線型代数 II　演習（レポート） No.3

担当:　渕野 昌 **2009 年 12 月 24 日**

以下の問題をできるかぎり解いて，問題と解答を A4 の紙にレポートとしてまとめて 1 月 14 日の講義の初めに提出してください．

解答は，結果を得るための計算過程，思考過程が分るような書き方を工夫してください．結果だけが書かれていて，それを得るための計算や考え方が述べられていないものは解答とは認めません．

この演習の問題用紙は,

`http://kurt.scitec.kobe-u.ac.jp/~fuchino/kobe/linalg09w-uebung3.pdf`

としてダウンロードできます．ただし，1 月 4 日まで上記の URL のサーバーが止るため，この期間には,

`http://pauli.isc.chubu.ac.jp/~fuchino/kobe/linalg09w-uebung3.pdf`

にもコピーを置いておきます.

レポートの提出期限後，このファイルに問題の解答例と解説を付け加えたものを最初の URL に置く予定です.

---

1. 線型写像 $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ が，$\varphi(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\varphi(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\varphi(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}$ を満たすものとする．このとき,

(1) φ に対応する行列 A （$\varphi = \varphi_A$ となるような行列 A ）を求めよ.

(2) $\dim(\mathrm{Im}(\varphi))$, $\dim(\mathrm{Ker}(\varphi))$ を求めよ.

2. 線型写像 $\psi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ が，$\psi(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\psi(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$, $\psi(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}$ を満たすものとする．このとき,

(1) $\dim(\mathrm{Im}(\psi)) = 3$, $\dim(\mathrm{Ker}(\psi)) = 0$ となることを確かめよ.

(2) (1) により ψ の逆写像 ψ^{-1} が存在する．$\psi^{-1}(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix})$, $\psi^{-1}(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix})$, $\psi^{-1}(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix})$ を求めよ.

3. 線型写像 $\eta : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ が，$\eta(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\eta(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}$, $\eta(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}$, を満たすものとする．このとき，$\eta$ に対応する行列 C （$\eta = \varphi_C$ となるような行列 C ）を求めよ.
（ヒント: 1.,2. の結果を用いる.）

4. $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \mathbb{R}^m$ とする．このとき次を示せ:

(1) $\{\mathbf{x}_1\}$ は線型独立である $\Leftrightarrow$ $\mathbf{x}_1 \neq \mathbf{0}$.

(2) $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2\}$ は線型独立である $\Leftrightarrow$ $\mathbf{x}_1 \neq \mathbf{0}$, $\mathbf{x}_2 \neq \mathbf{0}$ かつ，$\mathbf{x}_1$ は $\mathbf{x}_2$ の定数倍でない.

5. $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n \in \mathbb{R}^m$ とするとき，次を示せ:

$\{\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n\}$ は線型独立である $\Leftrightarrow$ $\{\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n\}$ のはる $\mathbb{R}^m$ の部分空間の次元は n である.

6. $m < n$ として，A を $m \times n$-行列とするとき次を示せ:

$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ がすべての $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ に対し解を持つ $\Leftrightarrow$ $\dim(\mathrm{Ker}(A)) = n - m$.

7. 行列 $A = \begin{bmatrix} 8 & -6 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$ について次に答えよ:

(1) A の固有値を求め，これらの固有値に対応する固有ベクトルを求めよ.

(2) （予習問題）A の対角化を求めよ.

線型代数 II　演習 No.3

担当:　渕野 昌 **2010 年 01 月 18 日 (01:17JST) 版**

解答例と解説

以下の解答は十分に注意して作成しているつもりですが，ひょっとすると計算ミスやタイプミスなどが残ってしまっているかもしれません．もし何か不備でないかと思われる点を見つけた方は，渕野 (`fuchino@diamond.kobe-u.ac.jp`) までお知らせください．

1. 線型写像 $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ が，$\varphi(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\varphi(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\varphi(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}$ を満たすものとする．このとき，

(1) φ に対応する行列 A （$\varphi = \varphi_A$ となるような行列 A ）を求めよ．

解答例: φ の $\mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{e}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ での値の縦ベクトル，$\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}$ を（横に）ならべて得られる行列 $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ を考えると，$\varphi_A(\mathbf{e_1}) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ 等により，この行列 A が求めるものであることがわかる．

