**線形代数入門 1　定期試験 予想問題集**

担当:　渕野 昌　　**2019 年第 1 クオーター (2019 年 06 月 05 日 22:09 版)**

この問題集は試験の前まで訂正／拡張される可能性があります．試験の直前には問題の解説も付け加える予定です．試験前まで何度かチェックしてみてください．

以下の問題の細部を調節したもののいくつかの類題を，期末試験の基本問題として出題します．これらの問題 (とその背景) を理解しておいてください．

期末試験では，これ以外にも，さらに challenging な問題を 1 題程度出す可能性もあります．

このプリントのファイルは，

`http://fuchino.ddo.jp/kobe/lin-alg-1-2-j-1q-pre-final.pdf`

としてダウンロードできます．

---

I. $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 \\ -1 & 5 & 3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $D = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ とするとき次に答えてください．

(1) 次の行列を計算してください．ただし，$n \times n$-行列 $M$ に対し，$M^n$ で $\underbrace{MM \cdots M}_{n\text{-回}}$ を表わしています．：

(a) $BA + CA$,　(b) $(B + C)^2$,　(c) $(B + C)^8$,　(d)$C^5$,　(e) $C^{57}$,　(f) $D^2$,　(g) $D^{567}$
(h) $(CD)^{27}$

(2) $2 \times 2$-行列 $F$ で，$(B + C)F = E$ となるものを求めてください．ただし， $E$ は $2 \times 2$ の単位行列です．

(3) $C$ は回転行列です．どの角度の回転を惹き起こす回転行列かを答えてください．

(4) (3) に留意して，$G^3 = C$ となるような $2 \times 2$-行列 $G$ を求めなさい．

(5) すべての $k = 2, 3, 4, \ldots$ について，$2 \times 2$-行列 $H$ で，$H \neq E$, $H^2 \neq E$,..., $H^{k-1} \neq E$ だが，$H^k = E$ となるようなものが存在することを示してください．

(6) (4) での $G$ は一意には決まらないことを示してください．

II.

(1) $\mathbb{a} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$, $\mathbb{b} = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix}$ として，平面ベクトル $\mathbb{a}$ と $\mathbb{b}$ のなす角を $\theta$ とするときに $\sin\theta$ を求めなさい．

(2) $\mathbb{a}$ と $\mathbb{b}$ を (1) での平面ベクトルとするとき，$\mathbb{a}$ と $\mathbb{b}$ の張る平行四辺形の面積を求めてください．

$\boxed{\text{III.}}$ $\mathbb{a} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbb{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$ とするとき以下に答えなさい.

(1) 空間ベクトル $\mathbb{c}$ で，$\mathbb{a}$ と $\mathbb{b}$ の張る平面に直交するものを全て求めなさい.

(2) $\mathbb{a}$ と $\mathbb{b}$ の張る平行四辺形の面積を求めてください.

$\boxed{\text{IV.}}$ 以下の連立一次方程式を解いてください:

# 解答例 and/or 解説 (ヒント)

$\boxed{\text{I.}}$ : (3): $C = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\frac{\pi}{2} & -\sin\frac{\pi}{2} \\ \sin\frac{\pi}{2} & \cos\frac{\pi}{2} \end{bmatrix}$ となることから $C$ は角度 $\frac{\pi}{2}$ を惹き起こす回転行列である．

$\boxed{\text{II.}}$ : (1): 定理 5.3 とその証明から，$\det([\mathbb{a}\mathbb{b}]) = |\mathbb{a}| \cdot |\mathbb{b}| \cdot \sin\theta$ だから，

$$\sin\theta = \frac{\det([\mathbb{a}\mathbb{b}])}{|\mathbb{a}| \cdot |\mathbb{b}|}$$

である．

(2): 定理 5.3 から，$|\det([\mathbb{a}\mathbb{b}])|$ が求める面積となる．

$\boxed{\text{III.}}$ : (1): $\mathbb{c}$ を $\mathbb{a}$ と $\mathbb{b}$ の張る平面に垂直なベクトルであることは，内積の幾何学的特徴付けから，$\mathbb{a} \cdot \mathbb{c} = 0, \mathbb{b} \cdot \mathbb{c} = 0$ が成り立つことと同値である．この条件をあらわす連立方程式の解の全体として求めるベクトルの全体が得られる．

(2): $\mathbb{c}$ を (1) で求めたようなベクトルで長さが 1 のものとすると，行列式の幾何学的特徴付けから，$|\det([\mathbb{a}\mathbb{b}\mathbb{c}])|$ が，$\mathbb{a}$ と $\mathbb{b}$ の張る平行四辺形の面積になる．