線型代数 II　演習（レポート） No.2

担当:　渕野 昌 **2009 年 11 月 12 日**

以下の問題をできるかぎり解いて，問題と解答を A4 の紙にレポートとしてまとめて 11 月 26 日の講義の初めに提出してください．

解答は，結果を得るための計算過程，思考過程が分るような書き方を工夫してください．結果だけが書かれていて，それを得るための計算や考え方が述べられていないものは解答とは認めません．

この演習の問題用紙は，

`http://kurt.scitec.kobe-u.ac.jp/~fuchino/kobe/linalg09w-uebung2.pdf`

としてダウンロードできます．レポートの提出期限後，このファイルに問題の解答例と解説を付け加えたものを同じ URL に置く予定です．

配付した問題用紙には，いくつか
タイプミスが含まれていました!!
次ページ以降を参照して下さい!!!

1. の行列式の計算をせよ（ヒント: (a)〜(d) のすべてについて，工夫すると簡単な手計算で値が出せるような問題になっている）：

(a) $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 2 & 0 \end{vmatrix}$　(b) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}$　(c) $\begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 8 \\ 1 & -2 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & -4 & 5 & 0 & 4 \\ 3 & -6 & 1 & -1 & 5 \end{vmatrix}$　(d) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$

2. A を $m_1 \times n_1$ 行列，B を $m_1 \times n_2$ 行列，C を $m_2 \times n_2$ 行列とする．また O を $m_2 \times n_1$ 行列ですべての成分が 0 であるようなものとする．これらの行列（の成分）を $\begin{bmatrix} A & B \\ O & C \end{bmatrix}$ と組み合せて得られる $(m_1 + m_2) \times (n_1 + n_2)$ 行列を D とするとき，$\det(D) = \det(A) \cdot \det(C)$ が成り立つことを示せ．

3. $A = [a_{i,j}]$ を $n \times n$ 行列として，すべての $1 \leqq j < i \leqq n$ に対し，$a_{i,j} = 0$ となっているとする．このとき，$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,i}$ となることを示せ（この事実を用いることで 1(b) が容易に計算できることに注意）．

4. A を $m \times n$-行列，$\mathbf{a}$ を m 次元ベクトルとして，$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ とする．

$\mathbf{b}$ を連立方程式 $A\mathbf{x} = \mathbf{a}$ の一つの解とするとき，この連立方程式の任意の解は，$A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ のある解 $\mathbf{c}$ により $\mathbf{b} + \mathbf{c}$ とあらわせることを示せ．

5. A と B を正則な $n \times n$ 行列とするとき，$3A\,{}^tB$ も正則な $n \times n$ 行列となることを示せ（ヒント: 定理 22, 定理 21, 定理 20 の系を用いる）．

6. 次の等式が成り立つことを示せ: $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = -(b-a)(c-b)(a-c)$.

7. (9 章の予習をしている人のための問題) $m < n$ として，A を $m \times n$ 行列とするとき，連立方程式 $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ の解の全体の作る $\mathbb{R}^n$ の部分空間の次元は $n - m$ 以上である（したがって特にこの連立方程式は自明でない解持つ）ことを示せ．

8. A を $n \times n$ 行列として，B を A に基本変形のうち（教科書 p.119 の）L1, L3, R1, R3 （のうちのいくつか，あるいはすべて）を何回か（繰り返し）施して得られる行列とする．このとき，$|\det(A)| = |\det(B)|$ が成り立つことを示せ．ただし，ここで $|\cdot|$ は絶対値をあらわしている．

線型代数 II　演習 No.2

担当:　渕野 昌　　**2009 年 12 月 04 日 (11:13JST) 版**

解答例と解説

以下の解答は十分に注意して作成しているつもりですが，ひょっとすると計算ミスやタイプミスなどが残ってしまっているかもしれません．もし何か不備でないかと思われる点を見つけた方は，渕野 (`fuchino@diamond.kobe-u.ac.jp`) までお知らせください．

1. の行列式の計算をせよ（ヒント: (a)〜(d) のすべてについて，工夫すると簡単な手計算で値が出せるような問題になっている）:

