解説と解答例

線型代数 I　レポート No.2

担当:　渕野 昌

2010 年 07 月 02 日

2011 年 07 月 28 日

以下の問題をできるだけ解いて，問題と解答を A4 の紙 にレポートとしてまとめてホチキス等でとじたものを 7 月 21 日の 講義の初め に提出してください.（この日にどうしても提出できない場合には 7 月 28 日（補講日）の講義の初めにも「後出し」の提出として受取ますが，それ以降は受けとりません.）

解答は，結果を得るための計算過程，思考過程を（日本語で）説明するような書き方にしてください（日本語に自信のない場合には英語で書いてもいいです）．結果だけが書かれていて，それを得るための計算の工夫や考え方が述べられていないものは解答とは認めません.

この演習の問題用紙は,

http://kurt.scitec.kobe-u.ac.jp/~fuchino/kobe/linalgI-ss11-uebung2.pdf

としてダウンロードできます．問題の提出期限後にこの URL に問題の解答例を加えたファイルを掲載する予定です.

---

1. $\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}2\\1\\3\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}3\\2\\1\end{bmatrix}$ が $\mathbb{R}^3$ の基底になっていることを示してください.

$dim(\mathbb{R}^3)=3$ だから，次の 2. から，これらのベクトルが線形独立であることを示せば十分である．このためには，連立方程式 $a\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}+b\begin{bmatrix}2\\1\\3\end{bmatrix}+c\begin{bmatrix}3\\2\\1\end{bmatrix}=\mathbf{0}$ の解が $\begin{bmatrix}a\\b\\c\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$ に限ることを示せばよいが，これは，$A=\begin{bmatrix}1&2&3\\2&1&2\\3&3&1\end{bmatrix}$, $\mathbf{x}=\begin{bmatrix}a\\b\\c\end{bmatrix}$ とすると，A は可逆であることが示せる (演習!) ので,

$$a\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}+b\begin{bmatrix}2\\1\\3\end{bmatrix}+c\begin{bmatrix}3\\2\\1\end{bmatrix}=\mathbf{0}\Leftrightarrow A\mathbf{x}=\mathbf{0}\Leftrightarrow \mathbf{x}=A^{-1}\mathbf{0}=\mathbf{0}$$

となることからよい.

2. $\mathbb{R}^n$ の任意の n 次元の部分空間は $\mathbb{R}^n$ と一致することを示してください.

X を $\mathbb{R}^n$ の n 次元部分空間として，その基底の一つを $\mathbf{a}_1,\ldots,\mathbf{a}_n$ とする．$\mathbf{a}_1,\ldots,\mathbf{a}_n$ は $\mathbb{R}^n$ の基底 $\mathbf{a}_1,\ldots,\mathbf{a}_n$,…, $\mathbf{a}_m$ に拡張できるが，$\dim(\mathbb{R}^n)=n$ だから，$m=n$ となる (つまりこの拡張は真の拡張にはなっていない) ことがわかる．したがって $\mathbf{a}_1,\ldots,\mathbf{a}_n$ はすでに $\mathbb{R}^n$ の基底になっているから，これらの張る空間 X は $\mathbb{R}^n$ と一致する.

3. 写像 $\varphi:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ が 1 対 1 写像である（one-to-one 写像である／単射である，などと言うこともある）とは，すべての異なる $\mathbf{x}, \mathbf{x}'\in\mathbb{R}^n$ に対して $\varphi(\mathbf{x})\neq\varphi(\mathbf{x}')$ となることでした．また写像 φ が上射（onto 写像／上への写像，などと言うこともある）とは，すべての $\mathbf{x}'\in\mathbb{R}^m$ に対して $\varphi(\mathbf{x})=\mathbf{x}'$ となる $\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n$ が存在することでした.

(a) 線型写像 $\varphi:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ について,

φ は単射　$\Leftrightarrow$　$Ker(\varphi)=\{\mathbf{0}\}$

が成り立つことを示してください.