(2) $\dim(\mathrm{Im}(\varphi))$, $\dim(\mathrm{Ker}(\varphi))$ を求めよ．

解答例:
次元定理（特に，教科書 p.143 の式 (16)）により，A を 1. で求めた行列として，$\dim(\mathrm{Im}(\varphi))$ は，$rank(A)$ と一致する（講義では，式 (16) を明示的に扱わず，これを次元定理の証明の中で示している）．A に基本変形を施してランク標準形に変形すると，たとえば:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{1 行と 3 行の入れかえ}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{\text{2 行から 1 行をひく} \\ \text{3 行から 1 行 ×2 をひく}}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{\text{1 行から 2 行をひく} \\ \text{3 行に 2 行 ×2 をたす}}}$$
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \to \cdots \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

となり $rank(A) = 2$ がわかるから．$\dim(\mathrm{Im}(\varphi)) = 2$ である．また次元定理により，
$\dim(\mathrm{Ker}(\varphi)) = 3 - \dim(\mathrm{Im}(\varphi)) = 3 - 2 = 1$ である．

[**前半の別解**]: $\mathrm{Im}(\varphi)$ は，$\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}$ の張る $\mathbb{R}^3$ の線型部分空間である．$\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ と $\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ が線型独立であることは明らかである（4.(2) を参照）．一方，$\begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ だから，$\dim(\mathrm{Im}(\varphi)) = 2$ である．

2. 線型写像 $\psi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ が，$\psi(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\psi(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$, $\psi(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}$ を満たすものとする．このとき，

(1) $\dim(\mathrm{Im}(\psi)) = 3$, $\dim(\mathrm{Ker}(\psi)) = 0$ となることを確かめよ．

[**解答例**]:
$\mathrm{Im}(\psi)$ は，$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}$ の張る $\mathbb{R}^3$ の部分空間だから，1.(2) と同様に，$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ として，$rank(B) = 3$ となることを確かめればよい．ここでは，(2) で ψ の逆写像が必要になるので，同時にこれも求めておくことにする:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{\substack{\text{2 行目から 1 行目をひく} \\ \text{3 行目から 1 行目をひく}}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{\text{3 行目から 2 行目 ×2 をひく}}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{\text{3 行目を } -\frac{1}{2} \text{ 倍する}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \end{array}\right] \xrightarrow{\substack{\text{1 行目から 3 行目をひく} \\ \text{2 行目から 3 行目 ×2 をひく}}}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{3}{2} & -1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \end{array}\right]$$

となり，$rank(B)=3$ となることが確かめられた．また $B^{-1}=\begin{bmatrix} \frac{3}{2} & -1 & \frac{1}{2} \\ 0 & -1 & 1 \\ -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$ である．

(2) (1) により ψ の逆写像 ψ^{-1} が存在する．$\psi^{-1}(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix})$, $\psi^{-1}(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix})$, $\psi^{-1}(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix})$ を求めよ．

[解答例]:
上で求めた B^{-1} が ψ^{-1} に対応する行列だから，

$\psi^{-1}(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix})=\begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix}, \psi^{-1}(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix})=\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \psi^{-1}(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix})=\begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$
である

3. 線型写像 $\eta:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ が，$\eta(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix})=\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \eta(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix})=\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}, \eta(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix})=\begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}$, を満たすものとする．このとき，$\eta$ に対応する行列 C （$\eta=\varphi_C$ となるような行列 C ）を求めよ．
（ヒント: 1.,2. の結果を用いる.）

$A_1=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$, $A_2=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 3 \end{bmatrix}$ とすると，

$\varphi_{A_1}(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix})=\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\varphi_{A_1}(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix})=\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$, $\varphi_{A_1}(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix})=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$,

$\varphi_{A_2}(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix})=\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\varphi_{A_2}(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix})=\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}$, $\varphi_{A_2}(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix})=\begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}$ だから，$C=A_2(A_1)^{-1}$ とすると，

$\varphi_C(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix})=\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \varphi_C(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix})=\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}, \varphi_C(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix})=\begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}$ となることがわかる．したがって，

$\varphi_C(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix})=\eta(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}), \varphi_C(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix})=\eta(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}), \varphi_C(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix})=\eta(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix})$ が成り立っている．線型写像は，その定義域の基底での値で一意に決まるから，上の等式から，$\varphi_C=\eta$ がわかる．したがって，このような C が求めるものである．あとは，C の具体的な値を計算すればよい（略）.

