線形代数学 I — $\mathbb{R}^2$ 上の線形変換

渕野 昌 (Sakaé Fuchino)

2015 年 05 月 21 日

以下は 2015 年 5 月 14 日に行った平面上の線形変換に関する講義の講義録である．この講義の内容はは教科書から離れた補足であったため，内容をここに書き出しておく．

$$\mathbb{R}^2 = \{ \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} : u, v \in \mathbb{R}\}$$

だった．$\mathbb{R}^2$ の要素である 2 次元列ベクトル $\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$ は， xy-平面上の点 (x, y) と同一視したり，xy-平面上の原点から点 (x, y) に向けて伸びている長さと方向を持った矢印 — 平面ベクトル — と同一視することができて，この同一視で，平面の幾何学に関する議論 (の一部) が $\mathbb{R}^2$ のベクトルに関する議論に翻訳できる．同様に $\mathbb{R}^3$ の要素は，xyz-空間の点あるいは空間ベクトルと同一視することができ， $\mathbb{R}^4$ は時空の点あるいは 4 次元空間ベクトルと同一視できる．

φ が $\mathbb{R}^2$ から $\mathbb{R}^2$ への変換 (transformation) (写像 (mapping), 関数 (function) という名称も同じ意味で用いられる) であるとは， φ が $\mathbb{R}^2$ の各ベクトル $\mathbf{a}$ に対して，$\mathbb{R}^2$ のベクトル $\varphi(\mathbf{a})$ を対応させるもの (しくみ，規則など) であることである．

ex-0

例 0.1 (1) 回転 (rotation): 角度 θ に対し

$$\rho_\theta : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2; \tag{0.1}$$

$$\mathbf{a} \mapsto \rho_\theta(\mathbf{a}) = \text{平面ベクトルとしての } \mathbf{a} \text{ を原点を中心に角度}$$
$$\theta \text{ だけ左回りに回転させて得られる平面ベクトル}$$

(2) 平行移動 (translation) $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$ に対し，各ベクトル $\mathbf{a}$ に対応する平面上の点に対し，この点を $\mathbf{b}$ だけ平行移動したときに得られるベクトル $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ を返す変換.

$$t_\mathbf{b} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2; \tag{0.2}$$

$$\mathbf{a} \mapsto \mathbf{a} + \mathbf{b}$$

変換 $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ が与えられたとき，図形 $X \subseteq \mathbb{R}^2$ に対し，X の変換 φ による像 $\varphi[X] = \{\varphi(\mathbf{a}) : \mathbf{a} \in X\}$ を考えることができる．例えば上の例では，$\rho_\theta[X]$ は図形 X を原点を中心に角度 θ だけ回転して得られる図形で，$t_{\mathbf{b}}[X]$ は図形 X を $\mathbf{b}$ だけ平行移動して得られる図形となっている．

A を 2×2-行列とするとき，変換 $\varphi_A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ を，$\mathbb{R}^2 \ni \mathbf{a} \mapsto A\mathbf{a} \in \mathbb{R}^2$ で定義する．

たとえば $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, $\mathbf{a} = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$ のとき，$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} au+bv \\ cu+dv \end{bmatrix}$ だから，$\varphi_A(\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} au+bv \\ cu+dv \end{bmatrix}$ である．

行列の計算の基本法則を思い出すと，φ_A は，任意の $\mathbf{a}$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^2$ とスカラー $c \in \mathbb{R}$ に対し，

$$\varphi_A(\mathbf{a}+\mathbf{b}) = A(\mathbf{a}+\mathbf{b}) = A\mathbf{a} + A\mathbf{b} = \varphi_A(\mathbf{a}) + \varphi_A(\mathbf{b}) \tag{0.3}$$ v-0

$$\varphi_A(c\mathbf{a}) = A(c\mathbf{a}) = cA\mathbf{a} = c\varphi_A(\mathbf{a}) \tag{0.4}$$ v-1

である．

任意の $\mathbb{R}^2$ から $\mathbb{R}^2$ への変換 φ が (0.3), (0.4) に対応する性質: すべての $\mathbf{a}$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^2$, $c \in \mathbb{R}$ に対し，

$$\varphi(\mathbf{a}+\mathbf{b}) = \varphi(\mathbf{a}) + \varphi(\mathbf{b}) \tag{0.5}$$ v-2

$$\varphi(c\mathbf{a}) = c\varphi(\mathbf{a}) \tag{0.6}$$ v-3

を満たすとき，φ は線形変換 (または，線型写像) であるという．特に，任意の 2×2-行列 A に対し，上でのような φ_A は線形変換である．実は，以下の定理0.2で示すように，このことの逆も成り立つ．

L-0

補題 0.1 $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ が線形変換であることと，すべてのベクトル $\mathbf{a}$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^2$ とスカラー c, $d \in \mathbb{R}$ に対して

$$\varphi(c\mathbf{a}+d\mathbf{b}) = c\varphi(\mathbf{a}) + d\varphi(\mathbf{b}) \tag{0.7}$$ v-4

