線型代数入門 (線形代数学 I)　演習 No.1

担当: 渕野 昌　　2012.10.18(Th)

学生番号:　　　　　　　　名前:

この演習問題と解答例は `http://kurt.scitec.kobe-u.ac.jp/~fuchino/kobe/` にリンク予定です.

1. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ とするとき，(1) AB, (2) $B+C$ (3) $AB+AC$, (4) $7A-3B$ を計算せよ.

[**解答例**] 略.

2. m をある 0 でない自然数として，A と B を $m \times m$-行列とする． A と B が可換なら (つまり $AB = BA$ が成り立つなら) すべての自然数 n に対して，$(AB)^n = A^n B^n$ が成り立つことを示せ．ただし，A^n で $\underbrace{AA \cdots A}_{n\,個}$ をあらわす.

[**解答例**] A と B が可換なら,

$$(AB)^n = \underbrace{\underbrace{AB}\,\underbrace{AB}\cdots\underbrace{AB}}_{n\,回} = \cdots = \underbrace{AA\cdots A}_{n\,回}\underbrace{BB\cdots B}_{n\,回} = A^n B^n$$

$\uparrow$ $AB = BA$ を複数回適用して，A と B を左右に移動する.

となる.

ウラに続く

3. $A=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ とすると，これらの A, B は，行列 A と B が可換でないときには，$(AB)^n = A^n B^n$ は必ずしも成り立たないことを示す例となっていることを示せ.

[**解答例**]

$A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = O$ だから，$n > 1$ なら，$A^n B^n = A^2 A^{n-2} B^n = O(A^{n-2}B) = O$ である.

一方，$AB = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ で，$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ だから，$(AB)^n = \left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\right)^n = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ である.

したがって，$n > 1$ なら $(AB)^n \neq A^n B^n$ である.

特にこのことと，2. をあわせると A と B は可換でないことがわかるが，これは，$AB = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, BA = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ から直接確かめることもできる.