解答例と解説

線型代数 I　レポート No.1

担当:　渕野 昌　　　　2010 年 05 月 26 日

2011 年 06 月 22 日

以下の問題をできるだけ解いて，問題と解答を A4 の紙 にレポートとしてまとめてホチキス等でとじたものを 6 月 9 日の 講義の初め に提出してください.（この日にどうしても提出できない場合には 6 月 16 日の講義の初めにも「後出し」の提出として受取ますが，それ以降は受けとりません.）

解答は，結果を得るための計算過程，思考過程を（日本語で）説明するような書き方にしてください（日本語に自信のない場合には英語で書いてもいいです）．結果だけが書かれていて，それを得るための計算の工夫や考え方が述べられていないものは解答とは認めません.

この演習の問題用紙は,

http://kurt.scitec.kobe-u.ac.jp/~fuchino/kobe/linalgI-ss11-uebung1.pdf

としてダウンロードできます．問題の提出期限後にこの URL に問題の解答例を加えたファイルを掲載する予定です.

---

1. $$A = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

とするとき，AB, BA, A^2, B^2, A^3, B^3 を計算してください（ただし，行列 A と $n \in \mathbb{N}$, $n > 0$ に対し，A^n で $\underbrace{AA\cdots A}_{n\text{ 個}}$ を表わします）.

$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $B^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ となる．したがって $A^3 = A$, $B^3 = O$ である．他は略.

2. 線型写像 $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ が $\varphi(\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$, $\varphi(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\varphi(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}$ を満たすとする．このとき,

(1) $\varphi(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix})$, $\varphi(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix})$, $\varphi(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix})$ を求めてください.

(2) φ の表現行列 ($\varphi = \varphi_A$ となるような行列 A) を求めてください.

(1): $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\frac{1}{2}(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ となることと φ が線型写像であることに注意すると,

$$\varphi(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}) = \varphi(\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}) = \varphi(\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}) - \varphi(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix},$$

$$\varphi(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}) = \varphi(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}) = \varphi(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}) - \varphi(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix},$$

$$\varphi(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}) = \varphi\Bigl(\frac{1}{2}(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix})\Bigr) = \frac{1}{2}\Bigl(\varphi(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}) - \varphi(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}) - \varphi(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix})\Bigr)$$

$$= \frac{1}{2}\Bigl(\begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}\Bigr) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

(2): 講義での表現行列の存在の証明を思いだすと，$A = [\varphi(\mathbf{e}^3_1)\varphi(\mathbf{e}^3_2)\varphi(\mathbf{e}^3_3)] = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ が求めるような行列であることがわかる.

3. 連立方程式

$$\begin{cases} 3x_1 - 6x_2 + 3x_3 + 9x_4 = 3 \\ -2x_1 + 4x_2 - x_3 - 8x_4 = 1 \\ 4x_1 - 8x_2 + 9x_3 + 2x_4 = 19 \end{cases}$$

の一般解を掃き出し法を用いて求めてください．

4. 次の行列が逆行列があるかどうか，もし逆行列があるならそれは何になるかを掃き出し法を用いて調べてください．

$$(1)\ \begin{bmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 2 & -4 & 5 \\ -1 & 1 & -2 \end{bmatrix} \qquad (2)\ \begin{bmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 2 & -4 & 5 \\ -4 & 3 & -5 \end{bmatrix}$$

5. (1) (実数を成分にもつ) 2×2-行列 A が $A^2 = O$ を満たすとき（ただし O は零行列 — 成分がすべて 0 であるような行列 — とします）このことから A も零行列であることが結論できるでしょうか? もしできないなら，そのことを示す例をあげてください．

(2) どんな $n = 2, 3, 4 \cdots$ に対しても $A \neq E$, $A^2 \neq E, \ldots, A^n \neq E$ だが，$A^{n+1} = E$ となるような 2×2-行列 A が存在することを示してください．

(1): 問題 1 の行列 B が $B^2 = O$ だが，$B \neq O$ となるようなものの例の一つとなっている．

(2): 平面上で原点を中心とする角度 $\dfrac{2\pi}{n}$ の（左周りの）回転をあらわす行列

$$R = \begin{bmatrix} \cos\dfrac{2\pi}{n} & -\sin\dfrac{2\pi}{n} \\ \sin\dfrac{2\pi}{n} & \cos\dfrac{2\pi}{n} \end{bmatrix}$$

を考えると，$\varphi_{R^k} = (\varphi_R)^n$ は[1]，角度 $\dfrac{2k\pi}{n}$ の（左回り）の原点を中心とした回転になるから，$0 < k < n$ なら $R^k \neq E$ で，$R^n = E$ となることがわかる．

6. （チャレンジ問題 — エレガントな解答のためには，線型代数 II で学ぶことになる知識（教科書の 9 章の内容）が必要になりますが，素手でも解けるかもしれません）2×2 行列 A で $A^2 \neq O$ だが $A^3 = O$ となるようなものは存在しないことを示してください．

講義では 9 章の内容をきちんとやることにしたので，この問題は最終的に本講義の内容の範囲に入ることになりますが，以下の証明では，今（2011 年 06 月 18 日）の段階ではまだ話していない空間の次元に関する結果をいくつか用いています．

背理法で証明する: 2×2-行列 A が，$A^2 \neq O$ だが，$A^3 = O$ となっていると仮定して矛盾を導く．まず，A がこのようなものなら，$Im(\varphi_A) \neq \mathbb{R}^2$ である．もし，$Im(\varphi_A) = \mathbb{R}^2$ だとすると，$Im((\varphi_A)^2) = \mathbb{R}^2, Im((\varphi_A)^3) = \mathbb{R}^2$ となってしまい，仮定から $Im((\varphi_A)^3) = Im(\varphi_{A^3}) = \{\mathbf{0}\}$ となることに矛盾である．したがって，$Im(\varphi_A)$ は $\mathbb{R}^2$ の一次元部分空間であるか，ゼロ次元部分空間であるかのどちらであるが，$A^2 \neq O$ だったから，特に $A \neq O$ なので，$Im(\varphi_A)$ はゼロ次元ではありえない．したがって，$dim(Im(verphi_A)) = 1$ がわかる．同様に $Im((\varphi_A)^2) = Im(\varphi_{A^2})$ もゼロ次元ではない．$Im((\varphi_A)^2) \subseteq Im(\varphi_A)$ で，両方の空間ともに一次元だから，$Im((\varphi_A)^2) = Im(\varphi_A)$ となることがわかる．ところが，このことから，$Im(\varphi_{A^3}) = Im((\varphi_A)^3) = Im(\varphi_A)$ となってしまい，$A^3 = O$ により $Im(\varphi_{A^3}) = \{\mathbf{0}\}$ となることに矛盾である．q.e.d.

[1] φ がある集合 X から X 自身への写像のとき φ^k で φ の k 回の合成 $\underbrace{\varphi \circ \varphi \circ \cdots \circ \varphi}_{k\text{ 回}}$ をあらわす．

ついでに言うと，3×3 行列 A では， $A^2 \neq O$ だが $A^3 = O$ となるようなものは存在します．たとえば，

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

はこの性質を満たすことがチェックできます．この A のアナロジーで，すべての自然数 $n \geq 2$ に対して， $n \times n$-行列 A で， $A^{n-1} \neq O$ だが $A^n = O$ となるものが作れます．

これに対し，すべての自然数 $n \geq 2$ に対し，$n \times n$ 行列 A で，$A^n \neq O$ だが $A^{n+1} = O$ となるようなものは存在しないことが，上の $n = 3$ の場合の証明の拡張で示せます．