が成り立つことは同値である．

証明． φ が線形変換なら， すべてのベクトル $\mathbf{a}$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^2$ とスカラー c, $c\mathbb{R}$ に対して

$$\begin{aligned} \varphi(c\mathbf{a}+d\mathbf{b}) &= \varphi(c\mathbf{a}) + \varphi(d\mathbf{b})\,; \quad \text{(0.5) による} \\ &= c\varphi(\mathbf{a}) + d\varphi(\mathbf{b})\,; \quad \text{(0.6) による} \end{aligned}$$

だから，(0.7) が成り立つ．

逆に，(0.7) が成り立つとすると，(0.7) で $c = 1$, $d = 1$ とすると，(0.5) が成り立つことがわかり，$d = 0$ とすると (0.6) が成り立つことがわかる． ❏ (補題 0.1)

Th-0

定理 0.2 すべての 線形変換 $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ に対し，2×2-行列 A で，$\varphi = \varphi_A$ となるものがただ 1 つ存在する．

証明． $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ を線形変換として，$\varphi(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix}$, $\varphi(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix}$ とする．このとき $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ が求めるようなものになっている: 任意の $\mathbf{a} = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$ に対し，

$$\begin{aligned} \varphi(\mathbf{a}) = \varphi(\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}) &= \varphi(u\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + v\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}) \\ &= u\varphi(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}) + v\varphi(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}) && \text{; 補題 0.1 による} \\ &= u\begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix} + v\begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix} && \text{; } \begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix} \text{ の定義による} \\ &= \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = A \cdot \mathbf{a} = \varphi_A(\mathbf{a}) \end{aligned}$$

となるから，$\varphi = \varphi_A$ である．このような A の存在が一意であることは， $A \neq A'$ なら $\varphi_A \neq \varphi_{A'}$ となることから明らかである． □ (定理 0.2)

線型変換 φ に対し，$\varphi = \varphi_A$ となるような行列 A を φ の表現行列とよぶことにする．上の定理の証明を用いると線型変換の表現行列が求められる．

ex-0-0

例 0.2 例 0.1, (1) での ρ_θ が線型変換になることは容易に確かめられる．

$$\rho_\theta(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{bmatrix},\ \rho_\theta(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{bmatrix}$$

だから，

$$A_\theta = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

とすると， この A_θ は ρ_θ の表現行列になる．つまり，$\rho_\theta = \varphi_{A_\theta}$ である．

補題 0.3 $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ を線形変換とするとき，$\mathbf{0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ として，$\varphi(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ である．

証明． (0.3) により，$\varphi(\mathbf{0}) = \varphi(0\mathbf{0}) = 0\varphi(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ である． □ (補題 0.3)

ex-1

例 0.3 $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$ なら，例 0.1, (2) での $t_\mathbf{b}$ は $t_\mathbf{b}(\mathbf{0}) = \mathbf{b} \neq \mathbf{0}$ だから，線形変換ではない．

逆に，$\varphi(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ だったとしても φ が線形変換になるとは限らない:

ex-2

例 0.4 $\varphi(\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} u \\ v^2 \end{bmatrix}$ で φ を定義すると， $\varphi(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ だが，たとえば，
$\varphi(2\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}) = \varphi(\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}$ だが，$2\varphi(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}) = 2\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$ だから，φ は (0.6) を満たさない．したがって，φ は線形変換ではない．

線型変換の例を更に挙げておく．

(0) ゼロ写像 (すべての $\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$ に対し $\varphi(\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$) は線形変換である (表現行列: 零行列 $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$).

(1) 恒等変換 (何も動かさない変換)，つまりすべての $\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$ に対し，$\varphi(\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$ は線形変換である．(表現行列: 単位行列 $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$).

(2) 鏡像変換 (reflection). (a) x 軸を境界とする鏡像 ($\varphi(\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} u \\ -v \end{bmatrix}$, 表現行列: $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$).

(b) y 軸を境界とする鏡像 ($\varphi(\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} -u \\ v \end{bmatrix}$, 表現行列: $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$).

(c) 直線 $y = x$ 境界とする鏡像 ($\varphi(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\varphi(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, 表現行列: $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$)． etc.

(3) ねじれ (shear).
($\varphi(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\varphi(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} k \\ 1 \end{bmatrix}$, 表現行列: $\begin{bmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$).

(4) 拡大／縮小 (scaling).

(a) x 軸方向への比率 $r > 0$ での拡大縮小 (表現行列: $\begin{bmatrix} r & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$)

(b) y 軸方向への比率 $r > 0$ での拡大縮小 (表現行列: $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r \end{bmatrix}$)

(5) 射影 (projection).

(a) x 軸への射影 (表現行列: $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$)

(b) y 軸への射影 (表現行列: $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$)