(b) 線型写像 $\varphi:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ について,

$$\varphi \text{ は上射 } \Leftrightarrow \ dim(Im(\varphi)) = m$$

が成り立つことを示してください．

(a): φ は線型写像なので，$\varphi(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ である．つまり，$Ker(\varphi) \supseteq \{\mathbf{0}\}$ である．したがって， φ が単射なら，$Ker(\varphi) = \{\mathbf{0}\}$ である．

逆に，$Ker(\varphi) = \{\mathbf{0}\}$ だとすると，$\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ に対し，$\varphi(\mathbf{a}) = \varphi(\mathbf{b})$ とすると，φ の線型性から，$\varphi(\mathbf{a} - \mathbf{b}) = \varphi(\mathbf{a}) - \varphi(\mathbf{b}) = \mathbf{0}$ となるから， $\mathbf{a} - \mathbf{b} = \mathbf{0}$ つまり，$\mathbf{a} = \mathbf{b}$ となることがわかる．したがって， φ はこのときには単射である．

(b): 上射の定義から，φ は上射 $\Leftrightarrow$ $Im(\varphi) = \mathbb{R}^m$ である．後者の条件は，2. から，$\dim(Im(\varphi)) = m$ と同値である．

4. $m \times n$-行列 A の i 列を $\mathbf{a}_i$ であらわすことにします． $A = [\mathbf{a}_1 \cdots \mathbf{a}_n]$ です．このとき，

(a) 任意のベクトル $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ に対し， $A\mathbf{x} = x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + \cdots + x_n\mathbf{a}_n$ となることを示してください．

(b) φ_A は単射 $\Leftrightarrow$ $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$ は線形独立
が成り立つことを示してください．

(c) $m = n$ のとき，つまり A が $n \times n$-行列になっているとき，

$$A \text{ は可逆} \Leftrightarrow \mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n \text{ は線形独立} \Leftrightarrow \varphi_A \text{ は単射} \Leftrightarrow \varphi_A \text{ は上射}$$

が成り立つことを示してください．

(a): $1 \leq i \leq m$ に対し，$A\mathbf{x}$ の i-成分は，$\displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j$ である．一方 $x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + \cdots + x_n\mathbf{a}_n$ の i 成分を考えると，これも $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j$ となることがわかるので，$A\mathbf{x} = x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + \cdots + x_n\mathbf{a}_n$ であることがわかる．

(b): 3(a) と上の (a) を用いると，

$$
\begin{aligned}
& \varphi_A \text{ は単射} \\
\Leftrightarrow\ & \text{すべての } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \text{ に対し，} \varphi_A(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \text{ なら，} \mathbf{x} = \mathbf{0} \qquad (3.(a) \text{ による}) \\
\Leftrightarrow\ & \text{すべての } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \text{ に対し，} A\mathbf{x} = \mathbf{0} \text{ なら，} \mathbf{x} = \mathbf{0} \qquad (\varphi_A \text{ の定義から}) \\
\Leftrightarrow\ & \text{すべての } \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n \text{ に対し，} x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + \cdots + x_n\mathbf{a}_n = \mathbf{0} \text{ なら} \\
& x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0 \qquad (4.(a) \text{ による}) \\
\Leftrightarrow\ & \mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n \text{ は線形独立} \qquad (\text{線型独立性の定義から})
\end{aligned}
$$

(c): (i) A は可逆 $\Leftrightarrow$ (ii) $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$ は線形独立 $\Leftrightarrow$ (iii)φ_A は単射 $\Leftrightarrow$ (iv) φ_A は上射の証明のために，(i) $\Rightarrow$ (iii) $\Rightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (iii) $\Rightarrow$ (i) を示す．

(i) $\Rightarrow$ (iii): A が可逆なら φ_A は逆写像 $\varphi_{A^{-1}}$ を持つから，特に φ_A は単射である．

(iii) $\Rightarrow$ (ii): φ_A が単射なら，(b) により，$\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$ は線型独立である．

(ii) $\Rightarrow$ (iv): $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$ が線型独立なら $\varphi_A(\mathbf{e}_1^n) = A\mathbf{e}_1^n = \mathbf{a}_1, \ldots, \varphi_A(\mathbf{e}_n^n) = A\mathbf{e}_n^n = \mathbf{a}_n$ で，$Im(\varphi_A)$ は $\mathbb{R}^n$ の部分空間だから，$\dim(Im(\varphi_A)) \geq n$ となる．したがって，2. により $Im(\varphi_A) = \mathbb{R}^n$ となることがわかる．つまり φ_A は上射である．

