線形代数 2　期末試験

予想問題

担当:　渕野 昌　　　　**2016 年 07 月 20 日**

期末試験では以下の問題の類題 (プラス 1 問くらい) を問題として出します．ただし，出題の形式はここでとは異なるものになる可能性はあります．
本クオーターの講義では，教科書の pp.34〜59 に相当する内容を講義したので，以下の問題と教科書のこの部分の演習問題を解き，講義のノート見なおして試験の準備をしてください．

$\boxed{1}$　次の行列の行列の行列式を求めよ．この行列が正則かどうかを答え，正則な場合には，逆行列を求めよ．

(a)　$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$　　　(b)　$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

$\boxed{2}$　A, B を $n \times n$ 行列とする．

(a)　A と B が共に正則行列なら AB も正則行列になることを示せ．

(b)　A が正則でないなら，AB も正則でないことを示せ．

$\boxed{3}$　A をある正方行列とし，O を A と同じサイズの零行列とするとき，$A^4 \neq O$ だが $A^5 = O$ となっているとする．また E を A と同じサイズの単位行列とする．

(a)　$A^2 \neq O$ であることを示せ．　　(b)　$|A|$ を求めよ．

(c)　$E - A + A^2 - A^3 + A^4$ は $E + A$ の逆行列であることを示せ．

(d)　$E - A$ の逆行列を求めよ．　　(e)　$E - A^2$ が正則行列であることを示せ．

$\boxed{4}$　次の $\boxed{\text{(ア)}}$ 〜 $\boxed{\text{(オ)}}$ を補って，次の定理の証明を完成させよ．

定理． n-次正方行列 M と n-次元列ベクトル $\mathbf{b}$ に対し，以下は同値である: (a) M は正則行列である．(b) 方程式 $M\mathbf{x} = \mathbf{b}$ はちょうど一つの解を持つ．

証明． (a) $\Rightarrow$ (b): M が正則なら M^{-1} が存在する．したがって $\mathbf{c} = \boxed{\text{(ア)}}$ とすると，$\mathbf{c}$ は $M\mathbf{x} = \mathbf{b}$ の解である．$\mathbf{c}$ と $\mathbf{c}'$ を共に $M\mathbf{x} = \mathbf{b}$ の解とすると，$\boxed{\text{(イ)}}$ により，$\mathbf{c} = \mathbf{c}'$ である．
(b) $\Rightarrow$ (a): 対偶を示す．M が正則でないとする．もし方程式 $M\mathbf{x} = \mathbf{b}$ を満たす $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$ が存在しないなら，明らかに「方程式 $M\mathbf{x} = \mathbf{b}$ はちょうど一つの解を持つ」は成り立たない．$M\mathbf{x} = \mathbf{b}$ の解が存在するときには，その一つを $\mathbf{c}$ とする．M が正則でないことから，教科書 p.34 の定理 2.4.2 により，方程式 $\boxed{\text{(ウ)}}$ は自明でない解 $\mathbf{d}$ を持つ．このとき $\mathbf{c}' = \boxed{\text{(エ)}}$ とすると，$\mathbf{c}$ と $\mathbf{c}'$ は 2 つの異る $M\mathbf{x} = \mathbf{b}$ の解である．したがって，この場合にも，主張「$\boxed{\text{(オ)}}$」は成り立たない．

$\boxed{5}$　(1)　a, b, c をある実数とするとき，

$$(*)\quad \begin{bmatrix} -a^2 & ab \\ c-a & b-a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c \\ b \end{bmatrix}$$

がちょうど一つの解を持つための必要十分条件を a, b, c に関する式を用いて表わせ．

(2)　上の (*) がちょうど一つの解を持つとして，このときの解を a, b, c の式で表わせ．