線型代数 II　演習 No.1

担当:　渕野 昌　　**2009 年 10 月 15 日**

以下の問題をできるかぎり解いて，問題と解答を A4 の紙にレポートとしてまとめて 10 月 29 日の講義の初めに提出してください．

ただし，解答は，結果を得るための計算過程，思考過程が分るような書き方を工夫してください．結果だけが書かれていて，それを得るための計算や考え方が述べられていないものは解答とは認めません．

この演習の問題用紙は，

`http://kurt.scitec.kobe-u.ac.jp/~fuchino/kobe/linalg09w-uebung1.pdf`

としてダウンロードできます．

基本問題

1. 次の行列の計算をせよ: $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 0 & 5 & 3 \\ 1 & 4 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 4 & -1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$

2. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ は正則か？ もし正則なら (1) 逆行列を，掃き出し法を用いて求めよ．

(2) この行列の行列式を求めよ．

(3) この行列の逆行列を教科書 p.170 の定理 18 を用いて求めよ．

3. 次の連立一次方程式を，拡大係数行列の基本変形により解け： $\begin{cases} x + 2y + 3z = 1 \\ -2x - 3y - 4z = 2 \\ 2x + 2y + 4z = 1 \end{cases}$

発展問題

4. A を $n \times n$ 正方行列として，$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ とする．

(a) A が正則行列なら，$A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ の解は $\mathbf{x} = \mathbf{0} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$ しかないことを示せ．

(b) A が正則行列なら，すべての実数 $a_1, \ldots, a_n$ に対し，$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$ として，$A\mathbf{x} = \mathbf{a}$ はちょうど一つだけ解を持つことを示せ．

チャレンジ問題

5. A を $n \times n$ 正方行列とする．A が正則行列でないなら，$A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ は $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 以外の解を必ず持つことを示せ．

線型代数 II　演習 No.1

担当:　渕野 昌　　　　**2009 年 11 月 01 日 (23:39) 版**

解答例と解説

以下の解答は十分に注意して作成しているつもりですが，ひょっとすると計算ミスやタイプミスなどが残ってしまっているかもしれません．もし何か不備でないかと思われる点を見つけた方は，渕野 (`fuchino@diamond.kobe-u.ac.jp`) までお知らせください．

1. 次の行列の計算をせよ:

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 0 & 5 & 3 \\ 1 & 4 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 4 & -1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$$

解答例

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 0 & 5 & 3 \\ 1 & 4 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 4 & -1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\times 2+3\times 4+2\times 5 & 2\times 2+3\times(-1)+2\times 2 \\ 0\times 2+5\times 4+3\times 5 & 0\times 2+5\times(-1)+3\times 2 \\ 1\times 2+4\times 4+2\times 5 & 1\times 2+4\times(-1)+2\times 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 26 & 5 \\ 35 & -1 \\ 28 & 2 \end{bmatrix}$$

2. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ は正則か？ もし正則なら (1) 逆行列を，掃き出し法を用いて求めよ．

(2) この行列の行列式を求めよ．

(3) この行列の逆行列を教科書 p.170 の定理 18 を用いて求めよ．

解答例と解説

正方行列（縦横のサイズが同じ行列）が正則とは，逆行列が存在することだった．したがって，問題 (1) で逆行列が求められれば，この行列が正則であることがわかる．あるいは，もしこの行列の行列式が 0 と異なるなら，教科書 p.170 の定理 18 を用いれば逆行列が求まる．つまり $det(A) \neq 0$ なら A は正則である（定理 22 の (2)）．

したがって，“A は正則か?” という問には，“(1) の解答で示すように A の逆行列が求まるので A は正則である” あるいは “(2) の解答で示すように $det(A) \neq 0$ だから，定理 22 の (2) により，A は正則である”．などとして答えることができる．

(1):

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{\substack{2\text{ 行目に} \\ 1\text{ 行目の } 2 \text{ 倍を足す}}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{\substack{3\text{ 行目に} \\ 2\text{ 行目の } -1 \text{ 倍を足す}}}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & -1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{\substack{3\text{ 行目を} \\ -1 \text{ 倍する}}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & -1 \end{array}\right] \xrightarrow{\substack{2\text{ 行目に} \\ 3\text{ 行目の } -2 \text{ 倍を足す}}}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & -1 \end{array}\right]$$

したがって $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ が求めるものとなる．

検算のために，$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ を計算してみると，確かに単位行列が得られるので，これがもとの行列の逆行列になっていることが確認できる．

(2): “たすきがけ” の計算をすると，

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1\times1\times1+(-2)\times1\times0+0\times0\times2-(0\times1\times0+(-2)\times0\times1+1\times1\times2) = -1$$

となる．

(3):

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}} \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \\ -2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

当然予想されるように，この計算結果は，(1) でのそれと等しい．

3. 次の連立一次方程式を，拡大係数行列の基本変形により解け： $\begin{cases} x+2y+3z=1 \\ -2x-3y-4z=2 \\ 2x+2y+4z=1 \end{cases}$

