線形代数 4　演習

2017 年度第 2 quarter　　**担当: Sakaé Fuchino (渕野 昌)**　　**July 28, 2017**

以下の演習問題は 2017 年 7 月 28 日の補講での演習のための課題です．8 月 3 日に予定している期末試験の試験問題は，主に，ここでの演習問題の類題となる予定です．

1. 次の行列の対角化が可能かどうかを調べ，可能なら，この行列の対角化を求めよ:

(a) $\begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$　　(b) $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

2. a をある実数として，ベクトル

$\begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ -5 \\ 2 \\ a \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^4$ の (標準) 内積を求めよ．これらのベクトルが直交するためには a の値が何になればよいかを求めよ．

3. 次の $\mathbb{R}^3$ の基底に対して，グラム・シュミットの直交化を行ない，正規直交基底を求めよ:

$\mathbb{v}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbb{v}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbb{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

4. V を内積空間とする．$\mathbb{a}, \mathbb{b} \in V$ が 1 次従属なら $\|\mathbb{a}\| \cdot \|\mathbb{b}\| = |(\mathbb{a}, \mathbb{b})|$ が成り立つことを示せ．

5. $\mathbb{u}_1, \mathbb{u}_2, \mathbb{u}_3 \in \mathbb{R}^3$ を $\mathbb{R}^3$ の (標準内積に関する) 正規直交基底とする．$A = [\mathbb{u}_1\, \mathbb{u}_2, \mathbb{u}_3]$ として，

$$\varphi_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3;\ \mathbb{x} \mapsto A\mathbb{x}$$

により $\mathbb{R}^3$ から $\mathbb{R}^3$ への同型写像 φ_A を定義すると，すべての $\mathbb{a}, \mathbb{b} \in \mathbb{R}^3$ に対し，$(\mathbb{a}, \mathbb{b}) = (\varphi_A(\mathbb{a}), \varphi_A(\mathbb{b}))$ が成り立つことを示せ．