4. $\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2\in\mathbb{R}^m$ とする．このとき次を示せ:

(1) $\{\mathbf{x}_1\}$ は線型独立である $\Leftrightarrow$ $\mathbf{x}_1\neq\mathbf{0}$.

[解答例]:
線形独立性（教科書の用語では一次独立性）の定義（と同値な教科書 p.138 (7)）を思い出すと，$\{\mathbf{x}_1\}$ は線型独立である $\Leftrightarrow$ すべてのスカラー c_1 に対し，$c_1\mathbf{x}_1=\mathbf{0}$ ならば，$c_1=0$ $\Leftrightarrow$ $\mathbf{x}_1\neq\mathbf{0}$.

(2) $\{\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2\}$ は線型独立である $\Leftrightarrow$ $\mathbf{x}_1\neq\mathbf{0}, \mathbf{x}_2\neq\mathbf{0}$ かつ，$\mathbf{x}_1$ は $\mathbf{x}_2$ の定数倍でない.

[解答例]:
線形独立性（教科書の用語では一次独立性）の定義（と同値な教科書 p.138 (7)）により，

(*) $\{\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2\}$ は線型独立である $\Leftrightarrow$ すべてのスカラー c_1, c_2 に対し，$c_1\mathbf{x}_1+c_2\mathbf{x}_2=\mathbf{0}$ なら，$c_1=c_2=0$
である.

今 $\{\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2\}$ が線形独立と仮定する．このとき，上の (*) で，$c_1=0$ の場合と $c_2=0$ の場合を考えると，$\mathbf{x}_1\neq\mathbf{0}$ かつ $\mathbf{x}_2\neq\mathbf{0}$ が成り立つことがわかる．もし，$\mathbf{x}_1$ が $\mathbf{x}_2$ の定数倍だったとすると，たとえば $\mathbf{x}_1=d\mathbf{x}_2$ として，$\mathbf{x}_1+(-d)\mathbf{x}_2=0$ だから，(*) により $\mathbf{x}_1$ と $\mathbf{x}_2$ は線形独立でないことになってしまい矛盾である．したがって，$\mathbf{x}_1$ は $\mathbf{x}_2$ の定数倍ではない.

逆に $\{\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2\}$ が線形独立でないと仮定すると，(*) により，両方とも 0 ではないようなスカラー c_1, c_2 で $c_1\mathbf{x}_1+c_2\mathbf{x}_2=\mathbf{0}$ となるようなものが存在する．$c_1=0$ で $c_2\neq 0$ とすると，$c_2\mathbf{x}_2=\mathbf{0}$ となり，$\mathbf{x}_2=\mathbf{0}$ となる．同様に $c_2=0$ で $c_1\neq 0$ とすると $\mathbf{x}_1=\mathbf{0}$ である．もし $c_1\neq 0$ かつ $c_2\neq 0$ なら，$\mathbf{x}_1=-\frac{c_2}{c_1}\mathbf{x}_2$ となり，$\mathbf{x}_1$ は $\mathbf{x}_2$ の定数倍である.

5. $\mathbf{x}_1,\dots,\mathbf{x}_n\in\mathbb{R}^m$ とするとき，次を示せ:

$\{\mathbf{x}_1,\dots,\mathbf{x}_n\}$ は線型独立である $\Leftrightarrow$ $\{\mathbf{x}_1,\dots,\mathbf{x}_n\}$ のはる $\mathbb{R}^m$ の部分空間の次元は n である.

