線形代数学 I 課題 1 答案例

1. 解答:

$$
\begin{aligned}
A\cdot B &= \begin{pmatrix} \sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\
B\cdot A &= \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix} \\
A^2 &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = I \\
B^2 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = O \\
A^3 &= A^2\cdot A = I\cdot A = A \\
B^3 &= B^2\cdot B = O\cdot B = O
\end{aligned}
$$

2. 解答:

問題の条件「 $s=v$ かつ $u=-v$」では「 A と B が可換」とは同値にならず、次の条件に置き換えた解答を与える。

(*) $b=0$ もしくは、$s=v$ かつ $u=-v$
なお問題の条件に対する指摘に応じて点数を与えた。

$A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} s & t \\ u & v \end{pmatrix}$
に対して、まず「 (*)$\Longrightarrow A$ と B は可換」を示す。

(i)$b=0$ の場合:
$A=a\cdot I$ より、$A\cdot B = a\cdot I\cdot B = a\cdot B\cdot I = B\cdot a\cdot I = BA$
したがって、A と B は可換となる。

(ii)$s=v$ かつ $u=-v$ の場合 ($b\neq 0$ に依らず):

$$
A\cdot B = \begin{pmatrix} as-bu & at-bv \\ bs+au & bt+av \end{pmatrix} \tag{1}
$$

$$
B\cdot A = \begin{pmatrix} as+bt & -bs+at \\ au+bv & -bu+av \end{pmatrix} \tag{2}
$$

となる。一方、条件から次の等式を得る。

$$
\begin{cases}
as-bu = as+bt \\
at-bv = -bs+at \\
bs+au = au+bv \\
bt+av = -bu+av
\end{cases} \tag{3}
$$

行列が等しいとは成分ごとに等しいことだったので、上の 4 つの等式から $A\cdot B = B\cdot A$ となり、A と B は可換である。

したがって、いずれの場合においても A と B は可換となり、「 (*)$\Longrightarrow A$ と B は可換」が言えた。

次に、逆の「 (*)$\Longleftarrow A$ と B は可換」を示そう。
A と B が可換とすると、$A\cdot B = B\cdot A$ により、等式 (3) を得る。等式 (3) の第一式、第二式から $b\cdot u = -b\cdot t, b\cdot s = b\cdot v$ を得る。ここで $b=0$ とすれば (*) は明らかに成立。一方、$b\neq 0$ とすれば、二式の両辺を b で割れば、$u=-t, s=v$ を得る。したがって、この場合においても (*) が成立する。こうして、「 (*)$\Longleftarrow A$ と B は可換」が示された。

以上をまとめれば、「 (*)$\Longleftrightarrow A$ と B は可換」。☒

3. 解答:

(1):まず

$$
A\cdot \mathrm{x} = \mathrm{b} \tag{4}
$$

の解 x が存在すると仮定する。この式の両辺に左から A^{-1} を乗ずると、

$$
\mathrm{x} = A^{-1}\cdot A\cdot \mathrm{x} = A^{-1}\cdot \mathrm{b} \tag{5}
$$

が成立する。$A^{-1}\cdot \mathrm{b}$ を計算すれば、

$$
\mathrm{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ 39 \end{pmatrix} \tag{6}
$$

という x に関する必要条件を得る。

次に、実際に x の値を上の式で定めると、

$$
\mathrm{x} = A^{-1}\cdot \mathrm{b} \tag{7}
$$

という関係式が計算により成立する。よって、この式の両辺に A を左から乗ずると、

$$
A\cdot \mathrm{x} = A\cdot A^{-1}\cdot \mathrm{b} = \mathrm{b} \tag{8}
$$

を得て、上のように定めた x が求むるべき解であったことが分かる。☒

(2):
A^{-1} から $A=(A^{-1})^{-1}$ を計算することができ、実際、その値は 2x2 の逆行列の公式を使い、

$$
A = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \tag{9}
$$

と計算できる。したがって、等式 (4) を計算すれば、

$$
A\cdot \mathrm{x} = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 4x+2y \\ -3x+y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix} = \mathrm{b} \tag{10}
$$

を満たす。簡単のため 10 を乗じて、連立方程式の形に直すと、

$$\begin{cases} 4x+2y=50 \\ -3x+y=60 \end{cases} \tag{11}$$

⊠

4. 解答:

成立しない。

たとえば、問題 1 の B がその反例にあたる。⊠

5. 解答:

A の例として、

$$\begin{aligned} exp\left(\frac{2\pi}{n+1}\right)\cdot I &= \begin{pmatrix} exp\left(\frac{2\pi}{n+1}\right) & 0 \\ 0 & exp\left(\frac{2\pi}{n+1}\right) \end{pmatrix}, \\ T\left(\frac{2\pi}{n+1}\right) &= \begin{pmatrix} cos\left(\frac{2\pi}{n+1}\right) & sin\left(\frac{2\pi}{n+1}\right) \\ -sin\left(\frac{2\pi}{n+1}\right) & cos\left(\frac{2\pi}{n+1}\right) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

を考えればよい。後者は角度 $\left(\frac{2\pi}{n+1}\right)$ の回転行列である。⊠

6. 解答:

$A^2 \neq O, A^3 = O$ となる 2x2 行列 A が存在したと仮定して矛盾を示そう。A は 2x2 行列であるから、ケーリー・ハミルトン (Cayley-Hamilton) の定理より、ある実数 α, β が存在して、

$$A^2 = \alpha A + \beta I \tag{12}$$

とかける。$A^2 \neq O$ より α, β の少なくとも一方は 0 でない。両辺に A を乗じると、線形性より

$$O = A^3 = \alpha A^2 + \beta A \tag{13}$$

したがって、特に、

$$\beta A = -\alpha A^2 \tag{14}$$

となる。ところが、A^2と A はともに 0 行列でなく、また α, β の少なくとも一方が 0 でないから、実は $\alpha, \beta \neq 0$ となる。さらに、等式 (14) に A を乗じると、

$$\beta A^2 = -\alpha A^3 = O \tag{15}$$

となる。ところが、これは、$\beta \neq 0, A^2 \neq O$ に矛盾する。

したがって、$A^2 \neq O, A^3 = O$ となる 2x2 行列 A を存在すると仮定したところに矛盾が生じたわけだから、このような A は存在しない。⊠