[\forall y \in X(yEx \to \varphi(y)) \to \varphi(x)]$ と仮定する. $Y = \{x \in X : \neg\varphi(x)\} \neq \phi$ ならば Y の E に関する極小元 x_0 が存在する. このとき仮定より $yEx_0 \wedge \neg\varphi(y)$ となる $y \in X$ が存在するため x_0 の極小性に矛盾する. □

補題 4. X, Y を集合, E を X 上で well-founded かつ extensional な２項関係とし, G を $\mathrm{dom}(G) = \{f : f$ は X の E に関する initial segment から Y への関数 $\}$ から Y への関数とする.
このとき関数 $F : X \longrightarrow Y$ で $\forall x \in X[F(x) = G(F \restriction X_{E,x})]$ となるものが１意に存在する.

証明. **１意性** $F, F' : X \longrightarrow Y$ ですべての $x \in X$ について $F(x) = G(F \restriction X_{E,x})$ かつ $F'(x) = G(F' \restriction X_{E,x})$ とする. $Z = \{x \in X : F(x) \neq F'(x)\} \neq \phi$ と仮定すると Z は E に関する極小元 x_0 をもつ. このとき

$$\begin{aligned} F(x_0) &= G(F \restriction X_{E,x_0}) \\ &= G(F' \restriction X_{E,x_0}) \\ &= F'(x_0) \end{aligned}$$

となり矛盾. よって $F = F'$ である.

存在 $x \in X$ に対して関数 f が x-近似である $\overset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow}$ $f : X_{E,x} \cup \{x\} \longrightarrow Y$ で $\forall yEx[f(y) = G(f \upharpoonright X_{E,y})]$ かつ $f(x) = G(f \upharpoonright X_{E,x})$.

$\mathcal{F} := \{f \mid \exists x \in X \text{ s.t. } f$ は x-近似 $\}$ とし，$F := \bigcup \mathcal{F}$ とする．

- F は関数である．

  $f, g \in \mathcal{F}$ がそれぞれ x, x'-近似のとき，一意性の証明と同様にして任意の $y \in (X_{E,x} \cup \{x\}) \cap (X_{E,x'} \cup \{x'\})$ に対して $f(y) = g(y)$ がいえるため F は関数である．

- $\mathrm{dom}(F) = X$ である．

  任意の $x \in X$ に対して x-近似 $f \in \mathcal{F}$ が存在することを補題 3 を用いて示す．

  x を固定し，yEx となるすべての $y \in X$ に対して y-近似 $f_y \in \mathcal{F}$ が存在すると仮定する．このとき $g := \bigcup \{f_y \mid y \in X_{E,x}\}$ とし $f := g \cup \{\langle x, G(g)\rangle\}$ とすれば，$\mathrm{dom}(f) = X_{E,x} \cup \{x\}$ で仮定より $\forall yEx[f(y) = f_y(y) = G(f_y \upharpoonright X_{E,y}) = G(f \upharpoonright X_{E,y})]$ となり，$f(x) = G(g) = G(f \upharpoonright X_{E,x})$ となるため f は x-近似である．したがって補題 3 より任意の $x \in X$ に対して x-近似 $f \in \mathcal{F}$ が存在する．

- $\forall X[F(x) = G(F \upharpoonright X_{E,x})]$.

  $\mathrm{dom}(F) = X$ より，任意の x に対して $x \in \mathrm{dom}(f)$ となる $f \in \mathcal{F}$ が存在する．このとき

$$\begin{aligned} F(x) &= f(x) \\ &= G(f \upharpoonright X_{E,x}) \\ &= G(F \upharpoonright X_{E,x}) \end{aligned}$$

したがってこの F が求めるものである．

□

定理 2 の証明. X を集合，E を X 上の well-founded かつ extensional な 2 項関係とする．

補題 4 により，すべての $x \in X$ に対して

$$F(x) := \{F(y) \mid y \in X_{E,x}\}$$

となる関数 F がとれる．これは，$G(x) = \{y \ : \ y \in \mathrm{ran}(x)\}$ に対して補題 4 を適用して

$$F(x) = G(F \upharpoonright X_{E,x})$$

となるものをとればよい．$M := \mathrm{ran}(F)$ とする．

- **F は $1-1$.**

  そうでないと仮定すると，$\{x \in X \ : \ \exists y \in X(x \neq y \wedge F(x) = F(y))\} \neq \phi$ なので E に関する極小元 x_0 が存在し，$x_0 \neq y_0$ で $F(x_0) = F(y_0)$ となる $y_0 \in X$ がとれる．E は X 上で extensional なので $X_{E,x_0} \neq X_{E,y_0}$ であり，したがって $zEx_0 \wedge \neg zEy_0$ または $\neg zEx_0 \wedge zEy_0$ となる $z \in X$ が存在する．$zEx_0 \wedge \neg zEy_0$ ならば, F の定義により $F(z) \in F(x_0) = F(y_0)$ なので $F(w) = F(z)$ となる wEy_0 が存在する．しかしこのとき $z \neq w$ なので x_0 の極小性に矛盾する．$\neg zEx_0 \wedge zEy_0$ のときも同様に矛盾するため，F は $1-1$ である．

- **$\forall x, y \in X(xEy \leftrightarrow F(x) \in F(y))$.**

  $(\rightarrow)$ は定義より，$(\leftarrow)$ は F の $1-1$ 性と定義より．

- **M は推移的である．**

  $u \in M$ ならば $F(x) = u$ となる $x \in X$ が存在する．$v \in u$ とすれば $v \in F(x)$ であり，F の定義から $v = F(y)$ となる yEx が存在する．よって $v \in M$ であり，M は推移的である．

  したがって推移的な集合 M と写像 F で

$$F : \langle X, E \rangle \xrightarrow{\cong} \langle M, \in \rangle$$

  となるものが存在することが示せた．

- **このような M と F は１意に存在する．**

  M' と F' も上の条件を満たすとする．まず $x \in X$ を固定し，$\forall y \in X(yEx \to F(y) = F'(y))$ と仮定する．このとき

$$\begin{aligned} F(x) &= G(F \upharpoonright X_{E,x}) \\ &= G(F' \upharpoonright X_{E,x}) \\ &= F'(x) \end{aligned}$$

  であるため補題 3 より $\forall x \in X(F(x) = F'(x))$ つまり $F = F'$ である．よって $M = M'$ である．

$\square$