[解答例]:
まず次の二つの定理を用意しておく:

定理 1． $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_k, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$ として，$\{\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_k\}$ は線形独立であるとする．このとき，$\{\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_k\} \cup \{\mathbf{x}\}$ が線型独立になるのは，$\mathbf{x}$ が $\{\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_k\}$ のはる $\mathbb{R}^m$ の部分空間に含まれないちょうどそのときである．

証明． 演習．**証明終り．**

定理 2． $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n \in \mathbb{R}^m$ として $\{\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n\}$ のはる $\mathbb{R}^m$ の部分空間を V とする．このとき，$\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n$ の部分列 $\mathbf{x}_{\ell_1}, \ldots, \mathbf{x}_{\ell_j}$ で $\{\mathbf{x}_{\ell_1}, \ldots, \mathbf{x}_{\ell_j}\}$ が V の基底になっているようなものが存在する．

証明． $\ell_1 < \ell_2 < \cdots < \ell_j$ （ただし j は $j \leq n$ となる，ある数）を帰納的に次のようにとる．ℓ_1 は $\mathbf{x}_\ell \neq \mathbf{0}$ となる最小の $\ell \leq n$ とする．4.(2) により，$\{\mathbf{x}_{\ell_1}\}$ は線型独立である．もし，V が $\{\mathbf{x}_{\ell_1}\}$ で張られるなら，$j = 1$ として構成を終える．そうでなければ，$\mathbf{x}_{\ell_1+1}, \ldots, \mathbf{x}_n$ の中に $\{\mathbf{x}_{\ell_1}\}$ で張られる部分空間に含まれないものがあるから，そのようなものの最初の添字を ℓ_2 とする．このとき，上の定理 1 により， $\{\mathbf{x}_{\ell_1}, \mathbf{x}_{\ell_2}\}$ は線型独立である．もし，V が $\{\mathbf{x}_{\ell_1}, \mathbf{x}_{\ell_2}\}$ で張られるなら，$j = 2$ として構成を終える．そうでなければ，同様の構成を繰り返す．以上のように繰り返せば，ある $j \leq n$ でこの構成は終了するが，このときの最後の添字を ℓ_j とすれば，$\mathbf{x}_{\ell_1}, \ldots, \mathbf{x}_{\ell_j}$ は V の基底になっている．**証明終り．**

ここで 5. の同値命題の証明にもどる．“$\Rightarrow$” は，部分空間の基底の定義から明らかである．“$\Leftarrow$” の対偶を示す．もし，$\{\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n\}$ が線型独立でなければ，上の定理 2 により，$\{\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n\}$ の部分集合 S で $\{\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n\}$ のはる $\mathbb{R}^m$ の部分空間の基底になっているものが存在するが，このときには，S は $\{\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n\}$ の真部分集合でなくてはならない．したがって，$\{\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n\}$ のはる $\mathbb{R}^m$ の部分空間の次元は n より真に小さなものとなる．

6. $m < n$ として，A を $m \times n$-行列とするとき次を示せ:

$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ がすべての $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ に対し解を持つ $\Leftrightarrow$ $\dim(\mathrm{Ker}(A)) = n - m$.

[**解答例**]:

$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ がすべての $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ に対し解を持つなら， $\varphi_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ は上射だから， $\mathrm{Im}(A) = \mathbb{R}^m$ で，したがって，$\dim(Im(A)) = m$ となる．したがって，次元定理から，$\dim(\mathrm{Ker}(A)) = n - \dim(\mathrm{Im}(A)) = n - n$ となる．

逆に，$\dim(\mathrm{Ker}(A)) = n - m$ なら，次元定理から，$\dim(\mathrm{Im}(A)) = m$ だが，$\mathbb{R}^m$ の m 次元部分空間は $\mathbb{R}^m$ 自身でしか有り得ないから，$\mathrm{Im}(A) = \mathbb{R}^m$ となり，どんな $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ に対しても $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ となる $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ がとれることがわかる．

7. 行列 $A = \begin{bmatrix} 8 & -6 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$ について次に答えよ:

(1) A の固有値を求め，これらの固有値に対応する固有ベクトルを求めよ．

(2) （予習問題）A の対角化を求めよ．