線形代数 I　演習 I

担当:　Sakaé Fuchino (渕野 昌) **May 7, 2015**

以下の演習問題 (さらに改良訂正される可能性もあり) は以下の URL で downloadable である:

`http://kurt.scitec.kobe-u.ac.jp/~fuchino/kobe/lin-alg1-ss15-ex1.pdf`

講義に関する他の資料も以下の URL にリンク予定である:

`http://kurt.scitec.kobe-u.ac.jp/~fuchino/kobe/index.html`

$\boxed{\mathbf{1.}}$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

とするとき以下を計算せよ: (1) AB, (2) $B+C$, (3) $7A-3B$, (4) $AB+AC$
(ヒント: (4) では分配則を用いるとそれより前の問題の計算が再利用できる),

$\boxed{\mathbf{2.}}$

$$A = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

とするとき AB, BA, A^2, B^2, A^3, B^3 を計算せよ.

$\boxed{\mathbf{3.}}$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

とするとき A^2, A^3, A^4 を計算せよ.

$\boxed{\mathbf{4.}}$ n を 2 以上の自然数として，A と B を n-次正方行列とする．このとき，次の等式は一般に成り立つか? 一般成り立つ場合にはその証明を与え，一般には成り立たない場合にはその反例を与えよ.

(1) $(A+B)(A-B) = A^2 - B^2$,　(2) $(A-B)(A+C) = A^2 - BA + (A-B)C$,
(3) $(AB)^2 = A^2B^2$.

$\boxed{\mathbf{5.}}$ (1) $\mathbf{b}$ を列ベクトルとして $[c]$ を 1 行 1 列の行列とする．このとき，(*) $\mathbf{b}[c] = c\mathbf{b}$ が成り立つことを示せ.（ヒント: $\mathbf{b} = [b_i]_{1 \le i \le n}$ と置いて，各 $1 \le i \le n$ に対し，等式 (*) の両辺の i 成分が等しいことを示す．註: 1×1-行列 $[c]$ とスカラー c は通常断りなく同一視される.）

(2) $A = [\mathbf{a}_1 \cdots \mathbf{a}_n]$, $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$ とするとき，(**) $A\mathbf{b} = b_1\mathbf{a}_1 + \cdots + b_n\mathbf{a}_n$ が成り立つことを示せ.（ヒント: $A = [a_{i,j}]_{1 \le i \le m, 1 \le j \le n}$ と置くと，$\mathbf{a}_j = [a_{i,j}]_{1 \le i \le m}$ と表されることに留意して，すべての $1 \le i \le m$ に対し，(**) の両辺の i 成分が等しいことを示せばよい.）