解答例と解説

線型代数 I　演習問題

担当:　渕野 昌

2011 年 07 月 28 日

2011 年 08 月 02 日

以下の問題は自習用の課題です．期末試験では，レポートとして提出してもらった問題とここでの演習問題のうちのいくつかの課題の類題が主な問題になる予定です．

この演習の問題用紙は，

http://kurt.scitec.kobe-u.ac.jp/~fuchino/kobe/linalgI-ss11-uebung2.pdf

としてダウンロードできます．この URL に問題の解答例を加えたファイルを掲載する予定です．解答例を書きたすときに新しい演習問題も付け加える可能性もあるので，注意してください．

---

1. $\mathbb{R}^4$ の基底 $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, をシュミットの直交化法を用いて正規直交基底に変換してください．

2. $\mathbf{a}_1, ..., \mathbf{a}_k \in \mathbb{R}^n$ のとき $[\{\mathbf{a}_1, ..., \mathbf{a}_k\}]_{\mathbb{R}^n}$ で $\mathbf{a}_1, ..., \mathbf{a}_k$ から生成される $\mathbb{R}^n$ の線形部分空間をあらわすのでした．

(a) $\mathbb{R}^n$ の基底 $\mathbf{b}_1, ..., \mathbf{b}_n$ にシュミットの直交化法をほどこして正規直交基底 $\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_n$ を得たとき，すべての $1 \le i \le n$ に対し，$[\{\mathbf{b}_1, ..., \mathbf{b}_i\}]_{\mathbb{R}^n} = [\{\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_i\}]_{\mathbb{R}^n}$ が成り立つことを示してください．

(b) $W \subseteq \mathbb{R}^n$ を任意の $\mathbb{R}^n$ の部分空間とするとき，$\mathbb{R}^n$ の正規直交基底 $\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_n$ で，ある $1 \le i \le n$ に対し，$[\{\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_i\}]_{\mathbb{R}^n} = W$ となるようなものがとれることを示してください．

(a): これは講義でも説明した．シュミットの直交化法では，$1 \le i \le n$ に対し，$\mathbf{v}_i$ は，$\mathbf{b}_i$ から $\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_{i-1}$ の線型結合を引いたものの定数倍として得られているので，i に関する帰納法により，$[\{\mathbf{b}_1, ..., \mathbf{b}_i\}]_{\mathbb{R}^n} \subseteq [\{\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_i\}]_{\mathbb{R}^n}$ となることが示せる．ところが，$\mathbf{b}_1, ..., \mathbf{b}_i$ も $\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_i$ も線型独立なので，$\dim([\{\mathbf{b}_1, ..., \mathbf{b}_i\}]) = \dim([\{\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_i\}]) = i$ となるから，$[\{\mathbf{b}_1, ..., \mathbf{b}_i\}]_{\mathbb{R}^n} = [\{\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_i\}]_{\mathbb{R}^n}$ となることが結論できる．

(b): W の基底 $\mathbf{b}_1,..., \mathbf{b}_i$ をとり，これを拡張して $\mathbb{R}^n$ の基底 $\mathbf{b}_1,..., \mathbf{b}_i,..., \mathbf{b}_n$ を作っておく．これにシュミットの直交化法を適用して $\mathbb{R}^n$ の正規直交基底 $\mathbf{v}_1,..., \mathbf{v}_n$ を作ると，(a) から，$W = [\{\mathbf{b}_1, ..., \mathbf{b}_i\}]_{\mathbb{R}^n} = [\{\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_i\}]_{\mathbb{R}^n}$ となるから，この $\mathbf{v}_1,..., \mathbf{v}_n$ が求めるようなものになっている．

3.

(a) $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ として，A を可逆な $n \times n$-行列とするとき，任意の n-次元ベクトル $\mathbf{b}$ に対し，連立方程式 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ は，ちょうど一つの解を持つことを証明してください．

(b) A が可逆な 4×4-行列で，$A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 4 \end{bmatrix}$ のとき，$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$ と

して，連立方程式 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ の解を求めてください．

(c) A が可逆でない $n \times n$-行列で $\mathbf{x}$ を変数の n-次元ベクトル，$\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ とするとき，連立方程式 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ は解を持たないか，複数の解を持つかのいずれかで，$\mathbf{b}$ のとり方によってこの両方の場合が実際に起きることを示してください．

(a): $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$ に対し，$A\mathbf{c} = \mathbf{b} \Leftrightarrow A^{-1}A\mathbf{c} = A^{-1}\mathbf{b} \Leftrightarrow \mathbf{c} = A^{-1}\mathbf{b}$ である．したがって，$\mathbf{x} = \mathbf{b}$ の解は $A^{-1}\mathbf{b}$ ちょうど一つであることがわかる．

(b): (a) により，ベクトル

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

が連立方程式 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ の唯一の解となる．

(c): これは講義で説明した．φ_A に対して次元定理を用いると，φ は単射でも上射でもないことが分るが，このことを連立方程式の言葉に翻訳すると，ここでの主張が得られる．

4. $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_k \in \mathbb{R}^n$ が線型独立（一次独立）とは，任意の $c_1, \ldots, c_k, c'_1, \ldots, c'_k \in \mathbb{R}$ に対し，$\displaystyle\sum_{i=1}^{k} c_i\mathbf{x}_i = \sum_{i=1}^{k} c'_i\mathbf{x}_i$ なら，$c_1 = c'_1, \ldots, c_k = c'_k$ が成り立つことでした（教科書 p.139）．$\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_k \in \mathbb{R}^n$ が線型独立となるのは，次の条件 (*) が成立することと同値であることを示してください:

(*) 任意の $c_1, \ldots, c_k \in \mathbb{R}$ に対し，$\displaystyle\sum_{i=1}^{k} c_i\mathbf{x}_i = \mathbf{0}$ なら，$c_1 = \cdots = c_k = 0$ である．

これも講義で詳しく説明している．線型独立の定義の条件をたとえば (**) と呼ぶことにして，任意の $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_k \in \mathbb{R}^n$ に対して (**) $\Rightarrow$ (*) と (*) $\Rightarrow$ (**) の両方が成り立つことを示せばよい．教科書 p.138 にヒントがある．