

線形代数 4 演習

2018 年度第 2 quarter 担当: Sakaé Fuchino (澁野 昌)

July 26, 2018

以下の演習問題は 2018 年 7 月 26 日の補講での演習のための課題です。8 月 2 日に予定されている期末試験の試験問題は、主に、ここでの演習問題の類題となる予定です。

1. 次の行列の対角化が可能かどうかを調べ、可能なら、この行列の対角化を求めよ:

$$(a) \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \quad (b) \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

2. a をある実数として、ベクトル

$$\begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ -5 \\ 2 \\ a \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^4 \text{ の (標準) 内積を求めよ. これらのベクトルが直交するためには } a \text{ の値が}$$

何になればよいかを求めよ.

3. 次の \mathbb{R}^3 の基底に対して、グラム・シュミットの直交化を行ない、正規直交基底を求めよ:

$$v_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, v_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

4. V を内積空間とする. (a) $a, b \in V$ が線型従属なら $\|a\| \cdot \|b\| = |(a, b)|$ が成り立つことを示せ.

(b) $a, b \in V$ が線型従属で、 $c \in \mathbb{R}$ に対し、 $a = cb$ となるとき、 $(a, b) < 0$ となることの必要十分条件を c に関する不等式を用いて表わせ.

(c) a, b が線型独立であることと、不等式 $\|a\| \cdot \|b\| > |(a, b)|$ が成り立つことは同値であることを示せ.

5. $u_1, u_2, u_3 \in \mathbb{R}^3$ を \mathbb{R}^3 の (標準内積に関する) 正規直交基底とする. $A = [u_1 \ u_2 \ u_3]$ として、

$$\varphi_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3; x \mapsto Ax$$

により \mathbb{R}^3 から \mathbb{R}^3 への同型写像 φ_A を定義すると、すべての $a, b \in \mathbb{R}^3$ に対し、 $(a, b) = (\varphi_A(a), \varphi_A(b))$ が成り立つことを示せ.