線形代数 3　定期試験 予想問題集

担当:　渕野 昌　　**2017 年 05 月 30 日**

以下の問題の細部を調節したもののいくつかとレポートの練習問題として出したものの類題を，期末試験の基本問題として出題します．これらの問題が解けるよう準備しておいてください．

期末試験では，これ以外にも，さらに challenging な問題を 1 題程度出す可能性があります．

このプリントのファイルは，

`http://fuchino.ddo.jp/kobe/lin-alg2-ss17-pre-final-exam.pdf`

としてダウンロードできます．

I　$\varphi : \mathbb{R}^\ell \to \mathbb{R}^m$ と $\psi : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ をそれぞれ線型写像とする．(a) $\ell \geq m > n$ とするとき，φ と ψ の合成 $\psi \circ \varphi$ は 1 対 1 写像にならないことを示せ．(b) $\psi \circ \varphi$ が $\mathbb{R}^n$ の上への写像となっているとき，$\dim(\mathrm{Ker}(\psi \circ \varphi))$ は何になるか?

II.　(a) 正方行列 A が逆行列 A^{-1} を持てば，$\varphi_{A^{-1}}$ は φ_A の逆写像となることを示せ．逆に，正方行列 A, B について φ_A が φ_B の逆写像なら，B は A の逆行列であることを示せ．

(b) A を $n \times m$-行列として，$\mathbf{a}_1,\ldots,\mathbf{a}_m \in \mathbb{R}^n$ を，$A = [\mathbf{a}_1 \cdots \mathbf{a}_n]$ となるものとする．$\varphi_A : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ が 1 対 1 写像になるのは，$\mathbf{a}_1,\ldots,\mathbf{a}_m$ が一次独立となるちょうどそのときであることを示せ．

(c) A を $n \times n$-行列として，$A = [\mathbf{a}_1 \cdots \mathbf{a}_n]$ とする．上の (a), (b) (と次元定理) を使って，$\{\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n\}$ が一次独立であることと，A が逆行列を持つことが同値になることを示せ．

III.　$\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ を $\varphi(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}, \varphi\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ -6 \end{bmatrix}$ となるような線形写像とする．

(a) φ の表現行列 ($\varphi_A = \varphi$ となるような行列) を求めよ．(b) $\mathrm{Im}(\varphi)$ と $\mathrm{Ker}(\varphi)$ が何になるかを求めよ．

IV.　$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 1 & 5 & 3 \end{bmatrix}$ するとき，$\varphi_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ の，$\mathbb{R}^3$ と $\mathbb{R}^2$ のそれぞれの基底

$\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$,　$\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} \right\}$ に関する表現行列を求めよ．