線形代数 3　演習

2017 年度第 1 quarter　**担当: Sakaé Fuchino (渕野 昌)**　**May 25, 2017**

次の課題を解いてレポートとしてまとめたものを，6 月 1 日の講義の始まる前に教卓の上に提出してください．レポートは返却しないので，回答は自分用のコピーをとっておくようにしてください．

1. $n = 1, 2, 3, \ldots$ に対し，$\mathbb{R}[x]_n$ で実係数の (変数 x に関する) 多項式で次数が n 以下のものの全体をあらわすことにする．

(1) $\mathbb{R}[x]_n$ は多項式の通常の足し算や定数倍に関して，ベクトル空間になること示せ．
(2) $n \le m$ のとき $\mathbb{R}[x]_n$ は $\mathbb{R}[x]_m$ の部分空間となることを示せ．
(3) $1, x, x^2, \ldots, x^n$ は，$\mathbb{R}[x]_n$ の基底となることを示せ．
(4) $dim(\mathbb{R}[x]_n)$ を求めよ．

2. $\mathbb{a}, \mathbb{b} \in \mathbb{R}^3$ を $\{\mathbb{a}, \mathbb{b}\}$ が独立であるようなものとする．A を 3×2-行列 $[\mathbb{a}\ \mathbb{b}]$ とする．線型写像 φ_A を講義でと同様に $\varphi_A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3;\ \mathbb{x} \mapsto A\mathbb{x}$ として定義する．このとき，

(1) φ_A は 1 対 1 であることを示せ．
(2) $Im(\varphi_A)$ と $Ker(\varphi_A)$ の次元を求めよ．
(3) ある $\mathbb{b} \in \mathbb{R}^3$ に対し，方程式 $A\mathbb{x} = \mathbb{b}$ に解があるなら，解は一意に決まることを示せ．
(4) $\mathbb{R}^3$ のベクトル $\mathbb{b}$ で $A\mathbb{x} = \mathbb{b}$ に解が存在しないようなものが存在することを示せ．

3.

$\mathbb{a}_1 = \begin{bmatrix} a_{1,1} \\ \vdots \\ a_{m,1} \end{bmatrix}, \ldots, \mathbb{a}_n = \begin{bmatrix} a_{1,n} \\ \vdots \\ a_{m,n} \end{bmatrix}$ として，$A = [\mathbb{a}_1 \cdots \mathbb{a}_n]$ とし，$\mathbb{c} = \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}$ とする．このとき，$A\mathbb{c} = c_1\mathbb{a}_1 + \cdots + c_n\mathbb{a}_n$ となることを示せ．(ヒント: 各 $1 \le i \le n$ に対し左辺の i 成分と，右辺の i 成分が等しいことを示せばよい．)

4.

$\mathbb{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbb{a}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbb{a}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbb{a}_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \mathbb{a}_5 = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$

とするとき，ベクトルの組 $\{\mathbb{a}_1, \mathbb{a}_2\}, \{\mathbb{a}_1, \mathbb{a}_5\}, \{\mathbb{a}_1, \mathbb{a}_2, \mathbb{a}_3\}, \{\mathbb{a}_1, \mathbb{a}_2, \mathbb{a}_4\}, \{\mathbb{a}_1, \mathbb{a}_3, \mathbb{a}_5\}, \{\mathbb{a}_1, \mathbb{a}_3, \mathbb{a}_4, \mathbb{a}_5\}$ のうち，線型独立なものはどれか，これらの組のうち $\mathbb{R}^3$ の基底となっているものはどれか?

5. 以下の写像 φ_i のうちどれが線型写像かを答えよ．その理由も述べよ．φ_i が線型写像のときには $\varphi_{A_i} = \varphi_i$ となるような行列 A_i を求めよ．

(a) $\varphi_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2;\ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} x+1 \\ y+1 \end{bmatrix}$　(b) $\varphi_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2;\ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} x+y \\ x-y \end{bmatrix}$

(c) $\varphi_3 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2;\ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} x\sin\theta \\ y\cos\theta \end{bmatrix}$　(d) $\varphi_4 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3;\ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$

(e) $\varphi_5 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3;\ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} y \\ 0 \\ x \end{bmatrix}$　(f) $\varphi_6 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4;\ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

(g) $\varphi_7 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2;\ x \mapsto \begin{bmatrix} x \\ x^2 \end{bmatrix}$