線形代数入門 2　定期試験 予想問題集

担当:　渕野 昌　　2019 年第 2 クオーター　(2019 年 07 月 28 日 13:45 版)

この問題集は試験の前まで訂正／拡張される可能性があります．試験の直前には，(余裕があれば) 問題の解説も付け加える予定です．試験前まで何度かチェックしてみてください．

以下の問題と演習での問題 (`http://fuchino.ddo.jp/kobe/lin-alg-2-j-2019-2q-uebung.pdf`) の細部を調節したもののいくつかの類題を，期末試験の基本問題として出題します．これらの問題 (とその背景) を理解しておいてください．

期末試験では，これ以外にも，さらに challenging な問題を 1 題程度出す可能性もあります．

このプリントのファイルは，

`http://fuchino.ddo.jp/kobe/lin-alg-2-j-2019-2q-pre-final.tex`

としてダウンロードできます．

I.　2×2-行列 A に対し，線形変換 $\varphi_A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ を，$\mathbb{a} \in \mathbb{R}^2$ に対して，$\varphi_A(\mathbb{a}) = A\mathbb{a}$ として定義したのだった．2×2 行列 A, B に対し，φ_B と φ_A の合成関数 $\varphi_B \circ \varphi_A$ も $\mathbb{R}^2$ から $\mathbb{R}^2$ への線形変換になるが，この線形変換が φ_{BA} に等しいことを示せ．

II.　(a) $\dfrac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ が直交行列であること示せ．(b) 回転行列は直交行列であることを示せ．

III.　行列 $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ の直交行列による対角化を求めよ．

IV.　行列

$$T = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

は 3 次元空間 $\mathbb{R}^3$ の原点を中心とする回転を表わす．このことを仮定とすると，この回転の回転軸は，T の固有値 1 の固有ベクトルの方向となる．(a) これがなぜかを説明せよ．(b) この回転の回転軸の向きの大きさが 1 のベクトルを求めよ．(c) T の惹き起こす回転の回転角を求めよ．(d) 行列 T が実際に回転を与える行列であることを示せ．

解説

$\boxed{\text{I}}$：2 つの線形変換の合成が，それらの表現行列の行列の積に対応するのは，行列 (やベクトル) の積が結合律を満たすように定義されていることが，ポイントとなっている．任意の $\mathbb{a} \in \mathbb{R}^2$ に，

$$\varphi_{BA}(\mathbb{a}) = (BA)\mathbb{a} \overbrace{=}^{(*)} B(A\mathbb{a}) = B(\varphi_A(\mathbb{a})) = \varphi_B(\varphi_a(\mathbb{a})) = (\varphi_B \circ \varphi_A)(\mathbb{a})$$

となる．$(*)$ で行列 (やベクトル) の積の結合律が用いられている．$\mathbb{a}$ は任意だったから，$\varphi_{BA} = \varphi_B \circ \varphi_A$ である．

$\boxed{\text{III.}}$：$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ とする．直交行列による対角化は対角化の特別な場合だから，まず A を普通に対角化してみる．このために A の特性多項式の根を求めると，.

$$\det\left(\begin{bmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & 1-\lambda \end{bmatrix}\right) = 0 \iff (1-\lambda)^2 = 0 \iff -3 - 2\lambda + \lambda^2 = 0 \iff (\lambda-3)(\lambda+1) = 0$$
$$\iff \lambda = 3, -1$$

となるから，A の固有値は 3 と -1 である．それぞれの固有ベクトルの条件式を解くと，c, $d \in \mathbb{R}$ $c, d \neq 0$ として $\begin{bmatrix} c \\ c \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} d \\ -d \end{bmatrix}$ の形のベクトルが，それぞれに対する固有ベクトルとなることがわかる．したがって，A の対角化は，

$$\left(\begin{bmatrix} c & d \\ c & -d \end{bmatrix}\right)^{-1} \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c & d \\ c & -d \end{bmatrix}$$

という形になることがわかる．A は実対称行列なので，(講義での) 定理 6.4 により，直交行列で対角化でき，それは上の形の対角化の中に含まれる．したがって，

$$\left|\left|\begin{bmatrix} c \\ c \end{bmatrix}\right|\right| = \sqrt{2c^2}, \quad \left|\left|\begin{bmatrix} d \\ -d \end{bmatrix}\right|\right| = \sqrt{2d^2}$$

により，$\dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ が $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ を対角化する直交行列であることがわかる．補題 6.3 により，$\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\right)^{-1} = {}^t\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\right) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ である．