(a) $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 2 & 0 \end{vmatrix}$

教科書 k p.180 の (36) を $j = 1$ の場合に適用すると，

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 2 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{1+1} \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 0 \end{vmatrix} \quad + \quad (-1)^{1+4} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 5 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 2 \times (5 \times 1 \times 0 + 1 \times 2 \times 1 + 4 \times 3 \times 1 - (4 \times 1 \times 1 + 1 \times 3 \times 0 + 5 \times 2 \times 1))$$
$$\quad +(-1) \times (3 \times 3 \times 1 + 5 \times 1 \times 1 + 1 \times 2 \times 1 - (1 \times 3 \times 1 + 5 \times 2 \times 1 + 3 \times 1 \times 1))$$
$$= 0$$

(b) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}$

下の 3. を用いると（問題文の訂正に注意），

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} \;=\; 2^6 \;=\; 64$$

(c) $\begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 8 \\ 1 & -2 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & -4 & 5 & 0 & 4 \\ 3 & -6 & 1 & -1 & 5 \end{vmatrix}$

行列式の線型性（講義では多重線型性という用語を説明した）と交代性から，行列のある列が他の列の定数倍になっているときには，この行列の行列式は 0 になることが示せるのだった．上の行列式の行列では，第 2 列が第 1 列の -2 倍になっているから，

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 8 \\ 1 & -2 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & -4 & 5 & 0 & 4 \\ 3 & -6 & 1 & -1 & 5 \end{vmatrix} \;=\; 0$$

である．

(d) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$

任意の行列について，$|A| = |{}^tA|$ が成り立つ（p.177 定理 20 の系）のだったから，上の行列の転置行列をとり，(a) と同様に計算できる:

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{1+4} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$= (-1) \times (2 \times 2 \times 2 + 1 \times 1 \times 1 + 2 \times 3 \times 1 - (2 \times 2 \times 1 + 1 \times 3 \times 1 + 2 \times 1 \times 1)) = 0$

2. A を $m_1 \times n_1$ 行列，B を $m_1 \times n_2$ 行列，C を $m_2 \times n_2$ 行列とする．また O を $m_2 \times n_1$ 行列ですべての成分が 0 であるようなものとする．これらの行列（の成分）を $\begin{bmatrix} A & B \\ O & C \end{bmatrix}$ と組み合せて得られる $(m_1 + m_2) \times (n_1 + n_2)$ 行列を D とするとき，$\det(D) = \det(A) \cdot \det(C)$ が成り立つことを示せ．

問題文にタイプミスが混入してしまっていました．行列式は正方行列にしか定義されていないので，問題が意味を持つのは，$m_1 = n_1$, $m_2 = n_2$ のときだけです．したがって，出題したかった正しい問題は:

> A を $m_1 \times m_1$ 行列，B を $m_1 \times m_2$ 行列，C を $m_2 \times m_2$ 行列とする．また O を $m_2 \times m_1$ 行列ですべての成分が 0 であるようなものとする．これらの行列（の成分）を $\begin{bmatrix} A & B \\ O & C \end{bmatrix}$ と組み合せて得られる $(m_1 + m_2) \times (m_1 + m_2)$ 行列を D とするとき，
> $\det(D) = \det(A) \cdot \det(C)$ が成り立つことを示せ．

解答例: $m_1 + m_2 = m$ として，A, B, C, D を上のように組み合せてできる行列を $H = \{h_{i,j}\}$ とすると，

(*) $\det(H) = \sum_\sigma \mathrm{sgn}(\sigma) h_{\sigma(1),1} \cdot \ \cdots \ \cdot h_{\sigma(m),m}$

である（教科書 p.177 の式 (30)）．上の式に表われる積 $h_{\sigma(1),1} \cdot \ \cdots \ \cdot h_{\sigma(m),m}$ にあらわれる $h_{\sigma(1),1}, \ldots, h_{\sigma(m),m}$ がすべて 0 と異なる（可能性がある）のは，これらが，O の要素に対応する成分と異なるときだが，これは，置換 σ で，$\sigma(1), \ldots \sigma(m_1)$ がすべて m_1 以下であるときである．σ は置換なので，このときには，$\sigma(m_1 + 1), \ldots, \sigma(m)$ はすべて $m_1 + 1$ 以上になっていることに注意する．したがって，このような σ は $\{1, \ldots, m_1\}$ の置換 σ_1 と $\{m_1 + 1, \ldots, m\}$ の置換 σ_2 の組によって与えられる．また，$\mathrm{sgn}(\sigma) = \mathrm{sgn}(\sigma_1)\mathrm{sgn}(\sigma_2)$ である．
$\{1, \ldots, m\}$ の置換の全体を S, $\{1, \ldots, m_1\}$ の置換の全体を S_1, $\{m_1 + 1, \ldots, m\}$ の置換の全体を S_2 書くことにする．$\sigma_1 \in S_1$ を一つ固定したとき，S の元で前半が，この σ_1 と一致するようなものの全体を S_{σ_1} とする．$S_{\sigma_1} = \{\sigma \in S : \sigma(1) = \sigma_1(1), \ldots, \sigma(m_1) = \sigma_1(m_1)\}$ である．
このとき，

