線形代数 1　期末試験 予想問題集

担当:　渕野 昌 **2016 年 05 月 19 日**

以下の問題の細部を調節したものを，期末試験の基本問題として出題します.（最低線でも）以下のタイプの問題が解けるよう準備しておいてください.

期末試験では，以下のタイプの問題以外にも，さらに challenging な問題をあと 1 題くらい出す予定です.

このプリントのファイルは,

http://fuchino.ddo.jp/kobe/lin-alg1-ss16-pre-final-exam.pdf

としてダウンロードできます.

I. $A=\begin{bmatrix}1&2&1\\2&1&1\\3&0&1\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}1&2&3&1\\2&-1&2&1\\1&2&0&1\end{bmatrix}$, $C=\begin{bmatrix}1&1&1\\2&0&1\\3&-1&0\end{bmatrix}$ とするとき，次を計算せよ.　(a) $2A-3C$,　(b) $AB-CB$,　(c) $a,\,b,\,c\in\mathbb{R}$ に対する $A\begin{bmatrix}a\\b\\c\end{bmatrix}$ と $[a\,b\,c]\,A$.

ただし，(b) では行列の計算の基本性質を使って効率のよい計算の仕方を工夫すること.

II. A と B を $n\times n$-行列とするとき，B が A の逆行列であるとは，$AB=E_n$ と $BA=E_n$ が成り立つときである.

(1) $A=\begin{bmatrix}1&0&0\\1&0&1\\0&1&0\end{bmatrix}$ とする．このとき $B=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&1\\-1&1&0\end{bmatrix}$ が A の逆行列であるかどうかを確かめよ.

(2) $a,\,b,\,c,\,d\in\mathbb{R}$ とするとき，$ad-bc\neq 0$ なら，$\dfrac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix}d&-b\\-c&a\end{bmatrix}$ が $\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}$ の逆行列になることを確かめよ.

(3) $A,\,B,\,B'$ が $n\times n$-行列で，B も B' も A の逆行列のとき，$B=B'$ となることを示せ.

(4) $\begin{bmatrix}1&2\\3&4\end{bmatrix}$ の逆行列を求めよ.

III. 次の連立方程式を掃き出し法を用いて解け:

(a) $\begin{cases}3x+2y-4z=7\\x+2y=5\\2x+y-5z=8\end{cases}$　(b) $\begin{cases}2x+y=0\\5x-2y=3\\4x-y=1\end{cases}$　(c) $\begin{cases}2a-b-3c+d=-2\\-2a+4c=2\\3a-b-5c+d=-3\end{cases}$

IV. (1) A を $n\times n$ 正方行列として，$\mathbf{b}$ を n-次縦ベクトルとする．A が逆行列 A^{-1} を持つとき，方程式 $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$ は $\mathbf{x}=A^{-1}\mathbf{b}$ を唯一つの解として持つ (つまり，$A\mathbf{x}=\mathbf{b}$ の解の全体は $\{A^{-1}\mathbf{b}\}$ となる) ことを示せ.

(2) (1) と II. (4) を用いて，$\begin{bmatrix}1&2\\3&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5\\6\end{bmatrix}$ の解の全体を求めよ.

V. $m\times n$-行列 A に対し，A に対応する線型写像 φ_A を $\varphi_A:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m;\mathbf{x}\mapsto A\mathbf{x}$ で定義した.

(a) A を I. での行列とするとき，$\varphi_A(\begin{bmatrix}1\\2\\0\end{bmatrix})$ を求めよ.

(b) A を II. (1) での行列とするとき，方程式 $\varphi_A(\mathbf{x})=\begin{bmatrix}3\\0\\1\end{bmatrix}$ を満たす $\mathbf{x}\in\mathbb{R}^3$ を求めよ.