(iv) $\Rightarrow$ (i): φ_A が上射なら，$\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_n \in \mathbb{R}^n$ で，$\varphi_A(\mathbf{x}_1) = \mathbf{e}_1^n,\ldots,\varphi_A(\mathbf{x}_n) = \mathbf{e}_n^n$ となるものがとれる．このとき，$\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_n \in \mathbb{R}^n$ は線形独立となるから，2. により，$\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_n \in \mathbb{R}^n$ は $\mathbb{R}^n$ の基底である．したがって，すべての $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ に対し，$c_1,\ldots,c_n \in \mathbb{R}$ で，$\mathbf{v} = c_1\mathbf{x}_1 + \cdots + c_n\mathbf{x}_n$ となるものが一意に存在する．φ は線型写像だから，$\varphi(\mathbf{v}) = c_1\varphi(\mathbf{x}_1) + \cdots + c_n\varphi(\mathbf{x}_n) = c_1\mathbf{e}_1^n + \cdots + \mathbf{e}_n^n = \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}$ となる．$c_1,\ldots,c_n$ の一意性から，φ は単射でもあることがわかる．したがって，φ の逆写像 ψ が存在するが，ψ も $\mathbb{R}^n$ から $\mathbb{R}^n$ への線形写像である．よって，$\psi = \varphi_B$ となるような行列 B が存在する．このとき，$\varphi_{AB} = \varphi_A \circ \varphi_B = id_{\mathbb{R}^n}$，また，$\varphi_{BA} = \varphi_B \circ \varphi_A = id_{\mathbb{R}^n}$ となり，線型写像と行列の対応の一意性から，$AB = BA = E$ となることがわかる．したがって，B は A の逆行列で，A は可逆である．

5. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ とするとき，φ_A は $\mathbb{R}^3$ から $\mathbb{R}^3$ への全単射（単射かつ上射）となることを示してください．

4.(c) から正方行列 A が可逆であることと，A が全単射であることは同値である．ここでの A が可逆であることは 1 の解ですでに示していたので，φ_A は全単射であることがわかる．

6. $\mathbb{R}^3$ の $\mathbf{0}$ と異るベクトル $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ が $\mathbb{R}^3$ の基底となるのは，次の (1) と (2) が成り立つことと同値であることを説明してください:

(1) $\mathbf{b}$ は $\mathbf{a}$ の定数倍ではない;
(2) $\mathbf{c}$ は $\mathbf{a}$ と $\mathbf{b}$ のはる平面 $(= \{a\mathbf{a} + b\mathbf{b} : a, b \in \mathbb{R}\})$ に含まれない．

$dim(\mathbb{R}^3) = 3$ だから，$\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ が基底となることを示すためには，これらが線型独立であることを示せば十分である．講義で示した線型独立性の特徴付けの一つから，このためには，$\mathbf{b} \notin [\{\mathbf{a}\}]_{\mathbb{R}^3}$ かつ $\mathbf{c} \notin [\{\mathbf{a}, \mathbf{b}\}]_{\mathbb{R}^3}$ が成り立つことを示せばよいが，これらの条件はそれぞれ (1) および (2) と同値である．

7. A と B を $n \times n$-行列とする．4. (c) の結果を用いて，$AB = E_n$ なら，(つまり $BA = E_n$ であるかどうかを調べなくても） B は A の逆行列になることが言えることを示してください．

$AB = E_n$ なら，$\varphi_A \circ \varphi_B = \varphi_{E_n} = id_{\mathbb{R}^n}$ だから，φ_A は上射である．したがって，4. (c) により，A は可逆だから，逆行列 A^{-1} を持つ．A^{-1} を $AB = E_n$ の両辺に左からかけると，$B = (A^{-1}A)B = A^{-1}(AB) = A^{-1}E_n = A^{-1}$ となるから $B = A^{-1}$ である．