$$\begin{aligned} &\textstyle\sum_{\sigma \in S_{\sigma_1}} \mathrm{sgn}(\sigma) h_{\sigma(1),1} \cdot \ \cdots \ \cdot h_{\sigma(m),m} \\ &= \mathrm{sgn}(\sigma_1) h_{\sigma_1(1),1} \cdot \ \cdots \ \cdot h_{\sigma_1(m_1),m_1} \cdot \left(\textstyle\sum_{\sigma_2 \in S_2} \mathrm{sgn}(\sigma_2) h_{\sigma_2(m_1+1),m_1+1} \cdot \cdots \ \cdot h_{\sigma_2(m),m}\right) \\ &= \mathrm{sgn}(\sigma_1) h_{\sigma_1(1),1} \cdot \ \cdots \ \cdot h_{\sigma_1(m_1),m_1} \cdot \det(C) \end{aligned}$$

となる，したがって，

$$\begin{aligned} &det(H) = \textstyle\sum_{\sigma \in S} \mathrm{sgn}(\sigma) h_{\sigma(1),1} \cdot \ \cdots \ \cdot h_{\sigma(m),m} \\ &= \left(\textstyle\sum_{\sigma_1 \in S_1} \mathrm{sgn}(\sigma_1) h_{\sigma_1(1),1} \cdot \ \cdots \ \cdot h_{\sigma_1(m_1),m_1}\right) \cdot \det(C) \\ &= det(A) \cdot \det(C) \end{aligned}$$

である．

3. $A = [a_{i,j}]$ を $n \times n$ 行列として，すべての $1 \leqq j < i \leqq n$ に対し，$a_{i,j} = 0$ となっているとする．このとき，$\det(A) = \sum_{i=1}^n a_{i,i}$ となることを示せ（この事実を用いることで 1(b) が容易に計算できることに注意）．

ここでもタイプミスをしてしまっていました．“$\det(A) = \sum_{i=1}^n a_{i,i}$ となることを示せ” は，“$\det(A) = \prod_{i=1}^n a_{i,i}$ となることを示せ”， の間違いです．こう訂正した問題の解答例を示します:

解答例: $\det(A) = \sum_\sigma \mathrm{sgn}(\sigma) a_{\sigma(1),1} \cdot \cdots \cdot a_{\sigma(n),n}$ である．$a_{\sigma(1),1}, \ldots, a_{\sigma(m),m}$ のうち行列の左下の部分から来たものが一つでもあれば，積 $a_{\sigma(1),1} \cdot \cdots \cdot a_{\sigma(n),n}$ の値は 0 になる．そのうようなものが一つもないなら，$\sigma(i) \le i$ がすべての $1 \le i \le n$ で成り立たなくではいけないが，σ は置換だから，この条件が満たされるのは $\sigma(i) = i$ がすべての $1 \le i \le n$ で成り立つとき，つまり σ が恒等置換（何も置き換えない置換）であるときに限る．このときには $\mathrm{sgn}(\sigma) = 1$ だから，$\det(A) = a_{1,1} \cdot a_{2,2} \cdot \cdots \cdot a_{n,n} = \prod_{i=1}^n a_{i,i}$ である．

4. A を $m \times n$-行列，$\mathbf{a}$ を m 次元ベクトルとして，$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ とする．

$\mathbf{b}$ を連立方程式 $A\mathbf{x} = \mathbf{a}$ の一つの解とするとき，この連立方程式の任意の解は，$A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ のある解 $\mathbf{c}$ により $\mathbf{b} + \mathbf{c}$ とあらわせることを示せ.

