線形代数学 2 (線形代数学 II)　期末試験 予想問題集

担当:　渕野 昌　　　　**2015 年 07 月 16 日**

以下の問題の細部を調節したものを，期末試験の基本問題として出題します．(最低線でも) 以下のタイプの問題が解けるよう準備しておいてください．

期末試験では，以下のタイプの問題以外にも，演習で出した問題の類題を 2〜3 題と，さらに challenging な問題を 1 題以上出す予定です．

このプリントのファイルは，

http://kurt.scitec.kobe-u.ac.jp/~fuchino/kobe/lin-alg2-ss15-pre-final-exam.pdf

としてダウンロードできます．

I. (1) $\mathbf{a}=\begin{bmatrix}1\\2\\3\\4\end{bmatrix}$, $\mathbf{b}=\begin{bmatrix}2\\-1\\0\\2\end{bmatrix}$ とするとき $(\mathbf{a},\mathbf{b})$ を計算せよ．　(2) $\mathbf{c}=\begin{bmatrix}1\\0\\2\\3\end{bmatrix}$, $\mathbf{d}=\begin{bmatrix}2\\1\\a\\2\end{bmatrix}$ とするとき，$\mathbf{c}$ と $\mathbf{d}$ が直交するような a の値を求めよ．

II. $\varphi:\mathbb{R}^\ell\to\mathbb{R}^m$ と $\psi:\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^n$ をそれぞれ線型写像とする．(a) $\ell\geq m>n$ とするとき，φ と ψ の合成 $\psi\circ\varphi$ は 1 対 1 写像にならないことを示せ．(b) $\psi\circ\varphi$ が $\mathbb{R}^n$ の上への写像となっているとき，$\dim(\mathrm{Ker}(\psi\circ\varphi))$ は何になるか?

III. 正方行列 A が 0 を固有値として持つのは A が正則でないちょうどそのときであることを示せ．

IV. 以下で定義された写像のうち線形写像となっているのはどれか? なぜ線形写像であると言えるのか (あるいはそうでないと言えるのか) 理由も述べよ．線型写像になっているものについては，その表現行列を求めよ．

(a) $\varphi_1:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2;\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}\mapsto\begin{bmatrix}x+1\\y+1\end{bmatrix}$　(b) $\varphi_2:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2;\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}\mapsto\begin{bmatrix}x+y\\x-y\end{bmatrix}$

(c) $\varphi_3:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2;\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}\mapsto\begin{bmatrix}x\sin\theta\\y\cos\theta\end{bmatrix}$　(d) $\varphi_4:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3;\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}\mapsto\begin{bmatrix}x\\y\\1\end{bmatrix}$

(e) $\varphi_5:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3;\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}\mapsto\begin{bmatrix}y\\0\\x\end{bmatrix}$　(f) $\varphi_6:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^4;\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}\mapsto\begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\end{bmatrix}$

(g) $\varphi_7:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2;x\mapsto\begin{bmatrix}x\\x^2\end{bmatrix}$

V. $\varphi:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$ を $\varphi(\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix})=\begin{bmatrix}1\\2\\-3\end{bmatrix}$, $\varphi\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\4\\-6\end{bmatrix}$ となるような線形写像とする．

(a) φ の表現行列を求めよ．(b) $\mathrm{Im}(\varphi)$ と $\mathrm{Ker}(\varphi)$ が何になるかを求めよ．

VI. $\mathbf{b}_1,\ldots,\mathbf{b}_n$ を $\mathbb{R}^n$ の正規直交基底とする． $\mathbf{a}\in\mathbb{R}^n$ を任意にとるとき $1\leq i\leq n$ に対し $a_i=(\mathbf{a},\mathbf{b}_i)$ とする．このとき，$\mathbf{a}=a_1\mathbf{b}_1+a_2\mathbf{b}_2+\cdots+a_n\mathbf{b}_n$ となることを示せ．

VII. $\begin{bmatrix}3&-1\\-1&2\end{bmatrix}$ を対角化せよ．

追加の問題:

VIII. $\mathbb{R}^4$ の基底 $\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}0\\1\\0\\0\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}1\\1\\1\\-1\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}1\\1\\1\\0\end{bmatrix}$, をシュミットの直交化法を用いて正規直交基底に変換せよ．

問題の解説

$\boxed{\text{I.}}$: (1): ベクトル $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$, $\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$ の内積 $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ は，$x_1y_1 + \cdots + x_ny_n$ だったので，$\mathbf{a}$ と $\mathbf{b}$ の内積 $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ は $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = 1 \cdot 2 + 2 \cdot (-1) + 3 \cdot 0 + 4 \cdot 2$ と計算できる．
(2): ベクトル $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ が直交するとは，内積 $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ がゼロになることだった．したがって，$(\mathbf{c}, \mathbf{d}) = 1 \cdot 2 + 0 \cdot 1 + 2a + 3 \cdot 2 = 0$ を a に関して解くことで，$\mathbf{c}$ と $\mathbf{d}$ が直交するための必要十分条件が求まる．

