線形代数学 2/II　演習 I

担当: Sakaé Fuchino (渕野 昌) **May 7, 2015**

以下の演習問題 (さらに改良訂正される可能性もあり) は以下の URL で downloadable である:

`http://kurt.scitec.kobe-u.ac.jp/~fuchino/kobe/lin-alg2-ss15-ex1.pdf`

講義に関する他の資料も以下の URL にリンク予定である:

`http://kurt.scitec.kobe-u.ac.jp/~fuchino/kobe/index.html`

1.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix},\ C = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

とするとき以下を計算せよ: (1) AB, (2) $B+C$, (3) $7A-3B$, (4) $AB+AC$
(ヒント: (4) では分配則を用いるとそれより前の問題の計算が再利用できる),

2.

$$A = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

とするとき AB, BA, A^2, B^2, A^3, B^3 を計算せよ.

3.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

とするとき A^2, A^3, A^4 を計算せよ．一般に n に対し，A^n が何になるかを示せ.

4. $m \times n$ 行列 A に対して線型写像 $\varphi_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ を $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ に対し $\varphi_A(\mathbf{b}) = A\mathbf{b}$ と定義したのだった.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$ として，$$\mathbf{e}^3_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},\ \mathbf{e}^3_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},\ \mathbf{e}^3_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$ とする.

(a) $\varphi_A \circ \varphi_B(\mathbf{e}^3_i) = \mathbf{e}^3_i$ がすべての $i = 1, 2, 3$ に対し成り立つことを示せ．.

(b) 上の (a) を用いて $\varphi_A \circ \varphi_B = id_{\mathbb{R}^3}$ を示せ． ただし $id_{\mathbb{R}^3}$ で $\mathbb{R}^3$ 上の恒等写像をあらわす.

(c) 上の (b) を用いて $AB = E_3$ であることを示せ．ただし E_3 で 3 次の単位行列をあらわす.

5 以下の写像 φ_i のうちどれが線型写像かを答えよ．その理由も述べよ．φ_i が線型写像のときには φ_A が φ_i となるような行列 A を求めよ.

(a) $\varphi_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2;\ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} x+1 \\ y+1 \end{bmatrix}$ (b) $\varphi_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2;\ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} x+y \\ x-y \end{bmatrix}$

(c) $\varphi_3 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2;\ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} x\sin\theta \\ y\cos\theta \end{bmatrix}$ (d) $\varphi_4 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3;\ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$

(e) $\varphi_5 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3;\ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} y \\ 0 \\ x \end{bmatrix}$ (f) $\varphi_6 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4;\ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

(g) $\varphi_7 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2;\ x \mapsto \begin{bmatrix} x \\ x^2 \end{bmatrix}$