解答例: $\mathbf{b}$ を $A\mathbf{x} = \mathbf{a}$ の一つの解として，$\mathbf{d}$ を，$A\mathbf{x} = \mathbf{a}$ の任意の解とするとき，$A(\mathbf{d} - \mathbf{b}) = A\mathbf{d} - A\mathbf{b} = \mathbf{a} - \mathbf{a} = \mathbf{0}$ となるから，$\mathbf{c} = \mathbf{b} - \mathbf{d}$ とすると，$\mathbf{c}$ は連立方程式 $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ の解で，$\mathbf{d} = \mathbf{b} + (\mathbf{d} - \mathbf{b}) = \mathbf{b} + \mathbf{c}$ である．

5. A と B を正則な $n \times n$ 行列とするとき，$3A^tB$ も正則な $n \times n$ 行列となることを示せ（ヒント: 定理 22, 定理 21, 定理 20 の系を用いる）.

解答例: A と B を正則な $n \times n$ 行列とするとき，定理 22 により，$\det(A) \neq 0, \det(B) \neq 0$ である．したがって，定理 21 と定理 20 の系，および行列式の線型性を用いると

$$\det(3A^tB) = 3^n \det(A) \det(B) \neq 0$$

である．したがって，定理 22 により，$3A^tB$ は正則であることがわかる．

6. 次の等式が成り立つことを示せ: $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = -(b-a)(c-b)(a-c).$

解答例: まず p.180 の (36) での $j = 1$ の場合を使って展開して，これを二次の多項式の計算法でさらに展開したものを，普通に項をまとめる操作を何回か行なって整理すればよい:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b & c \\ b^2 & c^2 \end{vmatrix} - a \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ b^2 & c^2 \end{vmatrix} + a^2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ b & c \end{vmatrix} = bc^2 - b^2c - a(c^2 - b^2) + a^2(c - b)$$
$$= bc(c-b) - a(c+b)(c-b) + a^2(c-b) = (c-b)(bc - a(c+b) + a^2) = (c-b)(bc - ac - ab - a^2)$$
$$= (c-b)(c(b-a) - a(b-a)) = (c-b)(c-a)(b-a) = -(b-a)(c-b)(a-c).$$

7. (9 章の予習をしている人のための問題) $m < n$ として，A を $m \times n$ 行列とするとき，連立方程式 $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ の解の全体の作る $\mathbb{R}^n$ の部分空間の次元は $n - m$ 以上である（したがって特にこの連立方程式は自明でない解持つ）ことを示せ.

解答例: 連立方程式 $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ の解の全体は，A に対応する線型写像 $\varphi_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m, \mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}$ の核 $\mathrm{Ker}(\varphi_A)$ と一致する．次元定理から，$n = \dim(\mathrm{Im}(\varphi_A)) + \dim(\mathrm{Ker}(\varphi_A))$ だが，$\dim(\mathrm{Im}(A)) \le \dim(\mathbb{R}^m) = m$ だから，この不等式を前の式に代入すると，$n - m \le \dim(\mathrm{Ker}(\varphi_A))$ がわかる．

8. A を $n \times n$ 行列として，B を A に基本変形のうち（教科書 p.119 の）L1, L3, R1, R3 （のうちのいくつか，あるいはすべて）を何回か（繰り返し）施して得られる行列とする．このとき，$|\det(A)| = |\det(B)|$ が成り立つことを示せ．ただし，ここで $|\cdot|$ は絶対値をあらわしている．

解答例: R1 は行列の二つの列の入れかえだが，行列式の交代性から，この操作で行列式の値の符号は代わるが絶対値は変化しない．R3 は行列のある列に他の列の定数倍を加える操作だが，行列式の交代性と線型性を使うとこの操作では行列式の値が変化しないことを講義で示した．L1 と L3 はそれぞれ R1 と R3 に対応する操作を列に対

して行う操作だが，上での議論と定理 20 の系 (p.177) により，これらの操作を行なっても行列式の絶対値は変化しない．したがって，B が A にこれらの操作を繰り返し行なって得られる $n \times n$ 行列なら，$|\det(A)| = |\det(B)|$ が成り立つことがわかる．また，$det(B) = -det(A)$ となるのは，変形操作に，L1 と R1 が全体で奇数回含まれているときである．