$\boxed{\text{II.}}$: 線型写像の合成は線型写像になるので，$\eta = \phi \circ \varphi$ とすると，η は $\mathbb{R}^\ell$ から $\mathbb{R}^n$ への線型写像となる． (a): 次元定理から，$\dim(\mathrm{Im}(\eta)) + \dim(\mathrm{Ker}(\eta)) = \ell$ となるが，$\dim(\mathrm{Im}(\eta)) \leq n < \ell$ だから，$\dim(\mathrm{Ker}(\eta)) \geq 1$ となる．特に $\mathrm{Ker}(\eta) \neq \{\mathbf{0}\}$ だから，η は 1 対 1 写像ではない．
(b): η が $\mathbb{R}^n$ の上への写像なら，$\dim(\mathrm{Im}(\eta)) = n$ だから，$\dim(\mathrm{Ker}(\eta)) = \dim(\mathbb{R}^\ell) - n = \ell - n$ である．

$\boxed{\text{III.}}$: 0 が A の固有値 $\Leftrightarrow$ $A\mathbf{x} = 0\mathbf{x}$ が自明でない解を持つ $\Leftrightarrow$ $\mathrm{Ker}(\varphi_A) \neq \{\mathbf{0}\}$ $\Leftrightarrow$ φ_A は単射 (1 対 1 写像) ではない $\Leftrightarrow^*$ φ_A は全単射 (1 対 1 onto) でない $\Leftrightarrow$ φ_A は逆写像を持つ $\Leftrightarrow$ A は正則である．
"$\Leftrightarrow^*$" の "$\Rightarrow$" は自明である．この同値の "$\Leftarrow$" は，対偶を示すことにして，φ_A が 1 対 1 だとすると， $\dim(\mathrm{Ker}(\varphi_A)) = 0$ だから，次元定理から $\dim(\mathrm{Im}(\varphi_A)) = n - \dim(\mathrm{Ker}(\varphi_A)) = n$ である．したがって， $\mathrm{Im}(\varphi_A) = \mathbb{R}^n$ となるから，φ_A は $\mathbb{R}^n$ の上への写像でもあることがわかる．

$\boxed{\text{IV.}}$: 線型写像は零ベクトルを零ベクトルに移すから，この性質を持たない φ_1 ($\varphi_1(\mathbf{0}) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \neq \mathbf{0}$), φ_4 ($\varphi_4(\mathbf{0}) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \neq \mathbf{0}$) は線型写像でないことがすぐに n 分る． $\varphi_7(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ だが，
たとえば，

$$\varphi_7(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \varphi_7(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}) + \varphi_7(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix})$$

だから，φ_7 も線型写像ではない．他の写像はすべて線型写像であることが線型写像の定義をそれぞれの写像に対してチェックすることで確かめられる．
たとえば，

$$\varphi_2(\alpha \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \end{bmatrix}) = \varphi_2(\begin{bmatrix} \alpha a_0 + \beta b_0 \\ \alpha a_1 + \beta b_1 \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} (\alpha a_0 + \beta b_0) + (\alpha a_1 + \beta b_1) \\ (\alpha a_0 + \beta b_0) - (\alpha a_1 + \beta b_1) \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} a_0 + a_1 \\ a_0 - a_1 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} b_0 + b_1 \\ b_0 - b_1 \end{bmatrix} = \alpha\varphi_2(\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix}) + \beta\varphi_2(\begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \end{bmatrix})$$

により φ_2 が線型写像であることが確かめられる．

$\boxed{\text{V.}}$: (a): φ が線型写像であることから，

$$\varphi(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}) = \varphi(\frac{1}{3}(2\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix})) = \frac{1}{3}(2\varphi(\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}) - \varphi(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix})) = \frac{1}{3}(2\begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ -6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}$$

$$\varphi(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}) = \varphi(\frac{1}{3}(2\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix})) = \frac{1}{3}(2\varphi(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}) - \varphi(\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix})) = \frac{1}{3}(2\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ -6 \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

となる．したがって，φ の表現行列は

$$\begin{bmatrix} \varphi(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}) & \varphi(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}$$

である．

(b): $\mathrm{Im}(\varphi)$ は $\{\varphi(\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}), \varphi(\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix})\}$ の張る $\mathbb{R}^3$ の部分空間だが，$\varphi(\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix})$ が零ベクトルであることから，これは $\{\varphi(\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix})\} = \{\begin{bmatrix}1\\2\\-3\end{bmatrix}\}$ の張る $\mathbb{R}^3$ の 1 次元の部分空間 $\{a\begin{bmatrix}1\\2\\-3\end{bmatrix} : a \in \mathbb{R}\}$ になることがわかる．次元定理から，$\mathrm{Ker}(\varphi)$ は $\mathbb{R}^2$ の $2-1=1$-次元の部分空間になるが，上の計算から $\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} \in \mathrm{Ker}(\varphi)$ だから，$\mathrm{Ker}(\varphi) = \{\begin{bmatrix}0\\a\end{bmatrix} : a \in \mathbb{R}\}$ となる．