解答例

この連立方程式に対応する拡大係数行列は,

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ -2 & -3 & -4 & 2 \\ 2 & 2 & 4 & 1 \end{array}\right]$$

である．この拡大係数行列に基本変形をほどこして:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ -2 & -3 & -4 & 2 \\ 2 & 2 & 4 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{\substack{2\text{ 行目に} \\ 1\text{ 行目の } 2\text{ 倍を足す} \\ 3\text{ 行目に} \\ 1\text{ 行目の } -2\text{ 倍を足す}}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & -2 & -2 & -1 \end{array}\right] \xrightarrow{\substack{1\text{ 行目に} \\ 2\text{ 行目の } -2\text{ 倍を足す} \\ 3\text{ 行目に} \\ 2\text{ 行目の } 2\text{ 倍を足す}}}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & -7 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 7 \end{array}\right] \xrightarrow{\substack{3\text{ 行目を} \\ 1/2\text{ 倍する}}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & -7 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 7/2 \end{array}\right] \xrightarrow{\substack{1\text{ 行目に} \\ 3\text{ 行目を足す} \\ 2\text{ 行目に} \\ 3\text{ 行目の } -2\text{ 倍を足す}}}$$

$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -7/2 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 7/2 \end{array}\right]$ したがって方程式の解は，$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7/2 \\ -3 \\ 7/2 \end{bmatrix}$ ただ一つである．

4. A を $n \times n$ 正方行列として，$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ とする．

(a) A が正則行列なら，$A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ の解は $\mathbf{x} = \mathbf{0} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$ しかないことを示せ．

(b) A が正則行列なら，すべての実数 $a_1, \ldots, a_n$ に対し，$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$ として，$A\mathbf{x} = \mathbf{a}$ はちょうど一つだけ解を持つことを示せ．

解答例

(a): A は正則だから A の逆行列 A^{-1} が存在する．連立方程式 $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ の両辺に A^{-1} を右からかけると $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ が得られるが，この（自明な）連立はもとの連立方程式と同値になる（$A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ の両辺に A^{-1} を右からかけると $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ が得られるが，逆に $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ の両辺に A を右からかけると $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ が得られる）．したがって，もとの連立方程式の解は $\mathbf{0}$ に限ることがわかる．

(b): (a) でと同様に，連立方程式 $A\mathbf{x} = \mathbf{a}$ は，この両辺に A^{-1} を右側からかけて得られる $\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{a}$ と同値になるから，もとの連立方程式は，$A^{-1}\mathbf{a}$ を唯一の解として持つことがわかる．

5. A を $n \times n$ 正方行列とする．A が正則行列でないなら，$A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ は $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 以外の解を必ず持つことを示せ．

解答例と解説

解答例（その 1 — 教科書の 9 章を予習している人のための解答） $n \times n$ 行列 A は線型写像 $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n; \mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}$ に対応する．この線型写像も A で表わすことにすると，行列 A が正則でないときには，次元定理 (教科書の定理 14) から，$Im(A)$ の次元は n より真に小さくなる．したがってふたたび次元定理により， $Ker(A)$ の次元は 0 より真に大きくなる．$Ker(A)$ は，方程式 $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ の解の全体の作る $\mathbb{R}^n$ の部分空間だから，このことから特に，連立方程式 $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ は $\mathbf{0}$ 以外の解を持つことがわかる．

解答例（その 2 — 係数行列の基本変形を用いた解答） 連立方程式 $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ の拡大行列 A に行に関する基本変形を施して，階段形 （教科書 p.128 の式 (11) の形のもの）に変形し，この階段形の行列の列の入れかえを何回か行うことで，もとの連立方程式と同値な 教科書 p.129 の式 (13) の形の連立方程式が得られる．ただし，ここでは $m = n$ で教科書の式の $y'_1, \ldots, y'_m$ はすべて 0 である．もし，ここで $n - r = 0$ なら，(11) の式で $***$ であらわされているような列は存在しないことになるが，このときには，(11) の式にさらに列に関する基本変形を続けて単位行列に変形することができる．ところが，行に関する基本変形のこれと同じ組合せを単位行列に施すことで A^{-1} が得られてしまう．つまり，A は正則であるが，これは仮定に矛盾である．したがって $n - r > 0$ である．$x'_1, \ldots, x'_{n-r}$ に任意の値を入れたときに，$x'_{n-r+1}, \ldots, x'_n$ をうまく選ぶことによって $x'_1, \ldots, x'_n$ （の並べかえ）が $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ の解となるようにできる．特に $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ は $\mathbf{0}$ 以外にも存在する．

注意． 5. と 4. (a) を組み合せると，正方行列 A に対し，

$$A \text{ は正則である } \Leftrightarrow A\mathbf{x} = \mathbf{0} \text{ の自明でない（つまり } \mathbf{0} \text{ 以外の）解が存在する}$$

という同値が成り立つことがわかる．