線形代数 I　期末試験 予想問題集

担当:　渕野 昌　　　　**2015 年 07 月 16 日**

以下の問題の細部を調節したものを，期末試験の基本問題として出題します.（最低線でも）以下のタイプの問題が解けるよう準備しておいてください.

期末試験では，以下のタイプの問題以外にも，演習で出した問題の類題を 2〜3 題と，さらに challenging な問題を 1 題以上出す予定です.

このプリントのファイルは,

http://kurt.scitec.kobe-u.ac.jp/~fuchino/kobe/lin-alg1-ss15-pre-final-exam.pdf

としてダウンロードできます.

I.

(1) 行列の積 $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ を計算せよ.

(2) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ とする．このとき (a)　A^{-1} を求めよ.　　(b)　$|A|$ を求めよ.

(c)　a, b, c をある実数として，$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$ とするとき，連立方程式 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ の解を求めよ.

II.　次の連立方程式を掃き出し法を用いて解け:

(a) $\begin{cases} 3x + 2y - 4z = 7 \\ x + 2y = 5 \\ 2x + y - 5z = 8 \end{cases}$　(b) $\begin{cases} 2x + y = 0 \\ 5x - 2y = 3 \\ 4x - y = 1 \end{cases}$　(c) $\begin{cases} 2a - b - 3c + d = -2 \\ -2a + 4c = 2 \\ 3a - b - 5c + d = -3 \end{cases}$

III.　A を正方行列として，ある $m \in \mathbb{N}$ に対し，$A^m = O$ となるものとする．このとき，(a) $E - A + A^2 - A^3 + \cdots (-1)^{m-1}A^{m-1}$ は $E + A$ の逆行列であることを示せ．(b) $det(E + A) \neq 0$, $det(A) = 0$ となることを示せ.

IV.　教科書 (三宅,「線形代数学」) の定理 2.4.2 (p.34) とその証明を用いて，次の定理を示せ:

定理． n-次正方行列 A と n-次元列ベクトル $\mathbf{b}$ に対し，以下は同値である: (a) A は正則行列である．(b) 方程式 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ はちょうど一つの解を持つ.

V.　a, b, c をある実数とするとき,

((*) $\begin{bmatrix} a & ab \\ c - a & b - a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c \\ b \end{bmatrix}$

がちょうど一つの解を持つための必要十分条件を a, b, c に関する式で表わせ．また，クラメールの公式を用いて，このときの (*) の解を a, b, c の式で表わせ.