$\boxed{\text{VI.}}$: $\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_n$ が $\mathbb{R}^n$ の正規直交基底であることから，各 $1 \le i \le n$ に対し

$(a_1\mathbf{b}_1 + a_2\mathbf{b}_2 + \cdots + a_n\mathbf{b}_n, \mathbf{b}_i) = a_i(\mathbf{b}_i, \mathbf{b}_i) = a_i$

である．したがって，

(*) $(\mathbf{a} - (a_1\mathbf{b}_1 + a_2\mathbf{b}_2 + \cdots + a_n\mathbf{b}_n), \mathbf{b}_i) = (\mathbf{a}, \mathbf{b}_i) - a_i = a_i - a_i = 0$

となることがわかる．$\mathbf{b}_1, ..., \mathbf{b}_n$ は $\mathbb{R}^n$ の基底だから，$b_1, ..., b_n\mathbb{R}$ を，

$\mathbf{a} - (a_1\mathbf{b}_1 + a_2\mathbf{b}_2 + \cdots + a_n\mathbf{b}_n) = b_1\mathbf{b}_1 + \cdots + b_n\mathbf{b}_n$

となるようにとれる．ここで，

$$
\begin{aligned}
&|\mathbf{a} - (a_1\mathbf{b}_1 + a_2\mathbf{b}_2 + \cdots + a_n\mathbf{b}_n)| \\
&= (\mathbf{a} - (a_1\mathbf{b}_1 + a_2\mathbf{b}_2 + \cdots + a_n\mathbf{b}_n),\ \mathbf{a} - (a_1\mathbf{b}_1 + a_2\mathbf{b}_2 + \cdots + a_n\mathbf{b}_n)) \\
&= (\mathbf{a} - (a_1\mathbf{b}_1 + a_2\mathbf{b}_2 + \cdots + a_n\mathbf{b}_n),\ b_1\mathbf{b}_1 + \cdots + b_n\mathbf{b}_n) \\
&= b_1(\mathbf{a} - (a_1\mathbf{b}_1 + a_2\mathbf{b}_2 + \cdots + a_n\mathbf{b}_n),\ \mathbf{b}_1) + \cdots + b_n(\mathbf{a} - (a_1\mathbf{b}_1 + a_2\mathbf{b}_2 + \cdots + a_n\mathbf{b}_n),\ \mathbf{b}_n) \\
&= b_1 \cdot 0 + \cdots + b_n \cdot 0 = 0 \quad \text{(*) による}
\end{aligned}
$$

となるから，$\mathbf{a} - (a_1\mathbf{b}_1 + a_2\mathbf{b}_2 + \cdots + a_n\mathbf{b}_n) = \mathbf{0}$ つまり，$\mathbf{a} = a_1\mathbf{b}_1 + a_2\mathbf{b}_2 + \cdots + a_n\mathbf{b}_n$ である．

$\boxed{\text{VII.}}$: $A = \begin{bmatrix}3 & -1\\-1 & 2\end{bmatrix}$ の特性方程式

$\begin{vmatrix}3-\varepsilon & -1\\-1 & 2-\varepsilon\end{vmatrix} = 0 \ \Leftrightarrow\ \varepsilon^2 - 5\varepsilon + 5 = 0$

を解いて，$\varepsilon = \dfrac{5 \pm \sqrt{5}}{2}$ が A の 2 つの固有値となることがわかる．

$\varepsilon_1 = \dfrac{5+\sqrt{5}}{2}$ の固有ベクトル $\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$ は，

$\begin{bmatrix}3 & -1\\-1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix} = \dfrac{5+\sqrt{5}}{2}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$

を満たすから，これを解いて，$\begin{bmatrix}2\\1-\sqrt{5}\end{bmatrix}$ は固有値 ε_1 に対応する固有ベクトルの一つになっていることがわかる．$\varepsilon_2 = \dfrac{5-\sqrt{5}}{2}$ についても同様の計算をすると，

$\begin{bmatrix}2\\1+\sqrt{5}\end{bmatrix}$ が ε_2 に対応する固有ベクトルの一つであることがわかる．

したがって，$U = \begin{bmatrix}2 & 2\\1-\sqrt{5} & 1+\sqrt{5}\end{bmatrix}$ とすると，

$A = U\begin{bmatrix}\varepsilon_1 & 0\\0 & \varepsilon_2\end{bmatrix}U^{-1}$ となる．